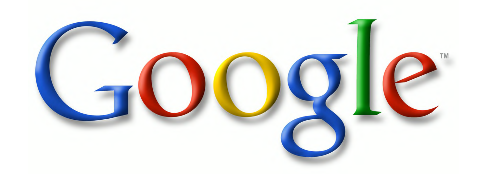
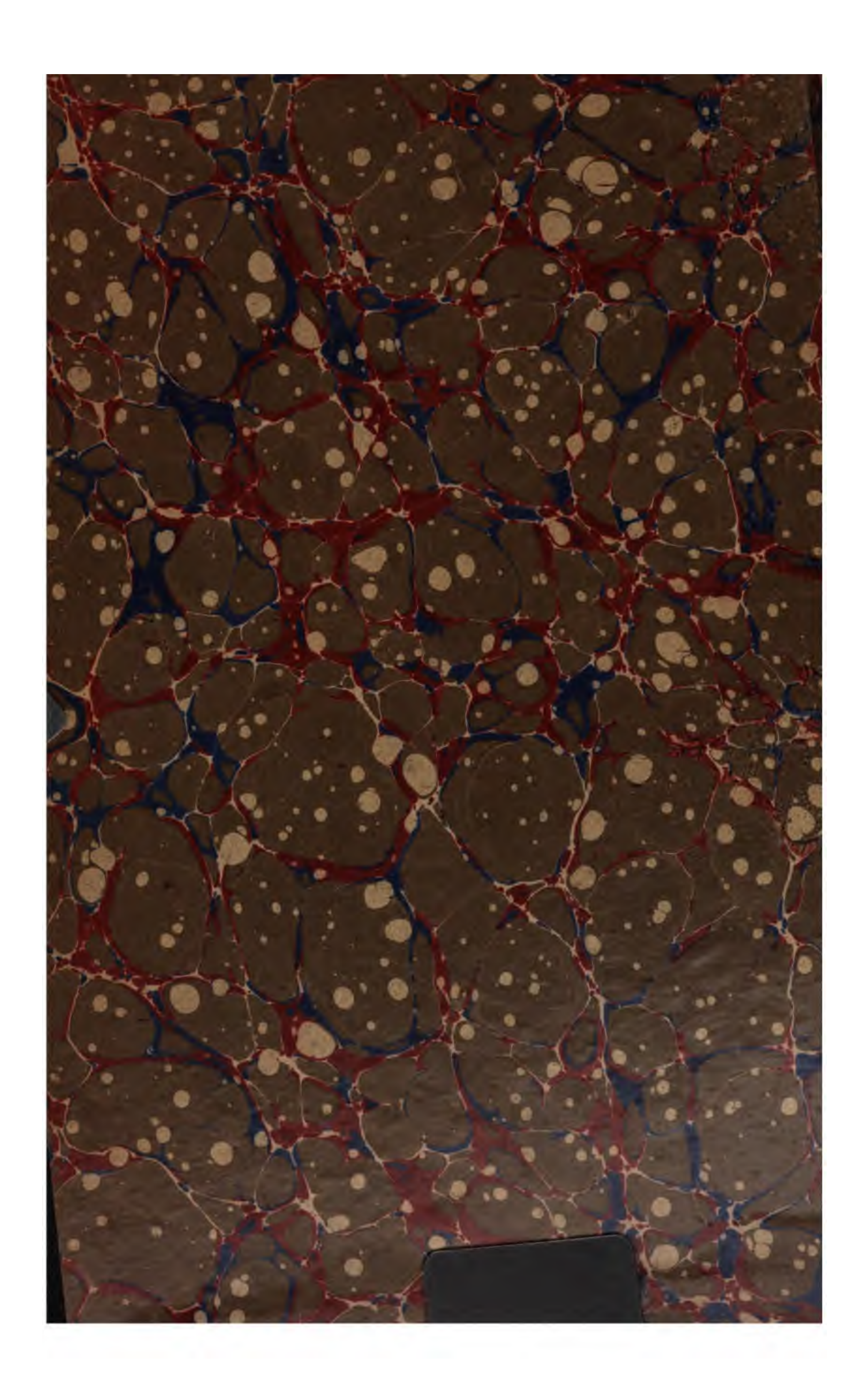
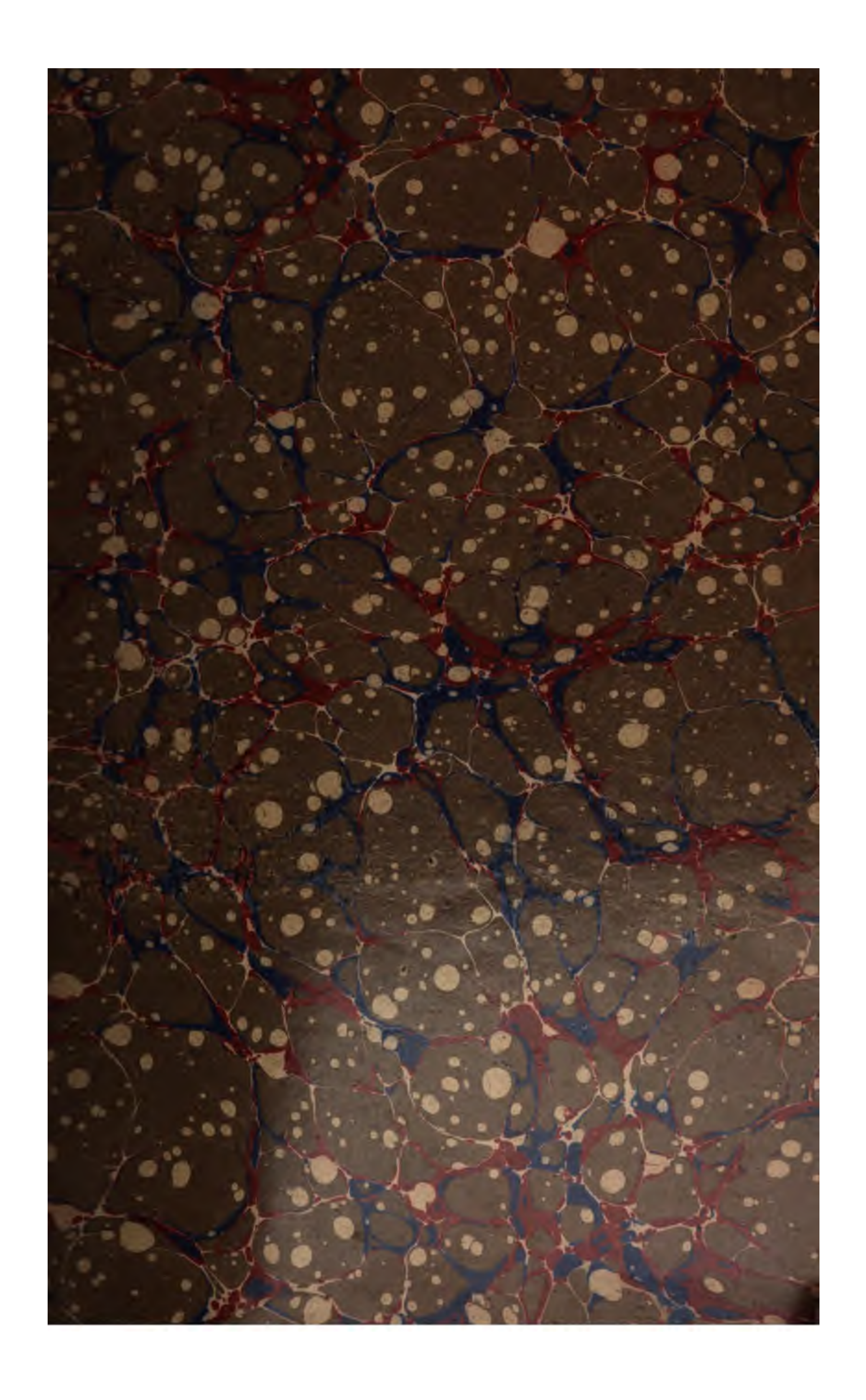










ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN
VON

E. LAMPE
IN BERLIN

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

6. BAND. 1. UND 2. (DOPPEL-)HEFT.

MIT 41 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 20. AUGUST 1903.



LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASZE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariser Straße 55

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 82, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen zunächst etwa 6 Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN
VON

E. LAMPE
IN BERLIN.

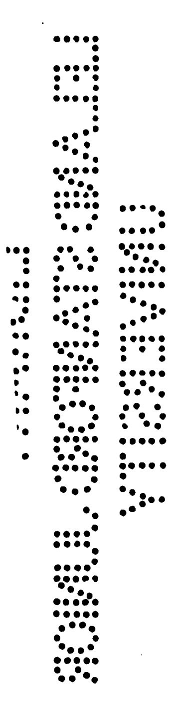
W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

SECHSTER BAND.

MIT 68 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.



Vorwort.

Die bisher erschienenen Bände aus der dritten Reihe haben den Beweis erbracht, daß sich das Archiv der Zustimmung und des Beifalls weiter mathematischer Kreise zu erfreuen hat. Gleichwohl kann sich die Redaktion nicht verhehlen, daß ein Teil ihres Programms noch nicht in dem Maße zur Durchführung gekommen ist, wie sie es gewünscht hätte, nämlich *die Verbreitung der Resultate mathematischer und physikalischer Forschung.* Die Redaktion richtet daher an die Dozenten der Hochschulen, sowie an die Oberlehrer der höheren Lehranstalten die höfliche Bitte, ihr Aufsätze zur Verfügung zu stellen, welche den genannten Zweck verfolgen.

Die Redaktion knüpft hieran die weitere dringende Bitte, *insbesondere an die Oberlehrer der höheren Lehranstalten,* ihr Wünsche oder Vorschläge betreffend stärkere Betonung dieses oder jenes Punktes im Programm mitteilen zu wollen.

Vom *achten* Bande an sollen die Bände regelmäßig in *einzelnen Heften* und nicht wie meistens bisher in Doppelheften zur Ausgabe gelangen.

E. Lampe. F. Meyer. E. Jahnke.

Inhalt.

Rezensionen.

Vermischte Mitteilungen.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

Lehrsätze über quadratische Strahlenkomplexe.

Von Th. Reye, Straßburg, Els.

Ein quadratischer Strahlenkomplex enthält bekanntlich die Kanten von ∞^6 Tetraedern (vgl. Math. Annalen Bd. 49, S. 592). Ein räumliches Fünfeck oder Fünfflach, dessen zehn Kanten in dem Komplex enthalten wären, gibt es im allgemeinen nicht.

Wenn ein quadratischer Komplex die zehn Kanten irgend eines räumlichen Fünfecks enthält, so sind in ihm alle Kanten von ∞^6 Fünfecken enthalten. Zwei beliebige Punkte A, B eines Komplexstrahles bilden mit ∞^1 Punkttripeln je eines dieser Fünfecke. Die ∞^1 Punkttripel liegen mit A und B auf einer kubischen Raumkurve, und ihre Ebenen gehen alle durch eine Gerade. Die Konstanten des Komplexes genügen *einer* Bedingung. Welche Invariante des Komplexes verschwindet in diesem Falle?

Wenn ein quadratischer Komplex die fünfzehn Kanten eines räumlichen Sechsecks oder Sechsflaches enthält, so sind in ihm die Kanten von ∞^9 Sechsecken und ∞^9 Sechsflachen enthalten. Er ist ein tetraedraler Komplex, und seine Konstanten genügen sechs Bedingungen.

Über die Deformation gekrümmter elastischer Platten.

Von L. Maurer in Tübingen.

Einleitung. — Die folgende Unsersuchung hat den Zweck, eine Theorie der sogenannten Bourdonschen Röhren zu entwickeln. Diese dünnwandigen Metallröhren werden, luftleer gepumpt, als Aneroidbarometer, mit Äther gefüllt, als Thermometer gebraucht. Sie haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sehr geringe, auf ihre äußere oder innere Oberfläche wirkende Drucke noch meßbare Deformationen hervorrufen. Ein Aneroidbarometer erlaubt noch Schwankungen des Luftdrucks zu messen, die nur einen Bruchteil von einem Millimeter

Quecksilberdruck betragen. Ein Millimeter Quecksilberdruck ist ein Druck von 13,6 Milligramm pro Quadratmillimeter; der Elastizitätsmodul der meisten Metalle entspricht einem Druck von 8000 bis 20000 Kilogramm pro Quadratmillimeter; der Quotient beider Drucke liegt also etwa zwischen $\frac{1}{6 \cdot 10^5}$ und $\frac{1}{15 \cdot 10^8}$, ist demnach außerordentlich klein. Eine cylindrische Röhre reagiert auf derartig geringe Drucke nicht mehr in meßbarer Weise; eine meßbare Deformation tritt nur bei gebogenen Röhren ein.

Um die in Rede stehende Theorie zu begründen, ist es notwendig, etwas weiter auszuholen. Ich beginne damit, die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie in allgemeine krummlinige Koordinaten zu transformieren. Im zweiten Teil werden diese Gleichungen dann auf den Fall angewendet, daß der betrachtete Körper eine dünne, gebogene Platte ist. Der dritte Teil beschäftigt sich mit den Röhren, die die Gestalt von Rotationsflächen haben.

Erster Teil.

Transformation der Elastizitätsgleichungen in allgemeine Koordinaten.

1. *Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie in kartesischen Koordinaten.* — Die Transformation der Elastizitätsgleichungen in allgemeine orthogonale Koordinaten ist zuerst von Lamé durchgeführt worden; einfachere Methoden wurden später von Carl Neumann, Borchardt und Beltrami angegeben. Für das Folgende ist es wünschenswert, nicht orthogonale, sondern ganz beliebige Koordinaten zu benützen. Die Invariantentheorie bietet die Mittel, diese Transformation mit sehr wenig Rechnung zu erledigen.

Es bedeute T die kinetische Energie des betrachteten Körpers, U das Potential der elastischen Kräfte, δM die Arbeit, welche die auf das Innere wirkenden äußeren Kräfte bei einer virtuellen Verschiebung leisten, $\delta(M)$ die Arbeit der Druckkräfte, die auf die Oberfläche wirken. Man erhält bekanntlich die Elastizitätsgleichungen auf Grund des Hamiltonschen Prinzips aus der Gleichung[1])

$$\int_{t_0}^{t_1} \partial t [\delta T + \delta U + \delta M + \delta(M)] = 0. \tag{1}$$

Hier bedeutet t die Zeit. Die virtuellen Verrückungen sind so zu wählen, daß sie für die Zeitpunkte $t = t_0$ und $t = t_1$ sämtlich verschwinden.

1) Vergl. Kirchhoff: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe; Crelles Journal Bd. 40, Gesammelte Abhandlungen S. 237.

Benützen wir zunächst ein System kartesischer Koordinaten x, y, z. Wir bezeichnen das Volumen des Körpers mit V, seine Oberfläche mit S, die Dichtigkeit mit k; die Komponenten der Verrückung eines Punktes des Körpers mit u, v, w, die Variationen derselben mit δu, δv, δw; die Komponenten der äußeren Kräfte, die auf einen Punkt im Innern wirken, mit A, B, C, die Komponenten des Druckes auf ein Element der Oberfläche mit (A), (B), (C).

In diesen Größen ausgedrückt haben die in (1) vorkommenden Größen die Werte

$$\delta M = \int_{(V)} [A\delta u + B\delta v + C\delta w]\,\partial V, \tag{2}$$

$$\delta(M) = \int_{(S)} [(A)\delta u + (B)\delta v + (C)\delta w]\,\partial S, \tag{3}$$

$$T = \frac{1}{2}\int_{(V)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] k\,\partial V. \tag{4}$$

Endlich ist unter der Voraussetzung, daß der Körper isotrop ist,

$$U = -K\int_{(V)} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \vartheta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2]\,\partial V, \tag{5}$$

wo λ_1, λ_2, λ_3 die Hauptdilatationen bezeichnen.

Die mechanische Bedeutung der Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten K und ϑ ergibt sich aus der Bemerkung: wird das eine Ende eines cylindrischen Stabes von der Länge l festgehalten, während auf das andere eine Zugkraft von der Größe P wirkt, so erfährt der Stab eine Verlängerung $l \cdot \frac{P}{2K}\frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}$; ein Linienelement, das auf der Achse des Stabes senkrecht steht, erfährt eine Verkürzung, die, in Bruchteilen der Verlängerung ausgedrückt, gleich $\frac{\vartheta}{1+2\vartheta}$ ist. Es ist somit der Elastizitätsmodul $E = 2K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}$ und der Quotient aus Längendilatation und Querkontraktion $\mu = \frac{\vartheta}{1+2\vartheta}$.

2. *Einführung allgemeiner Koordinaten.* — An Stelle der kartesischen Koordinaten x, y, z führen wir nun allgemeine Koordinaten p_1, p_2, p_3 ein. Wir setzen voraus, daß jeder Punkt des Körpers durch diese Koordinaten eindeutig bestimmt ist. Dies erfordert, daß die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(p_1,p_2,p_3)}$ für keinen Punkt des Körpers verschwindet. Wir nehmen an, die Bezeichnung sei so gewählt, daß diese Determinante positiv ist.

Für das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ergebe sich in den neuen Koordinaten der Ausdruck

$$ds^2 = \sum a_{\lambda\mu} dp_\lambda dp_\mu. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

Wir bezeichnen diese Differentialform mit F, ihre Determinante mit A, die dem Element $a_{\lambda\mu}$ adjungierte Unterdeterminante mit $A_{\lambda\mu}$. Die Form F habe innerhalb des betrachteten Gebietes durchweg den Charakter einer definiten, positiven quadratischen Form. Es kann also in keinem Punkte des Gebietes eine der Größen $a_{\lambda\lambda}$, $A_{\lambda\lambda}$, A verschwinden. Da

$$a_{\lambda\mu} = \frac{\partial x}{\partial p_\lambda}\frac{\partial x}{\partial p_\mu} + \frac{\partial y}{\partial p_\lambda}\frac{\partial y}{\partial p_\mu} + \frac{\partial z}{\partial p_\lambda}\frac{\partial z}{\partial p_\mu},$$

so ist die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(p_1,p_2,p_3)} = \sqrt{A}$, wo das Zeichen $\sqrt{}$ — wie im folgenden stets — die positive Quadratwurzel bedeutet.

Der Kosinus des Winkels, den die Richtung der wachsenden p_λ mit der Richtung der wachsenden p_μ bildet, ist $\frac{a_{\lambda\mu}}{\sqrt{a_{\lambda\lambda}a_{\mu\mu}}}$. Bei den Koordinatenflächen $p_\lambda = \text{const.}$ unterscheiden wir eine innere und eine äußere Seite. Als äußere Seite bezeichnen wir diejenige, die auf der Seite der wachsenden p_λ liegt. Der Kosinus des Winkels, den die nach außen gerichteten Normalen der Flächen $p_\lambda = \text{const.}$, $p_\mu = \text{const.}$ miteinander bilden, ist $\frac{A_{\lambda\mu}}{\sqrt{A_{\lambda\lambda}A_{\mu\mu}}}$.

Da die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(p_1,p_2,p_3)}$ nach Voraussetzung nicht verschwindet, kann man die Gleichungen ansetzen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} = \sum_{\nu=1}^{3} \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} \frac{\partial x}{\partial p_\nu}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} = \sum_{\nu=1}^{3} \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} \frac{\partial y}{\partial p_\nu}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} = \sum_{\nu=1}^{3} \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} \frac{\partial z}{\partial p_\nu}.$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

Offenbar ist $\left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} = \left\{ {\mu\lambda \atop \nu} \right\}$. Die Größen $\left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\}$ lassen sich durch die Größen $a_{\lambda\mu}$ und ihre ersten Derivierten ausdrücken. Multipliziert man nämlich die erste der vorstehenden Gleichungen mit $\frac{\partial x}{\partial p_\varkappa}$, die zweite mit $\frac{\partial y}{\partial p_\varkappa}$, die dritte mit $\frac{\partial z}{\partial p_\varkappa}$ und addiert, so ergibt sich

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial p_\lambda \partial p_\mu}\frac{\partial x}{\partial p_\varkappa} + \frac{\partial^2 y}{\partial p_\lambda \partial p_\mu}\frac{\partial y}{\partial p_\varkappa} + \frac{\partial^2 z}{\partial p_\lambda \partial p_\mu}\frac{\partial z}{\partial p_\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{3} \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} a_{\nu\varkappa}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[-\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\varkappa} + \frac{\partial a_{\lambda\varkappa}}{\partial p_\mu} + \frac{\partial a_{\mu\varkappa}}{\partial p_\lambda} \right]. \qquad (\lambda, \mu, \varkappa = 1, 2, 3)$$

An Stelle der Verrückungskomponenten u, v, w führen wir die Größen ein:

$$\xi_\lambda = \frac{\partial x}{\partial p_\lambda} u + \frac{\partial y}{\partial p_\lambda} v + \frac{\partial z}{\partial p_\lambda} w \tag{2} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

und gleichzeitig an Stelle der Kraftkomponenten A, B, C und der Druckkomponenten $(A), (B), (C)$ die Komponenten P_λ und (P_λ), die durch die Gleichungen definiert werden:

$$\delta M = \sum_{\lambda=1}^{3} P_\lambda \delta \xi_\lambda, \quad \delta(M) = \sum_{\lambda=1}^{3} (P_\lambda) \delta \xi_\lambda. \tag{3}$$

Die Gleichung (2) zeigt, daß $\frac{\xi_\lambda}{\sqrt{a_{\lambda\lambda}}}$ die Projektion der Verrückung eines Punktes auf die Richtung der wachsenden p_λ ist.

Setzen wir in der ersten Gleichung (3) $\delta \xi_2 = 0$, $\delta \xi_3 = 0$ und nehmen $\delta \xi_1$ positiv. Alsdann fällt die Richtung der virtuellen Verrückung, deren Komponenten die Größen $\delta u, \delta v, \delta w$ sind, mit der Richtung der nach außen gerichteten Normalen der Fläche $p_1 =$ const. zusammen, und die absolute Größe der Verrückung ist $\frac{\delta \xi_1}{\sqrt{a_{11}}}$. Da die bei dieser Verrückung geleistete Arbeit $= P_1 \delta \xi_1$ ist, so ist $P_1 \sqrt{a_{11}}$ die Projektion der Kraft, deren Komponenten die Größen A, B, C sind, auf die nach außen gerichtete Normale der Fläche $p_1 =$ const. Analog ist die mechanische Bedeutung der übrigen Größen P_λ und (P_λ) zu erklären.

Aus (2) folgt:

$$\xi_1 dp_1 + \xi_2 dp_2 + \xi_3 dp_3 = u dx + v dy + w dz.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Größen ξ_1, ξ_2, ξ_3 und dp_1, dp_2, dp_3 als kontragrediente Variable zu betrachten sind.

3. *Die Form* $du\,dx + dv\,dy + dw\,dz$. — Neben der Differentialform, die das Quadrat des Linienelementes darstellt, ist für die Elastizitätstheorie noch diejenige quadratische Differentialform von Bedeutung, durch die die Dilatation des Linienelementes bestimmt wird.

Es ist dies die Form

$$du\,dx + dv\,dy + dw\,dz = \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y} dy^2 + \frac{\partial w}{\partial z} dz^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) dy\,dz$$
$$+ 2 \cdot \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dz\,dx + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Der Ausdruck dieser Form in den neuen Koordinaten sei

$$\Phi = \sum \alpha_{\lambda\mu} dp_\lambda dp_\mu. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

Hier ist

$$(1)\quad \alpha_{\lambda\mu}=\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial p_\lambda}\frac{\partial x}{\partial p_\mu}+\frac{\partial v}{\partial p_\lambda}\frac{\partial y}{\partial p_\mu}+\frac{\partial w}{\partial p_\lambda}\frac{\partial z}{\partial p_\mu}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial p_\mu}\frac{\partial x}{\partial p_\lambda}+\frac{\partial v}{\partial p_\mu}\frac{\partial y}{\partial p_\lambda}+\frac{\partial w}{\partial p_\mu}\frac{\partial z}{\partial p_\lambda}\right)\right].$$

Aus den Gleichungen (vgl. **2.**, (2))

$$\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial p_\mu}=\frac{\partial u}{\partial p_\mu}\frac{\partial x}{\partial p_\lambda}+\frac{\partial v}{\partial p_\mu}\frac{\partial y}{\partial p_\lambda}+\frac{\partial w}{\partial p_\mu}\frac{\partial z}{\partial p_\lambda}+u\frac{\partial^2 x}{\partial p_\lambda \partial p_\mu}+v\frac{\partial^2 y}{\partial p_\lambda \partial p_\mu}+w\frac{\partial^2 z}{\partial p_\lambda \partial p_\mu}$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

folgt bei Berücksichtigung von **2.**, (1):

$$(2)\qquad \alpha_{\lambda\mu}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial p_\mu}+\frac{\partial \xi_\mu}{\partial p_\lambda}\right)-\sum_{\nu=1}^{3}\left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\}\xi_\nu. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

Wir stellen nun diejenigen Formen des durch die quadratischen Formen F und Φ bestimmten Systems zusammen, von denen im folgenden Gebrauch gemacht wird. Wir bezeichnen mit $\varDelta(\lambda) = \varDelta_3 - \varDelta_2\lambda + \varDelta_1\lambda^2 - \varDelta_0\lambda^3$ die Determinante der quadratischen Form $\Phi - \lambda F$. Hier ist offenbar $\varDelta_0 = A$. Mit G bezeichnen wir die Kontravariante der Form F, mit Ψ die simultane Kontravariante der Formen F und Φ, die in den Koeffizienten dieser beiden Formen linear ist. Es ist somit

$$G = \sum A_{\lambda\mu}\xi_\lambda\xi_\mu. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

Setzen wir

$$\Psi = \sum \beta_{\lambda\mu}\xi_\lambda\xi_\mu.$$

Hier ist

$$(3)\qquad \beta_{\lambda\mu}=\beta_{\mu\lambda}=\sum_{\nu=1}^{3}\sum_{\varkappa=1}^{3}\alpha_{\nu\varkappa}\frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial a_{\nu\varkappa}}. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

Die Kontravariante Ψ läßt sich auch definieren als Koeffizient von ϱ in der Entwickelung der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\varrho a_{11} & \alpha_{12}-\varrho a_{12} & \alpha_{13}-\varrho a_{13} & \xi_1 \\ \alpha_{12}-\varrho a_{12} & \alpha_{22}-\varrho a_{22} & \alpha_{23}-\varrho a_{23} & \xi_2 \\ \alpha_{13}-\varrho a_{13} & \alpha_{23}-\varrho a_{23} & \alpha_{33}-\varrho a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \end{vmatrix}$$

nach Potenzen von ϱ.

Zwischen den Formen $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, G und Ψ bestehen die leicht zu beweisenden Beziehungen

$$(4)\qquad \begin{cases} \varDelta_1 = \Sigma A_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}, & (\lambda, \mu = 1, 2, 3) \\ \dfrac{\partial \varDelta_1}{\partial \alpha_{\lambda\lambda}} = A_{\lambda\lambda},\ \dfrac{\partial \varDelta_1}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} = 2A_{\lambda\mu},\ \dfrac{\partial \varDelta_2}{\partial \alpha_{\lambda\lambda}} = \beta_{\lambda\lambda},\ \dfrac{\partial \varDelta_2}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} = 2\beta_{\lambda\mu}. & (\lambda \neq \mu) \end{cases}$$

Diejenigen Werte, die die Formen F, Φ, $\Delta(\lambda)$ u. s. w. annehmen, wenn an Stelle der allgemeinen Koordinaten p_1, p_2, p_3 die kartesischen Koordinaten x, y, z treten, mögen mit F', Φ', $\Delta'(\lambda)$ u. s. w. bezeichnet werden. Es ist also z. B.

$$F' = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad \Phi' = dudx + dvdy + dwdz.$$

4. *Ausdruck des Potentials der elastischen Kräfte und der kinetischen Energie in den neuen Koordinaten.* — Die Hauptdilatationen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ergeben sich als die Werte von λ, für die die Determinante der quadratischen Form $\Phi' - \lambda F'$ verschwindet, also als Wurzeln der Gleichung $\Delta'(\lambda) = 0$. Da $\Delta(\lambda) = A\Delta'(\lambda)$, so ist demnach

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\Delta_1}{A}, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \frac{\Delta_2}{A}.$$

Folglich

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \frac{\Delta_1^2}{A^2} - 2\frac{\Delta_2}{A}.$$

Es ist ferner

$$G(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = AG'(u, v, w),$$

also auch

$$G\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t}\frac{\partial \xi_2}{\partial t}\frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right) = AG'\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t}\right) = A\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right].$$

Endlich ist

$$\partial V = \sqrt{A}\,\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3.$$

Für das Potential der elastischen Kräfte ergibt sich somit der Ausdruck (s. **1**, 5)

$$U = -K\int\limits_{(V)}\left[(1+\vartheta)\frac{\Delta_1^2}{A^2} - 2\frac{\Delta_2}{A}\right]\sqrt{A}\,\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3$$

und die kinetische Energie ist (s. **1**, 4)

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{(V)}\left[\sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda\mu}\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial t}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t}\right]k\sqrt{A}\,\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3.$$

5. *Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie in allgemeinen Koordinaten.* — Aus dem Vorhergehenden ergibt sich (vergl. **3**, 4)

$$\delta U = -2K\int\limits_{(V)}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}\left[\left((1+\vartheta)\frac{\Delta_1}{A} - \beta_{\lambda\mu}\right)\delta\alpha_{\lambda\mu}\right]\frac{1}{\sqrt{A}}\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3.$$

Hier ist (**3**, 2)

$$\delta\alpha_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\delta\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial p_\mu} + \delta\frac{\partial \xi_\mu}{\partial p_\lambda}\right) - \sum_{\nu=1}^{3}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ \nu\end{Bmatrix}\delta\xi_\nu.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(1)\quad 2K\Big[(1+\vartheta)\frac{\Delta_1}{A}A_{\lambda\mu}-\beta_{\lambda\mu}\Big]=-N_{\lambda\mu}\,{\scriptstyle(\lambda,\mu=1,2,3)};\quad N_{\mu\lambda}=N_{\lambda\mu}$$

und erhalten:

$$(2)\quad \delta U=\int\limits_{(V)}\Big[\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}N_{\lambda\mu}\delta\frac{\partial\xi_\lambda}{\partial p_\mu}-\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ \nu\end{Bmatrix}N_{\lambda\mu}\delta\xi_\nu\Big]\frac{\partial p_1\partial p_2\partial p_3}{\sqrt{A}}.$$

Das rechts stehende Integral formen wir durch partielle Integration in bekannter Weise um.

Der Winkel, den die nach außen gerichteten Normalen der Flächen $p_\mu=$ const. und die Oberfläche S des Körpers mit einander bilden, werde mit ω_μ bezeichnet. An einer Stelle, an der die Richtung der wachsenden p_1 in den Körper eintritt, ist dieser Winkel stumpf und demgemäß ist

$$\sqrt{A_{11}}\,\partial p_2\partial p_3=-\cos\omega_1\partial S.$$

An einer Austrittstelle ist der Winkel ω_1 spitz und demgemäß ist daselbst

$$\sqrt{A_{11}}\,\partial p_2\partial p_3=+\cos\omega_1\partial S.$$

Demnach ist

$$\int\limits_{(V)}N_{\lambda1}\delta\frac{\partial\xi_\lambda}{\partial p^1}\frac{\partial p_1\partial p_2\partial p_3}{\sqrt{A}}=\int\limits_{(S)}\frac{N_{\lambda1}\cos\omega_1}{\sqrt{A_{11}A}}\delta\xi_\lambda\partial S-\int\limits_{(V)}\frac{\partial\frac{N_{\lambda1}}{\sqrt{A}}}{\partial p_1}\delta\xi_\lambda\partial p_1\partial p_2\partial p_3.$$

Zwei analoge Formeln ergeben sich durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3. Wir erhalten somit aus (2):

$$(3)\quad \delta U=\int\sum_{\lambda=1}^{3}\Big[\frac{N_{\lambda1}}{\sqrt{A_{11}}}\cos\omega_1+\frac{N_{\lambda2}}{\sqrt{A_{22}}}\cos\omega_2+\frac{N_{\lambda3}}{\sqrt{A_{33}}}\cos\omega_3\Big]\delta\xi_\lambda\cdot\frac{\partial S}{\sqrt{A}}$$

$$-\int\limits_{(V)}\sum_{\lambda=1}^{3}\left[\frac{\partial\frac{N_{\lambda1}}{\sqrt{A}}}{\partial p_1}+\frac{\partial\frac{N_{\lambda2}}{\sqrt{A}}}{\partial p_2}+\frac{\partial\frac{N_{\lambda3}}{\sqrt{A}}}{\partial p_3}+\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \lambda\end{Bmatrix}N_{\mu\nu}\right]\delta\xi_\lambda\partial p_1\partial p_2\partial p_3.$$

Es ist ferner (s. 4)

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta T\partial t=\int\limits_{t_0}^{t_1}\partial t\int\limits_{(V)}\Big[\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}A_{\lambda\mu}\frac{\partial\xi_\mu}{\partial t}\delta\frac{\partial\xi_\lambda}{\partial t}\Big]\frac{k}{\sqrt{A}}\partial p_1\partial p_2\partial p_3.$$

Da die Variationen $\delta\xi_\lambda$ für $t=t_0$ und $t=t_1$ verschwinden, so folgt hieraus durch partielle Integration

$$(4)\qquad \int_{t_0}^{t_1}\delta T\partial t = -\int_{t_0}^{t_1}\partial t\int_{(V)}\sum_{\lambda=1}^{3}\Big[\sum_{\mu=1}^{3}A_{\lambda\mu}\frac{\partial^2\xi_\mu}{\partial t^2}\cdot\delta\xi_\lambda\Big]\frac{k}{\sqrt{A}}\partial p_1\partial p_2\partial p_3.$$

Bei Benutzung der Gleichungen (3) und (4) dieses Artikels und der Gleichungen (3) der Nummer **2** erhalten wir nun aus der Grundgleichung der Elastizitätstheorie (**1**, 1) für das Innere des Körpers die Differentialgleichungen:

$$(5)\qquad \frac{k}{\sqrt{A}}\Big[A_{\lambda 1}\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}+A_{\lambda 2}\frac{\partial^2\xi_2}{\partial t^2}+A_{\lambda 3}\frac{\partial^2\xi_3}{\partial t^2}\Big]$$
$$= P_\lambda - \frac{\partial\frac{N_{\lambda 1}}{\sqrt{A}}}{\partial p_1} - \frac{\partial\frac{N_{\lambda 2}}{\sqrt{A}}}{\partial p_2} - \frac{\partial\frac{N_{\lambda 3}}{\sqrt{A}}}{\partial p_3} - \frac{1}{\sqrt{A}}\sum_{\mu,\nu}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \lambda\end{Bmatrix}N_{\mu\nu}\qquad (\lambda=1,2,3)$$

und für die Oberfläche die Bedingungen:

$$(6)\qquad \frac{1}{\sqrt{A}}\Big[\frac{N_{\lambda 1}}{\sqrt{A_{11}}}\cos\omega_1+\frac{N_{\lambda 2}}{\sqrt{A_{22}}}\cos\omega_2+\frac{N_{\lambda 3}}{\sqrt{A_{33}}}\cos\omega_3\Big] = -(P)_\lambda.\qquad (\lambda=1,2,3)$$

Hier bedeuten $\sqrt{a_{11}}\,(P_1)$, $\sqrt{a_{22}}\,(P_2)$, $\sqrt{a_{33}}\,(P_3)$ die Projektionen des auf die Oberfläche wirkenden Druckes auf die nach außen gerichteten Normalen der Flächen $p_1=\text{const.}$, $p_2=\text{const.}$, $p_3=\text{const.}$ (vergl. die Bemerkung zu **2**, 3).

6. *Mechanische Bedeutung der Größen* $N_{\lambda\mu}$. — Die im vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen gelten auch für einen beliebigen Teil V_0 des Gesamtvolumens V des Körpers. An Stelle der Komponenten (P_1), (P_2), (P_3) des Drucks auf die Oberfläche treten in diesem Fall die Komponenten des Druckes, den V_0 von dem übrigen Teil des Körpers erfährt. Nehmen wir an, ein Teil der Oberfläche des Volumens V_0 falle mit einer Fläche $p_\mu=\text{const.}$ zusammen, derart, daß sich die Außenseite der ersteren Fläche mit der Innenseite der letzteren deckt, und bezeichnen wir mit $\Pi_{\mu 1}$, $\Pi_{\mu 2}$, $\Pi_{\mu 3}$ die Werte, die die Größen (P_1), (P_2), (P_3) in diesem Fall annehmen. Es bedeutet also $\sqrt{a_{\lambda\lambda}}\,\Pi_{\mu\lambda}$ die Projektion des Druckes, den die Innenseite der Fläche $p_\mu=\text{const.}$ erfährt, auf die nach außen gerichtete Normale der Fläche $p_\lambda=\text{const.}$ Die Kosinus $\cos\omega_1$ $\cos\omega_2$ $\cos\omega_3$ erhalten in diesem Fall die Werte (vergl. den vorigen Artikel und Artikel 2):

$$-\frac{A_{\mu 1}}{\sqrt{A_{11}A_{\mu\mu}}}\quad -\frac{A_{\mu 2}}{\sqrt{A_{22}A_{\mu\mu}}}\quad -\frac{A_{\mu 3}}{\sqrt{A_{33}A_{\mu\mu}}},$$

und es ergibt mit sich aus Gleichung (6) des vorigen Artikels:

$$\frac{1}{\sqrt{A_{\mu\mu}A}}\left[\frac{A_{\mu 1}}{A_{11}}N_{\lambda 1}+\frac{A_{\mu 2}}{A_{22}}N_{\lambda 2}+\frac{A_{\mu 3}}{A_{33}}N_{\lambda 3}\right]=\Pi_{\mu\lambda}. \qquad (\lambda\ \mu=1,2,3)$$

Zweiter Teil.

Anwendung auf den Fall gekrümmter dünner Platten.

7. *Geometrische Definition des Körpers.* — Wir nehmen nun an, der betrachtete Körper sei eine dünne Platte, die die Gestalt einer gekrümmten, nicht abwickelbaren Fläche hat.

Um die Gestalt des Körpers geometrisch zu definieren, gehen wir von einer „Mittelfläche“ S_0 aus, die geschlossen oder von einer Randkurve L begrenzt sein kann.

Wie bei allen hier in Betracht kommenden Flächen, wird auch bei S_0 eine Außen- und eine Innenseite unterschieden.

Wir nehmen sodann zwei Parallelflächen S_+ und S_- zur Fläche S_0 an, von denen die erstere auf der äußeren, die letztere auf der inneren Seite von S_0 verläuft, und die beide denselben Abstand ε von S_0 besitzen. Sofern die Mittelfläche geschlossen ist, bilden die beiden Flächen S_+ und S_- die vollständige Begrenzung des Körpers; ist dies nicht der Fall, so denken wir längs der Randkurve L die Normalen der Fläche S_0 errichtet. Der Flächenstreifen R, den die zwischen S_+ und S_- liegenden Normalenstücke bilden, vervollständigt die Begrenzung des Körpers.

Wir nehmen an, die Mittelfläche sei stetig gekrümmt, also insbesondere frei von Kanten und Spitzen.

8. *Spezialisierung des Koordinatensystems.* — Um einen Punkt der Mittelfläche festzulegen, benützen wir in üblicher Weise Parameter p_1, p_2; es wird vorausgesetzt, daß jeder Punkt der Mittelfläche durch die zugehörigen Parameterwerte *eindeutig* bestimmt ist. Um die Lage eines beliebigen Punktes des Körpers zu bestimmen, führen wir noch den Abstand p_3 des Punktes von der Mittelfläche ein. Er werde als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem der Punkt auf der äußeren oder der inneren Seite der Mittelfläche liegt.

Bezeichnen wir mit x, y, z die kartesischen Koordinaten eines beliebigen Punktes des Körpers, mit x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Fußpunktes der durch ihn gehenden Normalen an die Mittelfläche, mit X, Y, Z die Richtungskosinus der nach außen gerichteten Normalen der Mittelfläche.

Für das Quadrat des Linienelementes ergibt sich – da

$$X dx_0 + Y dy_0 + Z dz_0 = 0 \text{ u. } X dX + Y dY + Z dZ = 0 \text{ —}$$

ein Ausdruck der Form:

$$(1)\ [a_{11}^{(0)} dp_1^2 + 2a_{12}^{(0)} dp_1 dp_2 + a_{22}^{(0)} dp_2^2] + 2[c_{11} dp_1^2 + 2c_{12} dp_1 dp_2 + c_{22} dp_2^2] p_3$$
$$+ [b_{11} dp_1^2 + 2b_{12} dp_1 dp_2 + b_{22} dp_2^2] p_3^2 + dp_3^2.$$

Die erste quadratische Form links stellt das Quadrat des Linienelementes der Mittelfläche, die in p_3^2 multiplizierte Form das Quadrat des Linienelementes der Gaußschen Kugel dar. Die Größen $c_{\lambda\mu}$ sind die sogenannten „Fundamentalgrößen zweiter Ordnung" der Mittelfläche.[1])

In den allgemeinen Formeln der Art. I—IV hat man daher im vorliegenden Fall $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$ zu setzen. Daraus folgt:

$$(2) \qquad A_{11} = a_{22},\ A_{22} = a_{11},\ A_{12} = -a_{12},\ A_{13} = 0,\ A_{23} = 0,$$
$$A_{33} = A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2.$$

Bezüglich der in Art. 2 eingeführten Größen $\left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\}$ reicht es für die hier verfolgten Zwecke hin zu bemerken: Da (s. Art. 8.)

$$\frac{\partial x}{\partial p_3} = X,\ \frac{\partial y}{\partial p_3} = Y,\ \frac{\partial z}{\partial p_3} = Z,\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

so ist

$$X \frac{\partial^2 x}{\partial p_\mu \partial p_3} + Y \frac{\partial^2 y}{\partial p_\mu \partial p_3} + Z \frac{\partial^2 z}{\partial p_\mu \partial p_3} = 0,$$

folglich

$$\left\{ {\mu 3 \atop 3} \right\} = 0 \text{ für } \mu = 1, 2, 3.$$

Die Größen $\left\{ {12 \atop \nu} \right\}$, $\left\{ {23 \atop \nu} \right\}$ $(\nu = 1, 2)$ kommen im folgenden nicht in Betracht. Was endlich die Größen $\left\{ {\lambda\mu \atop 1} \right\}$, $\left\{ {\lambda\mu \atop 2} \right\}$, $\left\{ {\lambda\mu \atop 3} \right\}$ $(\lambda, \mu = 1, 2)$ betrifft, so treten im folgenden nur die Werte derselben auf, die auf der Mittelfläche stattfinden, die also dem Wert $p_3 = 0$ entsprechen. Diese Werte sind durch die Gleichungen definiert

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 x_0}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop 1} \right\} \frac{\partial x_0}{\partial p_1} + \left\{ {\lambda\mu \atop 2} \right\} \frac{\partial x_0}{\partial p_2} + \left\{ {\lambda\mu \atop 3} \right\} X, \quad (\lambda, \mu = 1, 2)$$

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop 1} \right\} \frac{\partial y_0}{\partial p_1} + \left\{ {\lambda\mu \atop 2} \right\} \frac{\partial y_0}{\partial p_2} + \left\{ {\lambda\mu \atop 3} \right\} Y,$$

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop 1} \right\} \frac{\partial z_0}{\partial p_1} + \left\{ {\lambda\mu \atop 2} \right\} \frac{\partial z_0}{\partial p_2} + \left\{ {\lambda\mu \atop 3} \right\} Z.$$

---

1) Vgl. Knoblauch, Einleitung in die Theorie der krummen Flächen S. 24.

Diese Gleichungen zeigen, daß für $p_3 = 0$ die Größen $\left\{ {\lambda\mu \atop 3} \right\}$ die negativ genommenen Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Mittelfläche sind, daß also $\left\{ {\lambda\mu \atop 3} \right\} = - c_{\lambda\mu}$ für $p_3 = 0$. Die dem Wert $p_3 = 0$ entsprechenden Werte der Größen $\left\{ {\lambda\mu \atop 3} \right\}$ $(\lambda, \mu, \nu = 1, 2)$ sind die bekannten Christoffelschen Verbindungen.[1])

Die Winkel ω_1, ω_2, ω_3, welche die nach außen gerichtete Normale der Oberfläche des Körpers mit den nach außen gerichteten Normalen der Flächen $p_1 = \text{const.}$, $p_2 = \text{const.}$, $p_3 = \text{const.}$ bildet, erhalten im vorliegenden Fall die Werte:

längs der äußeren Fläche S_+: $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$ 0,

„ „ inneren „ S_-: $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$ π,

„ „ Randfläche R : ω_1 ω_2 $\frac{\pi}{2}$.

Die Bedingungen für die Oberfläche (Nr. 5, 6) lauten somit im vorliegenden Fall:

$$(4) \quad \begin{aligned} &\text{längs } S_+ : N_{\lambda 3} = - A(P_\lambda^+), \\ &\quad „ \quad S_- : N_{\lambda 3} = + A(P_\lambda^-), \\ &\quad „ \quad R : \frac{N_{\lambda 1}}{\sqrt{a_{22}}} \cos \omega_1 + \frac{N_{\lambda 2}}{\sqrt{a_{11}}} \cos \omega_2 = - \sqrt{A}\, (P_\lambda^{(R)}) \quad (\lambda = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Hier bedeuten $\sqrt{a}(P_1^+)$, $\sqrt{a}(P_2^+)$, (P_3^+) die Projektionen des äußeren Drucks, der auf die Fläche S_+ wirkt, auf die nach außen gerichteten Normalen der Flächen $p_1 = \text{const.}$, $p_2 = \text{const.}$ und $p_3 = \text{const.}$ oder S_0. Die Bedeutung der Größen (P_λ^-) und $(P_\lambda^{(R)})$ ist hierdurch ohne weiteres klar.

Wirken auf die Flächen S_+ und S_- Druckkräfte im engeren Sinne des Wortes (nicht *Zug*kräfte), so ist (P_3^+) negativ, (P_3^-) positiv.

9. *Einführung beschränkender Voraussetzungen.* — Wir machen nun von der Annahme Gebrauch, daß die Dicke 2ε der betrachteten Platte sehr klein ist. Dabei halten wir durchweg an der Voraussetzung fest, daß die Verschiebungskomponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ihre Derivierten erster und zweiter Ordnung nach den Koordinaten — und dementsprechend die Spannungskomponenten und ihre Derivirten — auch dann noch als stetige Funktionen betrachtet werden dürfen, wenn wir ε als unendlich

1) Vgl. z. B. Knoblauch a. a. O. S. 172.

kleine Größe erster Ordnung betrachten. Mit anderen Worten: wir schließen den Fall aus, daß die Verschiebungskomponenten oder ihre Derivierten erster und zweiter Ordnung bis zur Größenordnung $\frac{1}{\varepsilon}$ ansteigen.

Hierzu ist zu bemerken: die Voraussetzung, daß die Komponenten der Spannung, die im Innern des Körpers herrscht, sehr klein sind und sich überall nach der Stetigkeit ändern, bedingt allerdings, daß die Komponenten der Verrückungen und ihre ersten Derivierten nach den Koordinaten sehr klein sind, aber sie schließt nicht aus, daß in Teilen des Körpers der Quotient aus der Richtungsderivierten einer Spannungskomponente und der Komponente selbst (die logarithmische Richtungsderivierte der Spannungskomponente) die Größenordnung $\frac{1}{\varepsilon}$ erreicht.

Es steht vielmehr a priori gar nicht fest, ob die Annahme, daß dies nicht eintrete, überhaupt zulässig ist.

Im folgenden wird sich herausstellen, daß diese Annahme für gewisse Formen der Platte zulässig ist, für andere nicht.

Die Größen $\alpha_{\mu\nu}$ — und dementsprechend natürlich auch die Hauptdilatationen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — sind nach unseren Voraussetzungen mindestens unendlich kleine Größen erster Ordnung. Es kann jedoch der Fall eintreten, daß diese Größen $\alpha_{\mu\nu}$ sämtlich unendlich klein von der zweiten Ordnung sind, während die Derivierten nach der Richtung der Normalen der Mittelfläche bis zur ersten Größenordnung ansteigen. Denkt man sich die Größe $\alpha_{\mu\nu}$ in eine nach Potenzen von p_3 fortschreitende Reihe entwickelt

$$\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu}^{(0)} + \alpha'_{\mu\nu} p_3 + \tfrac{1}{2}\alpha''_{\mu\nu} p_3^2 + \cdots$$

so kann man, wenn $\alpha_{\mu\nu}^{(0)}$ eine Größe erster Ordnung ist, die Glieder $\alpha'_{\mu\nu} p_3$, $\frac{1}{2}\alpha''_{\mu\nu} p_3^2$ und ebenso alle folgenden als unendlich kleine Größen höherer Ordnung gegen das erste vernachlässigen. Wenn dagegen $\alpha_{\mu\nu}^{(0)}$ unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, muß das zweite Glied $\alpha'_{\mu\nu} p_3$ beibehalten werden. Es ist sonach ersichtlich, daß die beiden Fälle eine ganz verschiedene Behandlung erfordern.

Im folgenden beschränke ich mich auf den Fall, daß die Größen $\alpha_{\mu\nu}$ kleine Größen erster Ordnung sind, und behalte mir vor, auf den zweiten Fall bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen.

Wir machen ferner zwei vereinfachende Voraussetzungen, die in den praktisch in Betracht kommenden Fällen zulässig sind: wir sehen ab von äußeren Kräften, die auf das Innere des Körpers wirken, vernachlässigen also die Schwere; und wir nehmen zweitens an, daß auf jede der beiden Oberflächen der Platte S_+ und S_- nur ein normaler

konstanter Druck wirkt. Sofern zur Begrenzung des Körpers noch eine Randfläche R gehört, so setzen wir voraus, daß der Druck, der auf ein Element von R wirkt, auf der Normalen der Mittelfläche S_0 senkrecht steht, die durch das Flächenelement hindurch geht.

10. *Folgerungen aus den eingeführten Voraussetzungen.* — Nach Voraussetzung sind die Schwankungen, die die Werte der Funktionen ξ_λ, $\alpha_{\lambda\mu}$, $N_{\lambda\mu}$ erfahren, wenn man längs einer Normalen der Mittelfläche S_0 fortschreitet, als unendlich kleine Größen höherer Ordnung zu betrachten. Daraus folgt zunächst: man kann den Wert einer dieser Funktionen in einem beliebigem Punkt der Normalen durch den Wert ersetzen, der im entsprechenden Punkt der Mittelfläche stattfindet. Sodann ist bezüglich der Funktionen N_{13}, N_{23}, N_{33} zu bemerken: Da nach Voraussetzung auf die Flächen S_+ und S_- ein normaler, konstanter Druck wirkt, so hat man in den Formeln 8, 4 (P_1^+), (P_2^+), (P_1^-), (P_2^-) gleich Null zu setzen. Die Drucke (P_3^+) und (P_3^-) sind konstant. Die Größen $-(P_3^+)$ und (P_3^-) können sich nur um eine zu vernachlässigende Größe unterscheiden. Wir setzen zur Vereinfachung der Bezeichnung:

$$-(P_3^+) = (P_3^-) = (P).$$

(P) ist positiv oder negativ, je nachdem auf die Flächen S_+ und S_- ein Druck wirkt oder ein Zug.

Wenn auch die Größe $(P_3^+) + (P_3^-)$ im allgemeinen zu vernachlässigen ist, so kann doch — wegen der Kleinheit von ε — der Quotient $-\frac{(P_3^+) + (P_3^-)}{2\varepsilon}$ einen Wert besitzen, der *nicht* vernachlässigt werden darf. Dieser Wert möge mit Q bezeichnet werden. Die Konstante Q ist positiv oder negativ, je nachdem auf die äußere oder innere Fläche der größere Druck wirkt (vergl. die Bemerkung am Schluß des Art. 8).

Auf Grund der vorausgesetzten Stetigkeit der Größen $N_{\lambda\mu}$ und ihrer Derivierten gelten für jeden Punkt des Körpers näherungsweise die Gleichungen (s. 8, 4 u. 1)

$$(1) \qquad N_{13} = 0,\ N_{23} = 0,\ N_{33} = (a_{11}^{(0)} a_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)2})\,(P).$$

Mit demselben Grad der Annäherung kann man den Differentialquotienten $\frac{\partial N_{3\lambda}}{\partial p_3}$ durch den Quotienten ersetzen:

$$\frac{N_{3\lambda}^+ - N_{3\lambda}^-}{2\varepsilon} = \frac{-A^+(P_\lambda^+) - A^-(P_\lambda^-)}{2\varepsilon} = \frac{A^+ - A^-}{2\varepsilon}(P^-) - A^+\frac{(P_\lambda^+) + (P_\lambda^-)}{2\varepsilon}.$$

Demnach ist $\frac{\partial N_{13}}{\partial p_3} = 0$, $\frac{\partial N_{23}}{\partial p_3} = 0$. In dem für $\frac{\partial N_{33}}{\partial p_3}$ geltenden Näherungs-

wert darf der Quotient $\frac{A^+_4 - A^-}{2\varepsilon}$ durch den für die Mittelfläche berechneten Wert des Differentialquotienten $\frac{\partial A}{\partial p}$ ersetzt werden, dieser Wert ist (8, 1)

$$= a^{(0)}_{11} c_{22} + a^{(0)}_{22} c_{11} - 2 a^{(0)}_{12} c_{12}.$$

Wir erhalten somit den Näherungswert

$$\frac{\partial N_{33}}{\partial p_3} = (a^{(0)}_{11} c_{22} + a^{(0)}_{22} c_{11} - 2 a^{(0)}_{12} c_{12}) (P) + (a^{(0)}_{11} a^{(0)}_{22} - a^{(0)2}_{12}) Q,$$

und hieraus ergibt sich der Näherungswert

$$\frac{\partial \frac{N_{33}}{\sqrt{A}}}{\partial p_3} = \frac{1}{\sqrt{a^{(0)}_{11} a^{(0)}_{22} - a^{(0)2}_{12}}} \left[\tfrac{1}{2} (a^{(0)}_{11} c_{22} + a^{(0)}_{22} c_{11} - 2 a^{(0)}_{12} c_{12}) (P) + (a^{(0)}_{11} a^{(0)}_{22} - a^{(0)2}_{12}) Q\right].$$

Die im vorangehenden als zulässig erwiesenen Vereinfachungen sind nun in die Gleichungen (5) u. (6) des Art. 5 einzuführen.

Es ist zweckmäßig, gleichzeitig eine Vereinfachung in den Bezeichnungen eintreten zu lassen. Mit $x, y, z, u, v, w, a_{\lambda\mu}, \alpha_{\lambda\mu}, N_{\lambda\mu}, \mathfrak{k}_\lambda$ sollen im folgenden *die* Werte der genannten Funktionen bezeichnet werden, die sie für $p_3 = 0$ annehmen. Diese Größen werden also hinfort als Funktionen des Ortes auf der Mittelfläche betrachtet. Die Determinante der quadratischen Binärformen

$$a_{11} dp_1^2 + 2 a_{12} dp_1 dp_2 + a_{22} dp_2^2 \text{ und } c_{11} dp_1^2 + 2 c_{12} dp_1 dp_2 + c_{22} dp_2^2$$

bezeichnen wir mit a beziehungsweise c, ihre simultane Invariante mit (a, c). Analog bezeichnen wir mit (a, α) die simultane Invariante der Binärformen $a_{11} dp_1^2 + \cdots$ und $\alpha_{11} dp_1^2 + \cdots$ An Stelle der Größen $N_{11} N_{12} N_{22}$, die ursprünglich als Koeffizienten einer simultanen Kontravariante zweier Ternärformen definiert waren (Nr. 3 u. 5), führen wir die Größen $\gamma_{11} = N_{22}, \gamma_{22} = N_{11}, \gamma_{12} = - N_{12}$ ein, die als Koeffizienten einer simultanen Kovariante der beiden Binärformen $a_{11} dp_1^2 + \cdots$ und $\alpha_{11} dp_1^2 + \cdots$ zu betrachten sind.

Aus der Gleichung (5, 1)

$$2K\left[(1 + \vartheta) \frac{\Delta_1}{A} A_{\lambda\mu} - \beta_{\lambda\mu}\right] = - N_{\lambda\mu}$$

folgt nun zunächst wegen

$$A_{13} = 0, \; A_{23} = 0, \; A = A_{33} = a, \; N_{13} = 0, \; N_{23} = 0, \; N_{33} = a\,(P)$$

(vgl. 8, 2 u. Gleichung (1) dieses Art.)

$$\beta_{13} = 0, \quad \beta_{23} = 0,$$

$$2K\,[(1+\vartheta)\,\Delta_1 - \beta_{33}] = -\,a\,(P).$$

Nun ist

$$\Delta_1 = \sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu} = (a, \alpha) + a\alpha_{33}.$$

Folglich

$$\beta_{33} = \frac{(P)}{2K}\,a + (1+\vartheta)\,((a,\alpha) + a\alpha_{33}). \tag{3}$$

Andererseits ergeben sich für die Größen $\beta_{\lambda\mu}$ aus ihrer Definition (3, 3) die Ausdrücke:

$$\beta_{11} = a_{22}\alpha_{33} + \alpha_{22}, \quad \beta_{22} = a_{11}\alpha_{33} + \alpha_{11}, \quad \beta_{12} = -\,a_{12}\alpha_{33} - \alpha_{12},$$

$$\beta_{13} = a_{12}\alpha_{23} - a_{22}\alpha_{13}, \quad \beta_{23} = a_{12}\alpha_{13} - a_{11}\alpha_{23}, \quad \beta_{33} = (a, \alpha).$$

Wegen

$$\beta_{13} = 0,\ \beta_{23} = 0 \quad \text{ist auch} \quad \alpha_{13} = 0,\ \alpha_{23} = 0.$$

Setzt man den eben gefundenen Wert von β_{33} in die Gleichung (3) ein, so folgt:

$$\alpha_{33} = -\,\frac{1}{1+\vartheta}\,\frac{(P)}{2K} - \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\,\frac{(a,\alpha)}{a}$$

und hieraus

$$\frac{\Delta_1}{A} = \frac{(a,\alpha)}{a} + \alpha_{33} = -\,\frac{1}{1+\vartheta}\,\frac{(P)}{2K} + \frac{1}{1+\vartheta}\,\frac{(a,\alpha)}{a}.$$

Nunmehr folgt aus den Gleichungen (5, 1) durch eine einfache Rechnung:

$$\gamma_{\lambda\mu} = 2K\left[\alpha_{\lambda\mu} + \left(\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\,\frac{(P)}{2K} - \frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\,\frac{(a,\alpha)}{a}\right)a_{\lambda\mu}\right]. \qquad (\lambda,\mu = 1, 2) \tag{4}$$

Für die Spannungen, die längs der Mittelfläche herrschen, ergeben sich aus Art. VI die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}
\sqrt{a_{11}}\,\Pi_{11} &= \frac{1}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}\,a}}\,[a_{11}\gamma_{22} + a_{12}\gamma_{12}],\\
\sqrt{a_{22}}\,\Pi_{22} &= \frac{1}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}\,a}}\,[a_{22}\gamma_{11} + a_{12}\gamma_{12}],\\
\sqrt{a_{11}}\,\Pi_{12} &= \frac{1}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}\,a}}\,[a_{11}\gamma_{12} + a_{12}\gamma_{11}],\\
\sqrt{a_{22}}\,\Pi_{21} &= \frac{1}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}\,a}}\,[a_{22}\gamma_{12} + a_{12}\gamma_{22}].
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Die mechanische Bedeutung der Größen $\Pi_{\lambda\mu}$ läßt sich nunmehr in folgender Weise aussprechen:

$\sqrt{a_{\lambda\lambda}}\,\Pi_{\mu\lambda}$ bedeutet die Projektion des Drucks, den die auf der Innenseite der Kurve $p_\mu =$ const. liegende Fläche von außen her erfährt, auf die nach außen gerichtete, die Mittelfläche berührende Normale der Kurve $p_\lambda =$ const. Als Außenseite der Kurve $p_\mu =$ const. ist die Seite zu betrachten, nach der hin die Koordinate p_μ wächst.

11. *Die Grundgleichungen des Problems.* — In den Gleichungen der Elastizitätstheorie (5, 5 u. 6) haben wir nun folgende Substitutionen vorzunehmen:

$$A_{11} = a_{22},\ A_{12} = -a_{12},\ A_{22} = a_{11},\ A_{13} = 0,\ A_{23} = 0,\ A_{33} = A = a,$$

$$\begin{Bmatrix}11\\3\end{Bmatrix} = -c_{11},\ \begin{Bmatrix}12\\3\end{Bmatrix} = -c_{12},\ \begin{Bmatrix}22\\3\end{Bmatrix} = -c_{22},\ \begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix} = 0,\ \begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix} = 0,\ \begin{Bmatrix}33\\3\end{Bmatrix} = 0,$$

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ P_3 = 0,$$

$$N_{11} = \gamma_{22},\ N_{12} = -\gamma_{12},\ N_{22} = \gamma_{11},\ N_{13} = 0,\ N_{23} = 0,\ \frac{\partial N_{13}}{\partial p_3} = 0,\ \frac{\partial N_{23}}{\partial p_3} = 0,$$

$$N_{33} = a\,(P),\ \frac{\partial \frac{N_{33}}{\sqrt{a}}}{\partial p_3} = \frac{1}{2}\frac{(a, c)}{\sqrt{a}}(P) + \sqrt{a}\,Q\cdot$$

Es ergibt sich

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{a}\left[a_{22}\dfrac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2} - a_{12}\dfrac{\partial^2\xi_2}{\partial t^2}\right] = -\dfrac{1}{\sqrt{a}}\left[\dfrac{\partial\frac{\gamma_{22}}{\sqrt{a}}}{\partial p_1} - \dfrac{\partial\frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a}}}{\partial p_2}\right. \\ \qquad \left. + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\gamma_{22}}{\sqrt{a}} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\gamma_{12}}{\sqrt{a}} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\gamma_{11}}{\sqrt{a}}\right], \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{a}\left[a_{11}\dfrac{\partial^2\xi_2}{\partial t^2} - a_{12}\dfrac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}\right] = -\dfrac{1}{\sqrt{a}}\left[\dfrac{\partial\frac{\gamma_{11}}{\sqrt{a}}}{\partial p_2} - \dfrac{\partial\frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a}}}{\partial p_1}\right. \\ \qquad \left. + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\gamma_{22}}{\sqrt{a}} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\gamma_{12}}{\sqrt{a}} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\gamma_{11}}{\sqrt{a}}\right]. \end{cases}$$

$$(3)\quad k\frac{\partial^2\xi_3}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\frac{(a, c)}{a}(P) - Q + \frac{(c, \gamma)}{a}.$$

Sofern die Mittelfläche nicht geschlossen ist, treten hierzu noch die Randbedingungen (vergl. 8, 4)

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\left[\ \dfrac{\cos\omega_1}{\sqrt{a_{22}}}\gamma_{11} - \dfrac{\cos\omega_2}{\sqrt{a_{11}}}\gamma_{12}\right] = -(P_1^{(R)}), \\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\left[-\dfrac{\cos\omega_1}{\sqrt{a_{22}}}\gamma_{12} + \dfrac{\cos\omega_2}{\sqrt{a_{11}}}\gamma_{22}\right] = -(P_2^{(R)}). \end{cases}$$

Hier bedeutet ω_1 den Winkel, den die nach außen gerichtete, die Mittelfläche berührende Normale der Randkurve mit der nach der Seite

der wachsenden p_1 gerichteten, die Mittelfläche berührenden Normalen der Kurve $p_1 = \text{const.}$ bildet. Eine analoge Bedeutung hat ω_2.

Den Zusammenhang zwischen den Größen $\gamma_{\lambda\mu}$ und den Verrückungen vermitteln die Gleichungen (10, 4 und 3, 1 u. 2)

$$\gamma_{\lambda\mu} = 2K\left[\alpha_{\lambda\mu} + \left(\frac{(P)}{2K}\frac{\vartheta}{1+\vartheta} - \frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\frac{(a,\alpha)}{a}\right)a_{\lambda\mu}\right] \quad (\lambda, \mu = 1, 2) \tag{5}$$

und

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial p_\lambda}\frac{\partial x}{\partial p_\mu} + \frac{\partial v}{\partial p_\lambda}\frac{\partial y}{\partial p_\mu} + \frac{\partial w}{\partial p_\lambda}\frac{\partial z}{\partial p_\mu}\right) \\ \quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial p_\mu}\frac{\partial x}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial v}{\partial p_\mu}\frac{\partial y}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial w}{\partial p_\mu}\frac{\partial z}{\partial p_\lambda}\right) \\ \quad = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial p_\mu}\right) - \left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\1\end{matrix}\right\}\xi_1 - \left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\2\end{matrix}\right\}\xi_2 + c_{\lambda\mu}\xi_3. \end{cases} \tag{6}$$

Aus (5) folgt:

$$\frac{(a,\gamma)}{a} = \frac{2\vartheta}{1+\vartheta}(P) - 2K\frac{1+3\vartheta}{1+\vartheta}\frac{(a,\alpha)}{a}$$

und hieraus

$$\frac{(a,\alpha)}{a} = \frac{2\vartheta}{1+3\vartheta}\frac{(P)}{2K} - \frac{1}{2K}\frac{1+\vartheta}{1+3\vartheta}\frac{(a,\gamma)}{a}.$$

Demnach ist

$$\alpha_{\lambda\mu} = \frac{1}{2K}\left[\gamma_{\lambda\mu} - \frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}\frac{(a,\gamma)}{a}a_{\lambda\mu} + \frac{\vartheta}{1+3\vartheta}(P)a_{\lambda\mu}\right]. \tag{7}$$

Die Ausdrücke, die, negativ genommen, die rechten Seiten der Gleichungen (1) und (2) bilden, hat Weingarten mit $\gamma_a(p_1)$ beziehungsweise $\gamma_a(p_2)$ bezeichnet. Er beweist, daß diese Ausdrücke wie die Differentiale dp_1, dp_2 transformiert werden, was auch aus der hier durchgeführten Entwicklung hervorgeht. Er beweist ferner, daß die beiden Ausdrücke verschwinden, wenn man $\gamma_{\lambda\mu}$ durch $a_{\lambda\mu}$ oder durch $c_{\lambda\mu}$ ersetzt.

Man kann den Ausdrücken $\gamma_a(p_1)$ und $\gamma_a(p_2)$ eine für manche Anwendung bequemere Form geben.

Beachtet man nämlich daß[1])

$$a_{11}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + a_{12}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_1}, \qquad a_{12}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + a_{22}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial a_{12}}{\partial p_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_2},$$

$$a_{11}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + a_{12}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_2}, \qquad a_{12}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + a_{22}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial p_1},$$

$$a_{11}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} + a_{12}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial a_{12}}{\partial p_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial p_1}, \quad a_{12}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} + a_{22}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_{22}}{\partial p_2},$$

1) Vergl. Knoblauch a. a. O. S. 170 u. f.

so ergibt sich:

$$a_{11}\gamma_a(p_1)+a_{12}\gamma_a(p_2)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{a_{11}\gamma_{22}-a_{12}\gamma_{12}}{\sqrt{a}}\right)-\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{a_{11}\gamma_{12}-a_{12}\gamma_{11}}{\sqrt{a}}\right)\right]$$

$$(8)\qquad -\frac{1}{2a}\left[\gamma_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_1}+\gamma_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial p_1}-2\gamma_{12}\frac{\partial a_{12}}{\partial p_1}\right],$$

$$a_{12}\gamma_a(p_1)+a_{22}\gamma_a(p_2)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{a_{22}\gamma_{11}-a_{12}\gamma_{12}}{\sqrt{a}}\right)-\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{a_{22}\gamma_{12}-a_{12}\gamma_{22}}{\sqrt{a}}\right)\right]$$

$$(9)\qquad -\frac{1}{2a}\left[\gamma_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_2}+\gamma_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial p_2}-2\gamma_{12}\frac{\partial a_{12}}{\partial p_2}\right].$$

12. *Bedingungen für das Gleichgewicht.* — Auf die Theorie der Schwingungen gehe ich nicht weiter ein, sondern beschränke mich darauf, die Bedingungen für das Gleichgewicht genauer zu untersuchen.

Für den Fall des Gleichgewichts erhalten die ersten 3 Gleichungen des vorigen Artikels die Form:

$$\gamma_a(p_1)=0,\quad \gamma_a(p_2)=0,$$

$$\frac{(c,\gamma)}{a}=\frac{1}{2}\frac{(a,c)}{a}(P)+Q.$$

Wir denken uns nun die wirklich eintretende Deformation durch Superposition aus zwei einfacheren Deformationen zusammengesetzt. Die erste dieser beiden Deformationen entspreche der Annahme $Q=0$, die zweite der Annahme $(P)=0$.

Für die erste Deformation gelten die Gleichungen:

$$\gamma_a'(p_1)=0,\quad \gamma_a'(p_2)=0,\quad \frac{(c,\gamma')}{a}=\frac{1}{2}\frac{(a,c)}{a}(P),$$

$$\alpha_{\lambda\mu}'=\frac{1}{2K}\left[\gamma_{\lambda\mu}'-\frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}\frac{(a,\gamma')}{a}a_{\lambda\mu}+\frac{\vartheta}{1+3\vartheta}(P)a_{\lambda\mu}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u'}{\partial p_\lambda}\frac{\partial x}{\partial p_\mu}+\frac{\partial v'}{\partial p_\lambda}\frac{\partial y}{\partial p_\mu}+\frac{\partial w'}{\partial p_\lambda}\frac{\partial z}{\partial p_\mu}+\frac{\partial u'}{\partial p_\mu}\frac{\partial x}{\partial p_\lambda}+\frac{\partial v'}{\partial p_\mu}\frac{\partial y}{\partial p_\lambda}+\frac{\partial w'}{\partial p_\mu}\frac{\partial z}{\partial p_\lambda}\right].$$

Für die zweite Deformation gelten die Gleichungen

$$\gamma_a''(p_1)=0,\quad \gamma_a''(p_2)=0,\quad \frac{(c,\gamma'')}{a}=Q,$$

$$\alpha_{\lambda\mu}''=\frac{1}{2K}\left[\gamma_{\lambda\mu}''-\frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}\frac{(a,\gamma'')}{a}a_{\lambda\mu}\right].$$

Hierzu kommen noch die 3 Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen den Größen $\alpha_{\lambda\mu}''$ und den Komponenten der Verrückung u'', v'', w'' vermitteln.

Wir genügen dem ersten Gleichungssystem durch die Annahme:

$$\gamma'_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(P)a_{\lambda\mu}, \quad \alpha'_{\lambda\mu} = -\frac{(P)}{4K}\frac{1-\vartheta}{1+3\vartheta}a_{\lambda\mu},$$

$$\frac{u'}{x} = \frac{v'}{y} = \frac{w'}{z} = -\frac{(P)}{4K}\frac{1-\vartheta}{1+3\vartheta}.$$

Diese Deformation besteht in einer gleichmäßigen Kompression der Mittelfläche, bei der sie ihrer ursprünglichen Gestalt ähnlich bleibt.

Da es sonach keine Schwierigkeit hat, den Fall, daß (P) von Null verschieden ist, auf den Fall, daß $(P) = 0$, zurückzuführen, so setze ich im folgenden $(P) = 0$ voraus.

13. *Über die Eindeutigkeit der Lösung.* — Die für den Fall des Gleichgewichts geltenden Differentialgleichungen erhalten nunmehr die Form:

$$\gamma_a(p_1) = 0, \quad \gamma_a(p_2) = 0, \quad \frac{(c, \gamma)}{a} = -Q.$$

Wenn die Mittelfläche nicht geschlossen ist, so treten hierzu noch die Randbedingungen

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\cos\omega_1}{\sqrt{a_{22}}}\gamma_{22} - \frac{\cos\omega_2}{\sqrt{a_{11}}}\gamma_{12}\right] = -(P_1^{(R)}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[-\frac{\cos\omega_1}{\sqrt{a_{22}}}\gamma_{12} + \frac{\cos\omega_2}{\sqrt{a_{11}}}\gamma_{11}\right] = -(P_2^{(R)}).$$

Die Dilatationen und die Verrückungen sind durch die Gleichungen definiert:

$$\gamma_{\lambda\mu} = 2K\left[\alpha_{\lambda\mu} - \frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\frac{(a, \alpha)}{a}a_{\lambda\mu}\right],$$

$$\alpha_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_\mu}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial\xi_\lambda}{\partial p_\mu}\right) - \begin{Bmatrix}\lambda\mu\\1\end{Bmatrix}\xi_1 - \begin{Bmatrix}\lambda\mu\\2\end{Bmatrix}\xi_2 + c_{\lambda\mu}\xi_3.$$

Hierzu treten die Stetigkeitsbedingungen:

Die Größen $\gamma_{\lambda\mu}$ und ξ_λ sind auf der ganzen Mittelfläche einwertig und stetig.

Wären die Größen $\gamma_{\lambda\mu}$ und ξ_λ durch die angegebenen Bedingungen nicht eindeutig bestimmt, so müßte es ein System von Größen $\gamma_{\lambda\mu}$, ξ_λ geben, das *den* Gleichungen genügt, in die die vorstehenden übergehen, wenn man Q und, falls die Fläche nicht geschlossen ist, auch $(P_1^{(R)})$ und $(P_2^{(R)})$ gleich Null setzt.

Nun ist das über die ganze Mittelfläche erstreckte Integral

$$J=\int\limits_{(S)}[\gamma_a(p_1)\xi_1+\gamma_a(p_2)\xi_2]\partial S$$

$$=\int\limits_{(S)}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial\frac{\gamma_{22}}{\sqrt{a}}}{\partial p_1}-\frac{\partial\frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a}}}{\partial p_2}+\left\{{11 \atop 1}\right\}\frac{\gamma_{22}}{\sqrt{a}}-2\left\{{12 \atop 1}\right\}\frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a}}+\left\{{22 \atop 1}\right\}\frac{\gamma_{41}}{\sqrt{a}}\right)\xi_1$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial\frac{\gamma_{11}}{\sqrt{a}}}{\partial p_2}-\frac{\partial\frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a}}}{\partial p_1}+\left\{{11 \atop 2}\right\}\frac{\gamma_{22}}{\sqrt{a}}-2\left\{{12 \atop 2}\right\}\frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a}}+\left\{{22 \atop 2}\right\}\frac{\gamma_{11}}{\sqrt{a}}\right)\xi_2\Bigg]\frac{\partial p_1\,\partial p_2}{\sqrt{a}}$$

$$=\int\limits_{(S)}\Big[\gamma_{22}\Big(-\frac{\partial\xi_1}{\partial p_1}+\left\{{11 \atop 1}\right\}\xi_1+\left\{{11 \atop 2}\right\}\xi_2\Big)+\gamma_{11}\Big(-\frac{\partial\xi_2}{\partial p_2}+\left\{{22 \atop 1}\right\}\xi_1+\left\{{22 \atop 2}\right\}\xi_2\Big)$$

$$-2\gamma_{12}\Big(-\frac{1}{2}\frac{\partial\xi_1}{\partial p_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial\xi_2}{\partial p_1}+\left\{{12 \atop 1}\right\}\xi_1+\left\{{12 \atop 2}\right\}\xi_2\Big)\Big]\frac{\partial p_1\,\partial p_2}{\sqrt{a}}+R.$$

Wenn die Mittelfläche geschlossen ist, so ist $R=0$ zu setzen; ist sie durch eine Randkurve L begrenzt, so ist R das längs dieser Kurve erstreckte Integral

$$\int\limits_{(L)}\left[\left(\frac{\cos\omega_1}{\sqrt{a_{22}}}\gamma_{22}-\frac{\cos\omega_2}{\sqrt{a_{11}}}\gamma_{12}\right)\xi_1+\left(\frac{\cos\omega_2}{\sqrt{a_{11}}}\gamma_{11}-\frac{\cos\omega_1}{\sqrt{a_{22}}}\gamma_{12}\right)\xi_2\right]\frac{\partial L}{\sqrt{a}}.$$

Dieses Integral ist wegen der Anfangsbedingungen gleich Null.

Auf Grund der Gleichungen, die für die Verrückungen gelten, ergibt sich nun

$$J=\int\limits_{(S)}[-(\gamma,\,\alpha)+(c,\,\gamma)\xi_3]\frac{\partial p_1\,\partial p_2}{\sqrt{a}}.$$

Nun ist

$$(c,\,\gamma)=0$$

und

$$(\gamma,\,\alpha)=2K\Big[2\alpha-\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\frac{(a,\,\alpha)^2}{a}\Big].$$

Folglich

$$J=2K\int\limits_{(S)}\Big[\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\frac{(a,\,\alpha)^2}{a^2}-2\frac{\alpha}{a}\Big]\partial S.$$

Weil die Form $a_{11}dp_1^2+2a_{12}dp_1dp_2+a_{22}dp_2^2$ definit ist, ist der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck von Null verschieden und positiv, sofern nicht alle 3 Größen $\alpha_{\lambda\mu}$ verschwinden.

Da nun $J=0$, so folgt: die Größen $\alpha_{\lambda\mu}$ sind sämtlich $=0$. Das Linienelement der Mittelfläche erfährt somit keine Dilatation. Daraus folgt: Durch unsere Differentialgleichungen und die zugehörigen Stetig-

keits- und Anfangsbedingungen ist die Deformation der Mittelfläche bis auf eine dehnungslose Biegung bestimmt.

Ist die Mittelfläche eine geschlossene Fläche mit überall positiver Krümmung, so ist, wie Herr Liebmann bewiesen hat, eine dehnungslose Biegung unmöglich. Die Frage, ob, beziehungsweise inwieweit eine derartige Biegung bei geschlossenen Flächen möglich ist, deren Krümmung teils positiv teils negativ ist, ist noch nicht beantwortet.

Ist die Mittelfläche nicht geschlossen, so müssen, damit die Deformation vollständig bestimmt ist, zu den oben angegebenen Randbedingungen noch weitere Bedingungen treten, z. B. die Bedingung, daß die Randkurve festgehalten wird.

Ob aber diese Bedingung auch zur Bestimmung der Deformation hinreicht, muß dahingestellt bleiben.

14. *Bestimmung der Komponenten der Verrückung.* — Wenn die Größen $\gamma_{\lambda\mu}$ und damit auch die Größen $\alpha_{\lambda\mu}$ bekannt sind, so erfordert die Bestimmung der Komponenten der Verrückung noch die Integration einer partiellen linearen, aber nicht homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung und außerdem nur noch Quadraturen.

Um diese partielle Differentialgleichung aufzustellen, benützen wir das von Herrn Weingarten angegebene Verfahren.[1])

Es ist zweckmäßig, die nach den Richtungen der kartesischen Koordinaten geschätzten Komponenten der Verrückung $u, v, w,$ nicht die Größen ξ_λ zu bestimmen.

Wir führen drei neue Unbekannte ein, nämlich

$$(1)\qquad \eta = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\sum \frac{\partial x}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial p_2} - \sum \frac{\partial x}{\partial p_2}\frac{\partial u}{\partial p_1}\right],$$

$$(2)\qquad \eta_1 = \sum X \frac{\partial u}{\partial p_1}, \qquad \eta_2 = \sum X \frac{\partial u}{\partial p_2}.$$

Hier ist zur Abkürzung

$$\sum \frac{\partial x}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial p_2}$$

für

$$\frac{\partial x}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial p_2} + \frac{\partial y}{\partial p_1}\frac{\partial v}{\partial p_2} + \frac{\partial z}{\partial p_1}\frac{\partial w}{\partial p_2}$$

geschrieben u. s. w.

---

1) Über die Deformation einer biegsamen unausdehnbaren Fläche. Crelles Journal Bd. 100, S. 296.

η ist Differentialinvariante. Es ist nämlich der Zähler des Ausdrucks η die lineare Invariante der bilinearen Differentialform

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\mu=1}^{2}\left[\sum \frac{\partial x}{\partial p_\lambda}\frac{\partial u}{\partial p_\mu}\right] dp_\lambda dp_\mu.$$

η_1, η_2 sind die Koeffizienten einer linearen Differentialkovariante, wie unmittelbar aus der Gleichung

$$\eta_1 dp_1 + \eta_2 dp_2 = X du + Y dv + Z dw$$

hervorgeht.

Um die mechanische Bedeutung der Größen η, η_1, η_2 zu erkennen, denken wir uns einen Augenblick den Anfangspunkt der kartesischen Koordinaten xyz in einen Punkt der Mittelfläche verlegt und die positive z-Achse mit der nach außen gerichteten Normalen zusammenfallend. Es ist dann

$$\eta_1 dp_1 + \eta_2 dp_2 = dw.$$

Demnach ist $\frac{\eta_1}{\sqrt{a_{11}}}$ der Kosinus des Winkels, den ein Linienelement, das ursprünglich die Richtung der wachsenden p_1 hatte, nach Eintritt der Deformation mit der ursprünglichen Richtung der Flächennormalen bildet. Analog ist die Bedeutung von η_2 zu erklären.

Im Falle, daß die Koordinatenlinien $p_1 = \text{const.}$, $p_2 = \text{const.}$ auf einander senkrecht stehen, bedeuten $\frac{\eta_1}{\sqrt{a_{11}}}$, $\frac{\eta_2}{\sqrt{a_{22}}}$ die Komponenten der Drehung um die Linien $p_1 = \text{const.}$ beziehungsweise $p_2 = \text{const.}$

Wählt man einen Augenblick die kartesischen Koordinaten x, y als unabhängige Variable, so wird

$$\eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

η bedeutet somit die Komponente der Drehung um die Normale der Mittelfläche.[1])

An Stelle der Gleichungen

$$\alpha_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}\left[\sum \frac{\partial x}{\partial p_\lambda}\frac{\partial u}{\partial p_\mu} + \frac{\partial x}{\partial p_\mu}\frac{\partial u}{\partial p_\lambda}\right] \qquad (\lambda, \mu = 1, 2)$$

treten nunmehr die Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \sum \frac{\partial x}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial p_1} = \alpha_{11}, & \sum \frac{\partial x}{\partial p_2}\frac{\partial u}{\partial p_2} = \alpha_{22}, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial p_2} = \alpha_{12} + \eta\sqrt{a}, & \sum \frac{\partial x}{\partial p_2}\frac{\partial u}{\partial p_1} = \alpha_{12} - \eta\sqrt{a}. \end{cases}$$

1) Die hier mit η bezeichnete Größe bezeichnet Weingarten a. a. O. mit φ und nennt sie „Verschiebungsfunktion“.

Hierzu kommt die Gleichung (s. **11**, 7)

$$\alpha_{\lambda\mu} = \frac{1}{2K}\left[\gamma_{\lambda\mu} - \frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta} H a_{\lambda\mu}\right], \tag{4}$$

wo zur Abkürzung $\frac{(a,\,\gamma)}{a} = H$ gesetzt ist.

Nun folgt aus (3)

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial p_1^2}\frac{\partial u}{\partial p_2} - \sum \frac{\partial^2 x}{\partial p_1 \partial p_2}\frac{\partial u}{\partial p_1} = \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial p_1} + \frac{\partial \eta\sqrt{a}}{\partial p_1} - \frac{\partial \alpha_{11}}{\partial p_2}. \tag{5}$$

Um die rechte Seite dieser Gleichung umzuformen, bemerken wir, daß

$$\frac{\partial\sqrt{a}}{\partial p_1} = \sqrt{a}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right] \quad \frac{\partial\sqrt{a}}{\partial p_2} = \sqrt{a}\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right].$$

Folglich

$$\text{(6)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_{12}}{\partial p_1} - \dfrac{\partial \alpha_{11}}{\partial p_2} + \dfrac{\partial \eta\sqrt{a}}{\partial p_1} = \sqrt{a}\left[\dfrac{\partial \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{a}}}{\partial p_1} - \dfrac{\partial \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{a}}}{\partial p_2}\right] + \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right]\alpha_{12} \\ \quad -\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]\alpha_{11} + \sqrt{a}\dfrac{\partial\eta}{\partial p_1} + \sqrt{a}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right]\eta. \end{cases}$$

Um die linke Seite der Gleichung (5) umzuformen, machen wir von den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} = \begin{Bmatrix}\lambda\mu\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial p_1} + \begin{Bmatrix}\lambda\mu\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial p_2} - c_{\lambda\mu} X \qquad (\lambda,\,\mu = 1,\,2)$$

und den Gleichungen, die sich aus diesen durch cyklische Vertauschung von x, y, z ergeben, Gebrauch. Wir erhalten mit Rücksicht auf (3):

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial p_1^2}\frac{\partial u}{\partial p_2} - \sum \frac{\partial^2 x}{\partial p_1 \partial p_2}\frac{\partial u}{\partial p_1} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}[\alpha_{12} + \eta\sqrt{a}] + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\alpha_{22} - c_{11}\eta_2$$
$$- \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\alpha_{11} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}[\alpha_{12} - \eta\sqrt{a}] + c_{12}\eta_1.$$

Diesen Wert setzen wir in die Gleichung (5) ein und benutzen gleichzeitig (6). Es ergibt sich:

$$\sqrt{a}\left[\frac{\partial \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{a}}}{\partial p_1} - \frac{\partial \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{a}}}{\partial p_2}\right] - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\alpha_{11} + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\alpha_{12} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\alpha_{22}$$
$$= -\sqrt{a}\frac{\partial\eta}{\partial p_1} - c_{11}\eta_2 + c_{12}\eta_1.$$

Mit Benutzung der Weingartenschen Bezeichnung kann man hierfür schreiben

$$\alpha_a(p_2) = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\eta}{\partial p_1} + \frac{c_{11}\eta_2 - c_{12}\eta_1}{a}.$$

Nun ist zufolge (4):

$$\alpha_a(p_2) = \frac{1}{2K}\left[\gamma_a(p_2) - \frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}H a_a(p_2) - \frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}\frac{1}{a}\left(a_{11}\frac{\partial H}{\partial p_2} - a_{12}\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)\right],$$

also weil $\gamma_a\ (p_2) = 0$ (Nr. 12) und $a_a(p_2) = 0$ (Nr. 11)

$$c_{11}\eta_2 - c_{12}\eta_1 = -\sqrt{a}\frac{\partial \eta}{\partial p_1} - \frac{1}{2K}\frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}\left(a_{11}\frac{\partial H}{\partial p_2} - a_{12}\frac{\partial H}{\partial p_1}\right). \tag{7}$$

Vertauscht man p_1 und p_2, wobei $-\eta$ an Stelle von η tritt, so ergibt sich:

$$c_{22}\eta_1 - c_{12}\eta_2 = \sqrt{a}\frac{\partial \eta}{\partial p_2} - \frac{1}{2K}\frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}\left(a_{22}\frac{\partial H}{\partial p_1} - a_{12}\frac{\partial H}{\partial p_2}\right). \tag{8}$$

Wir lösen die Gleichungen (7) und (8) nach η_1 und η_2 auf. Wir erhalten:

$$\left\{\begin{aligned} c\eta_1 &= \sqrt{a}\left(c_{11}\frac{\partial \eta}{\partial p_2} - c_{12}\frac{\partial \eta}{\partial p_1}\right) - \frac{1}{2K}\frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}a\left(A_{11}\frac{\partial H}{\partial p_1} + A_{12}\frac{\partial H}{\partial p_2}\right),\\ c\eta_2 &= \sqrt{a}\left(-c_{22}\frac{\partial \eta}{\partial p_1} + c_{12}\frac{\partial \eta}{\partial p_2}\right) - \frac{1}{2K}\frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}a\left(A_{21}\frac{\partial H}{\partial p_1} + A_{22}\frac{\partial H}{\partial p_2}\right). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\left\{\begin{aligned} aA_{11} &= a_{22}c_{11} - a_{12}c_{12}, \qquad & aA_{12} &= a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11},\\ aA_{21} &= a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22}, & aA_{22} &= a_{11}c_{22} - a_{12}c_{12}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Die Größen $A_{\lambda\mu}$ haben eine einfache Bedeutung. Es bestehen nämlich die Gleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial p_\lambda} = A_{\lambda 1}\frac{\partial x}{\partial p_2} + A_{\lambda 2}\frac{\partial x}{\partial p_2} \qquad (\lambda = 1, 2)$$

und die 4 weiteren Gleichungen, die sich aus diesen durch cyklische Vertauschung von x, y, z ergeben.

Nun folgt aus (2) und (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_1}{\partial p_2} - \frac{\partial \eta_2}{\partial p_1} &= \sum \frac{\partial X}{\partial p_2}\frac{\partial u}{\partial p_1} - \sum \frac{\partial X}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial p_2}\\ &= [A_{21}\alpha_{11} + A_{22}(\alpha_{12} - \eta\sqrt{a})] - [A_{11}(\alpha_{12} + \eta\sqrt{a}) + A_{12}\alpha_{22}]\\ &= [A_{21}\alpha_{11} - A_{12}\alpha_{22} - (A_{11} - A_{22})\alpha_{12}] - \eta\sqrt{a}(A_{11} + A_{22}). \end{aligned}$$

Den Ausdruck in der ersten Klammer auf der rechten Seite kann man in der Form schreiben

$$-\frac{1}{a}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22}\\ c_{11} & c_{12} & c_{22}\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2Ka}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{22}\\ c_{11} & c_{12} & c_{22}\\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}.$$

Die rechts stehende Determinante — die simultane Invariante der drei quadratischen Formen $a_{11}dp_1^2 + \ldots$, $c_{11}dp_1^2 + \ldots$, $\gamma_{11}dp_1^2 + \ldots$ bezeichnen wir zur Abkürzung mit (a, c, γ).

Es ist ferner $A_{11} + A_{22} = \frac{(a,c)}{a}$. Wir erhalten somit:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial \eta_2}{\partial p_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial p_2}\right] = \frac{1}{2K}\frac{(a,c,\gamma)}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{(a,c)}{a}\eta.$$

Führen wir hier für η_1 und η_2 die Werte (9) ein, so erhalten wir für η die partielle Differentialgleichung

$$(11)\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial p_1}\left[\frac{\sqrt{a}}{c}\left(c_{22}\frac{\partial \eta}{\partial p_1} - c_{12}\frac{\partial \eta}{\partial p_2}\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial p_2}\left[\frac{\sqrt{a}}{c}\left(c_{11}\frac{\partial \eta}{\partial p_2} - c_{12}\frac{\partial \eta}{\partial p_1}\right)\right] \\ &\quad + \frac{(a,c)}{a}\eta = \frac{1}{2K}\frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial}{\partial p_1}\left[\frac{a}{c}\left(A_{21}\frac{\partial H}{\partial p_1} + A_{22}\frac{\partial H}{\partial p_2}\right)\right]\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial p_2}\left[\frac{a}{c}\left(A_{11}\frac{\partial H}{\partial p_1} + A_{12}\frac{\partial H}{\partial p_2}\right)\right]\right\} - \frac{1}{2K}\frac{(a,c,\gamma)}{a^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Ist η bestimmt, so ergeben sich η_1 und η_2 aus den Gleichungen (9), und es lassen sich alsdann die Derivierten der Komponenten u, v, w berechnen. Die Bestimmung der Komponenten selbst erfordert dann nur mehr Quadraturen.

(Fortsetzung folgt.)

Untersuchungen über telephonische Fernleitungen Pupinschen Systems.[1])

Von F. Dolezalek und A. Ebeling in Berlin.

Für die moderne Ferntelephonie, die sich zur Übermittelung der Zeichen bekanntlich der Wechselströme bedient, liegt eine Hauptschwierigkeit der Entwickelung in der schädlichen Wirkung der elektrostatischen Kapazität, die sich in um so höheren Maße fühlbar macht, je länger die jeweilige Linie ist, und die in Kabeln einen noch fünfmal so großen Wert erreicht als in einer gleich langen Freileitung. Da die Fortpflanzung einer elektrischen Welle über einen Leitungsdraht in einer fortwährenden Umwandlung elektrokinetischer Energie in

1) Referat über den gleichnamigen Aufsatz der Verfasser in Nr. 49 der „Elektrotechnischen Zeitschrift" vom 4. Dezember 1902.

elektrostatische und magnetische Energie besteht, so steigt mit wachsender Kapazität auch die Intensität der Ladungsströme und damit die Größe der Energieverluste durch Joulesche Wärme.

Wird nun die Energiezerstreuung zu groß, so wird die Leitung für praktische Zwecke unbrauchbar, denn die Deutlichkeit der übermittelten telephonischen und telegraphischen Zeichen nimmt in demselben Maße ab, als Energie verloren geht, und zwar unter Umständen bis zur völligen Unverständlichkeit.

Dem Energie zerstörenden Einfluß der Kapazität und des Leitungswiderstandes läßt sich nun aber entgegenwirken, wenn man die Selbstinduktion der Leitung hinreichend vergrößert. Man erreicht dadurch, daß die Energieaufspeicherung sich zum größeren Teil in Form von magnetischer Energie vollzieht, und drückt durch die Vermehrung der Impedanz die Intensität der Ladungsströme und die Wärmeverluste herab.

Verschiedene ältere Versuche, die Selbstinduktion einer Leitung nach Möglichkeit zu steigern, haben praktisch nur zu bedingt brauchbaren Resultaten geführt. Eine Umkleidung des Leiters mit Eisen stellte die nächstliegende Methode zur Erhöhung der Induktanz dar, doch wurde die schädliche Wirkung der Kapazität dadurch gleichzeitig viel zu sehr gefördert, als daß man diesen Weg praktisch hätte verwerten können. Weit bedeutendere Wirkungen lassen sich erzielen, wenn man in gewissen, regelmäßigen Abständen die Leitung an mehreren Stellen unterbricht und Drahtspulen mit hoher Selbstinduktion einschaltet. Diese Methode, die zuerst von Heaviside und Silvanus Thompson angegeben wurde, hat gegenüber der erstgenannten nicht nur den Vorzug eines außerordentlich viel kräftigeren Effektes, sondern sie zeichnet sich auch dadurch vor jener aus, daß durch die Einschaltung der Spulen die Kapazität der Leitung nicht vermehrt wird.

Es zeigte sich aber, daß die Thompson-Heavisidesche Methode, so richtig ihr Grundgedanke war, in ihrer Allgemeinheit noch nicht genügte, um eine praktisch brauchbare und zuverlässige Verbesserung der Lautübertragung herbeizuführen.

Der Amerikaner Michael J. Pupin nun war es, der der Theorie diejenige Durchbildung gab, welche eine praktische Anwendung und eine unbedingt zuverlässige und überaus rationelle Verwertung ermöglichte. Ehe wir aber den Wert der Erfindung betrachten, wollen wir in aller Kürze die theoretischen Gedanken verfolgen, durch welche Pupin zu seinem glücklichen Abschluß des Thompson-Heavisideschen Ideenganges geführt wurde.

Es möge bedeuten:

x = die Leitung,
l = die Länge der Leitung,
n = die Periodenzahl eines harmonischen Wechselstromes,
C = die Kapazität der Einfachleitung pro km,
L = die Selbstinduktion " " ",
R = den Widerstand " " ",
J = die variable Stromstärke in irgend einem Punkt der Leitung.

Aus der Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes folgt dann, daß in dem Leiterelement dx die Gegenkraft der Selbstinduktion $\left(L\frac{dJ}{dt}dx\right)$, vermehrt um den Spannungsverlust durch Widerstand ($RJdx$), gleich ist dem Potentialabfall längs des Elementes $\left(-\frac{dV}{dx}dx\right)$, also:

$$\left(L\frac{dJ}{dt}+RJ\right)dx=-\frac{dV}{dx}dx.$$

Das Vorhandensein von Kapazität bedingt ferner eine Abnahme der Stromstärke mit der Leitung, welche bestimmt wird durch die Gleichung:

$$-\frac{dJ}{dx}=C\frac{dV}{dt}.$$

Aus den beiden genannten Gleichungen ergibt sich für die Wellenfortpflanzung in einem absolut gleichförmigen Leiter die bekannte Differentialgleichung:

$$L\frac{d^2J}{dt^2}+R\frac{dJ}{dt}=\frac{1}{C}\frac{d^2J}{dx^2}. \tag{1}$$

In Wirklichkeit werden nun aber in der Leitung stets ein Geber- und ein Empfängerapparat vorgeschaltet sein, so daß die Stromfunktion Bedingungsgleichungen zu genügen hat, die durch die elektrischen Konstanten der Apparate bestimmt werden.

Die durch den Geber erzeugte elektromagnetische Kraft sei dargestellt durch die Zeitfunktion $e=f(t)=Ee^{ipt}$, worin $p=2\pi n$, n = Periodenzahl pro Sek.

Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand des Geber- bezw. des Empfängerapparates seien L_0, R_0, C_0 bezw. L_1, R_1, C_1. Ferner seien die Potentiale an den Polen des Gebers, also für $x=0$ und $x=2l$, V_0 und V_{2l}, entsprechend den Polen des Empfängers, also für $x=l$, V_l und V_l', ebenso bedeute P_0 die Potentialdifferenz am Kondensator C_0, P_1 diejenige am Kondensator C_1.

Dann lassen sich die beiden Grenzbedingungen in folgender Form darstellen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(L_0 \frac{dJ}{dt} + R_0 J + P_0 + V_0 - V_{2l}\right)_{x=0} = f(t), \\ \left(L_1 \frac{dJ}{dt} + R_1 J + P_1 + V'_l - V_l\right)_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Die Symmetrie des Systems fordert nun aber, daß an allen Punkten der Linie $V = -V'$ ist, also auch:

$$V_0 = -V'_{2l} \text{ und } V_l = V'_l.$$

Wenn wir schließlich noch für $l - x$ den Wert ξ einsetzen, so ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung:

$$(3)\qquad J = (K_1 \cos m\xi + K_2 \sin m\xi)\, e^{i_1 k},$$

welche der Gleichung (1) genügt, wenn:

$$-m^2 = ipC\,(ipL + R).$$

m ist eine komplexe Größe, welche wir $= \alpha + i\beta$ setzen wollen. Dann wird:

$$-m^2 = -(\alpha + i\beta)^2 = ipC\,(ipL + R),$$

$$(4)\qquad \alpha = \sqrt{\frac{pC}{2}\left[\sqrt{p^2L^2 + R^2} + pL\right]},$$

$$(5)\qquad \beta = \sqrt{\frac{pC}{2}\left[\sqrt{p^2L^2 + R^2} - pL\right]},$$

Die Werte von α und β haben eine sehr hohe praktische Bedeutung, wie wir sogleich zeigen wollen.

Bemerkt muß noch werden, daß in obigen Formeln im Falle einer Doppelleitung L durch $2L$, C durch den Wert für die gegenseitige Kapazität, R durch $2R$ zu ersetzen ist.

Der Vereinfachung halber sei angenommen, daß nur der Geber eine merkliche Impedanz besitzt, daß dagegen die Impedanz des Empfängers zu vernachlässigen ist.

Die effektiven Stromstärken im Geber ($\xi = l$) und Empfänger ($\xi = 0$) seien I_g und I_e; dann gilt die Gleichung:

$$I_e = \frac{2I_g}{\sqrt{e^{2\beta\xi} + e^{-2\beta\xi} + 2\cos 2\alpha\xi}},$$

wobei α und β nach Gleichung (4) und (5) aus den elektrischen Konstanten der Leitung zu berechnen sind. Im Falle einer kurzen Leitung von geringem Widerstand, geringerer Kapazität und großer Selbstinduktion

reduzieren sich $e^{2\beta\xi}$ und $e^{-2\beta\xi}$ zu 1, und es ergibt sich die Gleichung einer stehenden Welle. Die Größe α, welche die Wellenlänge bestimmt, heißt die *Wellenlängenkonstante.*

Bei einer langen, stark dämpfenden Linie wird das Verhältnis von Anfangs- und Endstrom ausschließlich durch $e^{\beta\xi}$ bestimmt, d. h. aber durch die Größe β. Diese ist daher für die Wellenfortpflanzung von entscheidender Bedeutung und führt den Namen Dämpfungskonstante. Wie aus Gleichung (5) zu ersehen ist, nimmt β ab, wenn L größer wird, d. h. mit wachsender Selbstinduktion wird die Dämpfung geringer, also der Endstrom stärker.

Wird die Selbstinduktion so weit erhöht, daß der Widerstand R klein ist im Verhältnis zum Wert $p \cdot L$, so reduziert sich die Gleichung für β auf eine bemerkenswerte Form, welche die Periodenzahl nicht mehr enthält:

$$\beta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{6}$$

Diese Gleichung besagt, daß die Erhöhung der Selbstinduktion nicht nur die Dämpfung heruntersetzt, sondern auch eine gleichmäßige Dämpfung für die verschiedenen Schwingungen der Sprechströme herbeiführt, was für die Lautheit der übertragenen Sprache von großer Bedeutung ist.

Die bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf eine Linie mit stetig verteilter Selbstinduktion. Für den Fall diskret verteilter Induktanzquellen kommen dann noch ebensoviele Bedingungsgleichungen hinzu, als Induktionsspulen vorhanden sind. Diesen Fall hat Pupin behandelt, und er kommt zu dem wichtigen Resultat: Diskret verteilte Selbstinduktion vermindert nur dann die Dämpfungskonstante ebenso wie stetig verteilte, wenn der Abstand der Induktionsquellen einen Bruchteil der Wellenlänge des über den Leiter fortzupflanzenden Wechselstromes beträgt.

In Europa war es die Firma Siemens & Halske, welche die Pupinschen Gedanken aufnahm, erfolgreich weiterführte und ihre hohe Bedeutung für praktische Zwecke durch zahlreiche Versuche im Laboratorium und an im öffentlichen Gebrauch befindlichen Strecken nachwies, welche ihr von der deutschen Reichspostverwaltung zur Verfügung gestellt wurden. Die ersten Versuche im großen wurden an einem zwischen Berlin und Potsdam verlegten, 32,5 km langen Fernsprechkabel angestellt, das 28 Fernsprechkreise (Doppelleitungen) mit 1,0 mm starken Kupferleitern enthält. 14 von diesen Doppelkreisen wurden mit Pupinspulen ausgerüstet, während die 14 anderen, um Vergleiche zu ermöglichen, im ursprünglichen Zustande gelassen wurden.

Der Abstand der Spulen von einander wurde auf ca. 1300 m festgesetzt; jede Spule hatte einen Widerstand von je ca. 4,1 Ohm für Hin- und Rückleitung und eine Selbstinduktion von ca. 0,062 Henry aufzuweisen. Es zeigte sich, daß durch diese Vorkehrungen der Wert der Selbstinduktion auf den 200fachen Wert gesteigert, die Dämpfungskonstante auf den 4ten Teil des ursprünglichen Wertes erniedrigt wurde. Entsprechend groß war natürlich auch die erzielte Sprechverbesserung: über fünf hintereinander geschaltete Sprechkreise, also über ca. 162,5 km Entfernung, erhielt man etwa, bei Anwendung von Pupinspulen, die gleiche Sprechlautheit wie über eine einzige, 32,5 km lange Schleife ohne Spulenausrüstung.

Weitere Versuche wurden an einer 150 km langen Bronzefreileitung von 2 mm Durchmesser angestellt, welche zwischen Berlin und Magdeburg den Fernsprechverkehr zum Teil vermittelt. Die an dieser Linie angestellten Versuche ergaben ein ebenso günstiges Resultat wie die am Kabel Berlin-Potsdam, denn die mit der Pupinausrüstung versehene Freileitung von 2 mm ergab ein bedeutend besseres Sprechresultat als eine nur wenig längere Freileitung von 3 mm, welche keine Pupinausrüstung aufwies.

Dynamometrische Messungen, mittelst deren die Abnahme des Stromes mit der Länge der Leiter festgestellt wurde, bestätigen in jeder Hinsicht die theoretisch gewonnenen und die Sprechresultate. Die Versuche wurden so angestellt, daß man in die Leitungen einen konstanten Wechselstrom sandte und in verschiedenen Entfernungen die ankommende Stromstärke sowohl für die mit Selbstinduktionsspulen belastete Linie als auch die unbelastete Linie feststellte. Die Fig. 1 und 2 zeigen diese Resultate für das Kabel Berlin-Potsdam und zwar in Fig. 1 für einen Wechselstrom von 900 Perioden und in Fig. 2 für 400 Perioden. Die Abscissen zeigen die Linienlänge in Kilometern, die Ordinaten den Endstrom in Milliampère, wobei der Wert für die Abscisse Null den Strom am Anfang der Linie, also am Geberapparat, anzeigt. Die Kurven zeigen deutlich, daß die Abschwächung der in den Anfang der Linie gesandten Stromstärke bei der mit Spulen belasteten Linie bedeutend geringer ist als bei der nicht belasteten Linie. Auch zeigt ein Vergleich der Figuren 1 und 2, daß das Verhältnis der Dämpfung zwischen Schwingungen von 900 und 400 Perioden bei dem mit Pupinspulen belasteten Kabel etwa 1 : 1,6 beträgt, bei dem reinen Kabel dagegen 1 : 6; entsprechend der Theorie ergibt sich also eine fast gleichmäßige Übertragung sämtlicher Schwingungen bei dem mit Spulen belasteten Kabel, und daraus erklärt sich auch die in der Tat erzielte tadellose Klarheit der erhaltenen Sprache.

Im übrigen ergibt sich auch für 900 Perioden, welche einen mittleren Wert der für die menschliche Sprache in Frage kommenden

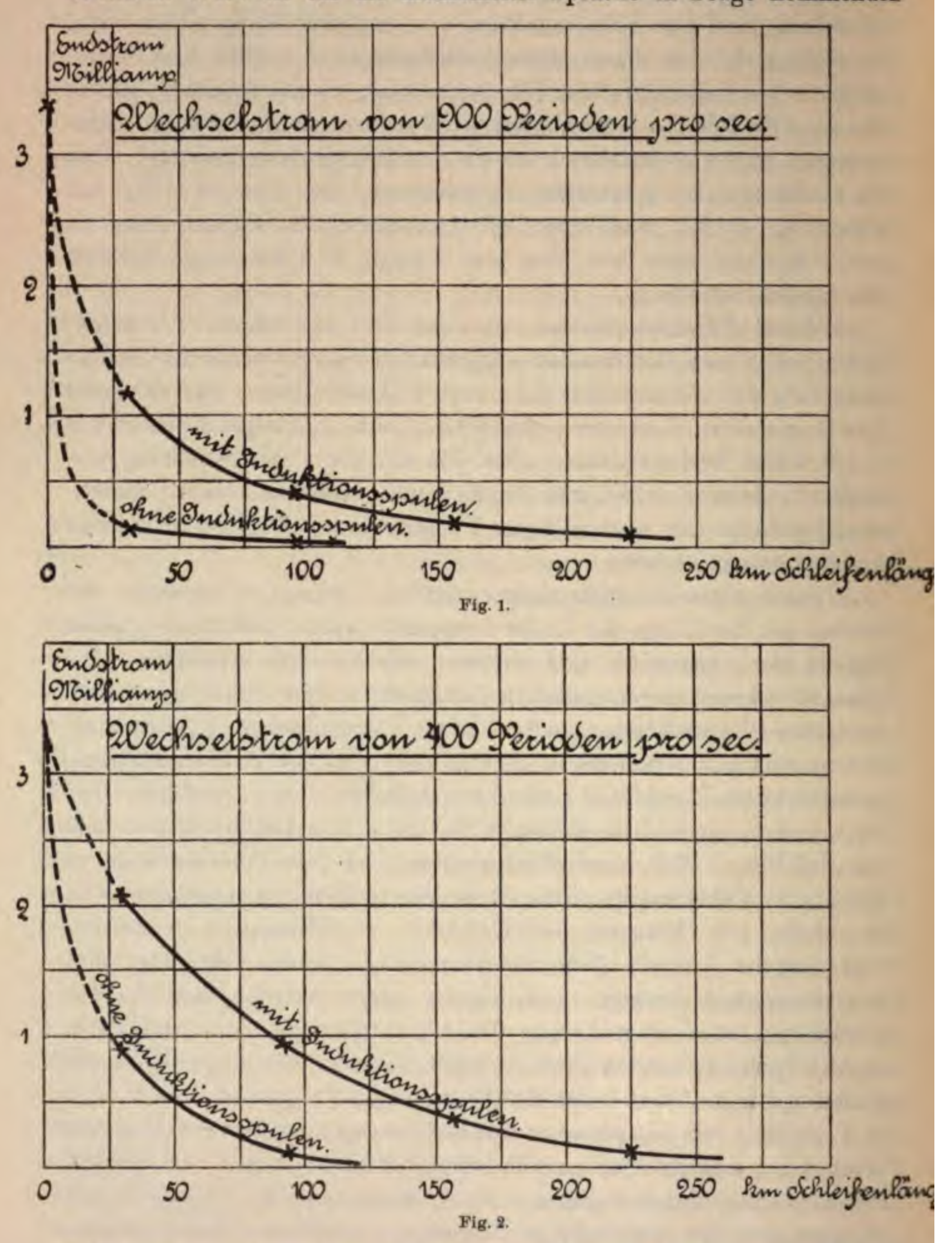


Fig. 1.

Fig. 2.

Schwingungen darstellen, daß die Ordinaten der Kurven für 32,5 km nicht belastetes Kabel und 160 km Pupinkabel angenähert identisch

sind, was dem oben angeführten Resultate der Sprechversuche entspricht.

Gleiche Messungen, die an den Versuchs-Freileitungen Berlin-Magdeburg mit 900 Perioden angestellt wurden, wobei die Länge der Linien nicht verändert werden konnte, ergaben bei einem in die Linie gesandten Anfangsstrom von 3,38 Milliampère einen Endstrom von

0,53 Milliamp. für 150 km Leitung 2 mm Draht ohne Spulen,
0,84 „ „ 180 „ „ 3 „ „ „ „ ,
2,20 „ „ 150 „ „ 2 „ „ mit „ .

Durch das Einführen der Selbstinduktionsspulen konnte man also den Endstrom auf den vierfachen Wert bringen.

Bei diesen Messungen war die Impedanz der den Endstrom messenden Apparate nicht, wie theoretisch gefordert, zu vernachlässigen, sondern den telephonischen Empfangsapparaten angepaßt. Um ein Bild darüber zu erhalten, ob die praktischen Werte auch für den theoretisch abgeleiteten Fall gelten, daß die Impedanz zu vernachlässigen ist, wurde ein Versuch im Laboratorium so ausgeführt, daß man die Impedanz variierte und aus der gewonnenen Kurve den idealen Fall der Impedanz Null extrapolierte. Die graphische Extrapolation ergab hierbei einen Wert für die Impedanz Null zwischen 1,2 und 1,7 Milliampère, während die Theorie den Wert 1,45 Milliamp. forderte. Es bestätigt dies, daß die für den effektiven Endstrom abgeleitete Gleichung

$$I_e = \frac{I_g}{\sqrt{e^{2\beta\xi} + e^{-2\beta\xi} + 2\cos 2\alpha\xi}}$$

in der Tat richtig sein dürfte.

Es blieb noch nachzuweisen, daß der Kernpunkt des Pupinschen Systems richtig sei, daß nämlich die Einschaltung der Selbstinduktionsspulen nur dann eine Verminderung der Dämpfung herbeiführen kann, wenn der Spulenabstand einen Bruchteil des über den Wellenleiter fortzupflanzenden Wechselstromes beträgt, und daß bei größeren Abständen eine Reflexion der Welle eintritt. Die Versuche, deren Resultate in den Fig. 3 und 4 wiedergegeben sind, wurden im Laboratorium bei 900, 600 und 400 Perioden gewonnen. Bei allen Messungen wurden Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion konstant gehalten, nur die Verteilung der Selbstinduktion wurde geändert. Die Resultate bestätigen durchaus die Theorie. In Fig. 3 ist der Abstand der Spulen in km als Abscisse, der Endstrom als Ordinate aufgetragen, für die drei verschiedenen Perioden sinkt der Endstrom bei ca. 6, 8 und 11 km Spulenabstand zu Null herunter; diese Abstände bezeichnen die Grenze,

oberhalb deren kein Strom für die entsprechende Periode des Wechselstromes bei der gewählten Kabellänge von beiläufig 28 km mit 0,8 mm

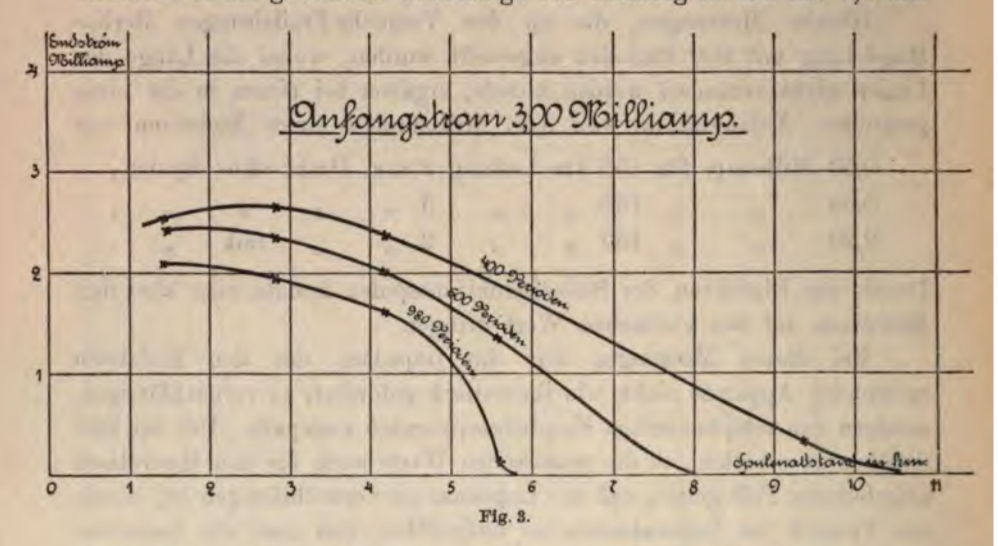


Fig. 3.

Kupferleiter mehr am Ende der Linie ankommt. Trägt man die Kurve so ein, daß die Abscissen den Wert der Spulenzahl pro Wellenlänge angeben, so zeigt sich, daß in der Tat eine Wellenlänge für 400 Perioden

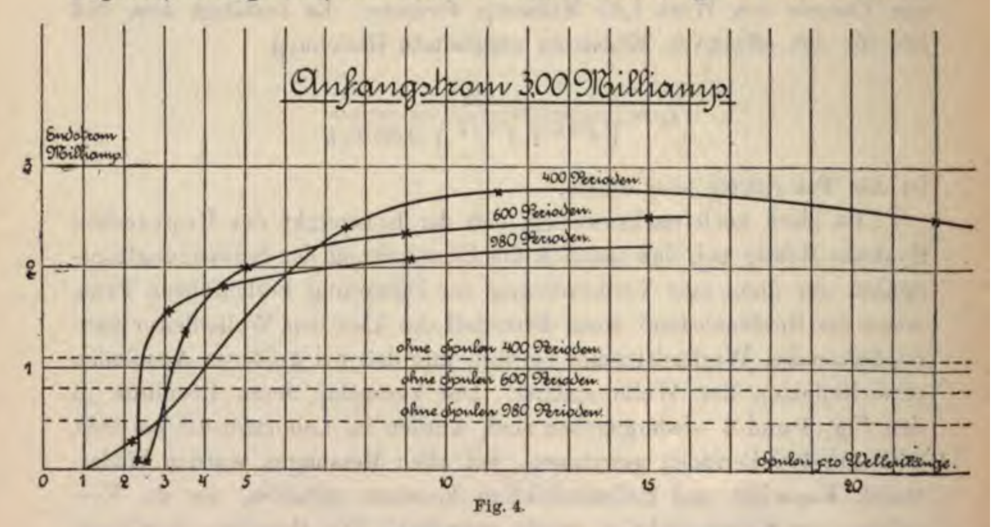


Fig. 4.

die Grenze ist, für höhere Perioden, die bei der menschlichen Stimme wesentlich sind, liegt diese Grenze bei etwa 2 Spulen pro Wellenlänge. Diese Resultate bestätigen sich, wenn man das Empfangsdynamometer durch ein Telephon ersetzt.

Diese Untersuchungen zeigen, daß die theoretisch sich ergebenden, großen Effekte in der Tat erzielt werden, sodaß die Erfindung Pupins als eine epochemachende auf dem Gebiet der Telephonie zu bezeichnen ist, insofern nunmehr eine telephonische Verständigung zwischen den wichtigsten Städten des gesamten Europa möglich ist.

Berlin, im März 1903.

Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen der Ebene.

Von R. VON LILIENTHAL in Münster i. W.

Im folgenden stelle ich zunächst der Lieschen Auffassung des Systems:

$$\frac{dx}{dt} = g_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g_2(x, y)$$

eine zweite an die Seite, die sich bei der Betrachtung krummliniger Koordinaten in der Ebene eigentlich von selbst ergibt, und behandle sodann den Fall, in dem die Veränderliche t die Bedeutung der Bogenlänge der Bahnkurven der zugehörigen Gruppe von Transformationen besitzt. Dies Beispiel scheint mir sowohl wegen seiner Allgemeinheit wie wegen seiner Anschaulichkeit besonders lehrreich zu sein.

1. Das System von Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = g_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g_2(x, y)$$

faßt Lie als „eine infinitesimale Transformation" bestimmend auf, d. h. als eine solche, die den Punkt mit den Koordinaten x, y in den Punkt mit den Koordinaten $x + g_1\,dt$, $y + g_2\,dt$ überführt. Die Integration des Systems liefert die Gleichungen der durch jene infinitesimale Transformation erzeugten „Gruppe von Transformationen" in der Form:

$$(2) \qquad x = F_1(x_0, y_0, t), \quad y = F_2(x_0, y_0, t),$$

wo die willkürlichen Konstanten x_0, y_0 als die Werte von x und y für $t = 0$ angesehen werden können.

Eliminiert man t aus den Gleichungen (2), so entstehe:

$$(3) \qquad F(x, y, x_0, y_0) = 0.$$

Da diese Beziehung mit dem Integral der Gleichung: $\frac{dy}{dx} = \frac{g_2}{g_1}$ gleichbedeutend sein muß, können in ihr x_0, y_0 nur in einer festen Verbindung

auftreten, die dann die Rolle eines Parameters spielt, d. h. die Gleichung (3) muß die Form haben[1]):

$$G(x, y, \varphi(x_0, y_0)) = 0.$$

Eine Hauptfrage ist nun die, wann eine gegebene Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x, y) \qquad \left(\psi \gtrless \frac{g_2}{g_1}\right) \tag{4}$$

die durch (1) bestimmte Transformation gestattet, oder mit anderen Worten, wann die Integralkurven der Gleichung (4) durch die Transformation (1) in einander übergeführt werden. Diese Frage ist zu bejahen, falls für jedes Wertsystem x, y die Gleichung:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \psi\left(\frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial g_1}{\partial x}\right) - \psi^2\frac{\partial g_1}{\partial y} = g_1\frac{\partial \psi}{\partial x} + g_2\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{5}$$

erfüllt ist.[2])

Lie hat dieser Bedingung noch andere Formen gegeben. Ist $f(x, y)$ irgend eine Funktion von x und y, so nehme man:

$$A(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \psi\,\frac{\partial f}{\partial y}, \quad B(f) = g_1\frac{\partial f}{\partial x} + g_2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Unsere Bedingungsgleichung wird dann:

$$A(g_2) - B(\psi) = \psi A(g_1). \tag{6}$$

Die Operationen $A(f)$ und $B(f)$ nennt Lie „Symbole infinitesimaler Transformationen.“ In Betreff ihrer gilt der Satz:

$$A(B(f)) - B(A(f)) = A(g_1)\frac{\partial f}{\partial x} + \{A(g_2) - B(\psi)\}\frac{\partial f}{\partial y},$$

sodaß man die Bedingung (6) auch durch die mit Hilfe einer willkürlich gelassenen Funktion $f(x, y)$ gebildete Gleichung:

$$A(B(f)) - B(A(f)) = A(g_1)\cdot A(f) \tag{7}$$

ersetzen kann.

Wir stellen nun der Lieschen Auffassung der Gleichungen (1) eine zweite, die Benutzung unendlich kleiner Größen vermeidende, an die Seite und entwickeln zuvor den Begriff „System von Parameterlinien“.

---

1) Lie-Scheffers: Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen S. 68.

2) Mathematische Annalen. Bd. 20. S. 361, Bd. 11. S. 490. Vergl. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von Serret-Harnack. Bd. 2. Zweite Hälfte. Leipzig 1885 S. 117.

Durch die Gleichungen:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau) \tag{8}$$

werden zwei einfach unendliche Scharen von Kurven, die Kurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ festgelegt, sofern die Determinante:

$$\frac{\partial f_1}{dt}\frac{\partial f_2}{\partial \tau} - \frac{\partial f_1}{\partial \tau}\frac{\partial f_2}{\partial t},$$

wie vorausgesetzt werden soll, nicht durchgängig verschwindet.

Von diesen beiden Scharen sagen wir, daß sie ein „System von Parameterlinien" bilden.

Wir denken uns die Werte von t und τ durch die Punkte zweier Geraden, der t-Achse und der τ-Achse, versinnbildet. Je nachdem in den Gleichungen (8) τ als Parameter, t als Veränderliche oder t als Parameter, τ als Veränderliche aufgefaßt wird, stellen sie die endlichen Gleichungen der Abbildung der Schar $\tau = \text{const.}$ auf die t-Achse oder der Schar $t = \text{const.}$ auf die τ-Achse dar.

Ersetzt man in $\frac{\partial f_1}{\partial t}$, $\frac{\partial f_2}{\partial t}$ die Größen t und τ durch ihre aus (8) berechneten Ausdrücke in x, y, so entstehe:

$$\frac{dx}{dt} = g_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g_2(x, y). \tag{9}$$

Ersetzt man ebenso in $\frac{\partial f_1}{\partial \tau}$, $\frac{\partial f_2}{d\tau}$ die Größen t und τ durch ihre Werte in x und y, so ergebe sich:

$$\frac{dx}{d\tau} = h_1(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = h_2(x, y). \tag{10}$$

Die Gleichungen (9) stellen die Differentialgleichungen der Abbildung der Schar $\tau = \text{const.}$ auf die t-Achse, die Gleichungen (10) die Differentialgleichungen der Abbildung der Schar $t = \text{const.}$ auf die τ-Achse dar.

Die Funktionen g_1, g_2, h_1, h_2 sind nicht unabhängig von einander, da:

$$\frac{d\,\frac{dx}{dt}}{d\tau} = \frac{d\,\frac{dx}{d\tau}}{dt}, \quad \frac{d\,\frac{dy}{dt}}{d\tau} = \frac{d\,\frac{dy}{d\tau}}{dt}.$$

Dies liefert die beiden für jedes Wertsystem von x und y bestehenden Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x} h_1 + \frac{\partial g_1}{\partial y} h_2 = \frac{\partial h_1}{\partial x} g_1 + \frac{\partial h_1}{\partial y} g_2, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} h_1 + \frac{\partial g_2}{\partial y} h_2 = \frac{\partial h_2}{\partial x} g_1 + \frac{\partial h_2}{\partial y} g_2. \end{cases} \tag{11}$$

Setzt man hier $h_2 = h_1 \psi$, so kommt:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log h_1}{\partial x} g_1 + \dfrac{\partial \log h_1}{\partial y} g_2 = \dfrac{\partial g_1}{\partial x} + \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \psi, \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} + \psi \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial y} - \dfrac{\partial g_1}{\partial x} \right) - \psi^2 \dfrac{\partial g_1}{\partial y} = g_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + g_2 \dfrac{\partial \psi}{\partial y}. \end{cases}$$

Die letzte dieser Beziehungen stimmt überein mit der Gleichung (5).

Nehmen wir die Gleichungen (9) als gegeben an, so folgt aus ihnen zunächst die Differentialgleichung einer einfach unendlichen Kurvenschar: $\frac{dy}{dx} = \frac{g_2}{g_1}$, deren Integralgleichung: $y = \varphi(x, \tau)$ sei. Dadurch geht die erste der Gleichungen (9) in die folgende über:

$$\frac{dx}{dt} = g_1 (x, \varphi(x, \tau)).$$

Um diese zu integrieren, müssen wir für jede Kurve $\tau = \text{const.}$ die x-Koordinate des Punktes kennen, der einem festen, beliebig gewählten, Werte von t, etwa $t = 0$, entspricht. Diese x-Koordinate wird somit eine Funktion von τ, die wir mit $f(\tau)$ bezeichnen wollen. Dann besteht das Integral der letzten Gleichung in der Beziehung:

$$\int_{f(\tau)}^{x} \frac{dx}{g_1(x, \varphi(x, \tau))} = t.$$

Hiernach ist mit den Gleichungen (9) nur eine Kurvenschar $\tau = \text{const.}$ verträglich, aber infolge der willkürlich zu treffenden Wahl von $f(\tau)$ sind mit ihnen ∞^{∞} viele Scharen $t = \text{const.}$ verträglich, und jede der letzteren ist bestimmt, sobald wir den Ort der Punkte kennen, die auf den Kurven $\tau = \text{const.}$ dem Werte $t = 0$ entsprechen.

Die letzte der Gleichungen (12) lehrt, daß die Frage, unter welcher Bedingung die Differentialgleichung: $\frac{dy}{dx} = \psi(x, y)$ die infinitesimale Transformation (9) gestattet, gleichbedeutend ist mit der Frage nach der Bedingung, unter welcher die durch die Gleichung: $\frac{dy}{dx} = \psi(x, y)$ festgelegte Kurvenschar zu den mit den Gleichungen (9) verträglichen Scharen $t = \text{const.}$ gehört. Wir drücken den letzteren Umstand kurz so aus, daß wir sagen, die beiden Scharen der Integralkurven der Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g_2}{g_1},$$

bilden ein System von Parameterlinien, in dem t die Rolle eines Parameters spielt in Gemäßheit mit den Gleichungen (9).

Allgemein seien nun zwei Systeme simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben:

$$\frac{dx}{dt} = g_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g_2(x, y); \quad \frac{dx}{d\tau} = h_1(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = h_2(x, y)\cdot$$

$$(g_1 h_2 - g_2 h_1 \gtrless 0)$$

Unter welchen Bedingungen werden die beiden Scharen von Integralkurven der Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g_2}{g_1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{h_2}{h_1}$$

ein System von Parameterlinien bilden, in dem t oder τ oder t und τ die Rolle eines Parameters spielt in Gemäßheit mit den gegebenen Gleichungen?

Wir schlagen zur Beantwortung dieser Frage einen von dem bisherigen verschiedenen Weg ein.

Ist $f(x, y)$ eine beliebige Funktion von x und y, so hat man:

$$df = \frac{df}{dt} T_1 + \frac{df}{d\tau} T_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} g_1 + \frac{\partial f}{\partial y} g_2\right) T_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2\right) T_2,$$

falls:

$$T_1 = \frac{h_2\,dx - h_1\,dy}{g_1 h_2 - h_1 g_2}, \quad T_2 = \frac{-g_2\,dx + g_1\,dy}{g_1 h_2 - g_2 h_1}.$$

Es wird sich zeigen, daß t oder τ als Parameter auftritt, je nachdem T_1 oder T_2 ein exaktes Differential ist.

Die Ableitungen $\frac{df}{dt}$, $\frac{df}{d\tau}$ sind „Symbole infinitesimaler Transformationen".

Wir schreiben statt $\frac{d\frac{df}{dt}}{d\tau}$ und $\frac{d\frac{df}{d\tau}}{dt}$ bezüglich $\frac{d^2f}{dt\,d\tau}$ und $\frac{d^2f}{d\tau\,dt}$ und finden zunächst:

$$\frac{d^2f}{dt\,d\tau} - \frac{d^2f}{d\tau\,dt} = \left(\frac{dg_1}{d\tau} - \frac{dh_1}{dt}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{dg_2}{d\tau} - \frac{dh_2}{dt}\right)\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{13}$$

Bezeichnen ν_1 und ν_2 integrierende Faktoren von T_1 und T_2, so ist:

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} \dfrac{d \log \nu_1}{d\tau} = \dfrac{h_2\left(\frac{dg_1}{d\tau} - \frac{dh_1}{dt}\right) - h_1\left(\frac{dg_2}{d\tau} - \frac{dh_2}{dt}\right)}{g_1 h_2 - g_2 h_1}, \\[2ex] \dfrac{d \log \nu_2}{dt} = \dfrac{g_2\left(\frac{dg_1}{d\tau} - \frac{dh_1}{dt}\right) - g_1\left(\frac{dg_2}{d\tau} - \frac{dh_2}{dt}\right)}{g_1 h_2 - g_2 h_1}. \end{cases}$$

Berechnet man aus diesen beiden Gleichungen die Differenzen $\frac{dg_1}{d\tau} - \frac{dh_1}{dt}$, $\frac{dg_2}{d\tau} - \frac{dh_2}{dt}$ und setzt ihre Werte in (13) ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 f}{dt\, d\tau} - \frac{d^2 f}{d\tau\, dt} = \frac{d \log \nu_1}{d\tau} \frac{df}{dt} - \frac{d \log \nu_2}{dt} \frac{df}{d\tau}. \tag{15}$$

Für $h_2 = h_1 \psi$ ist:

$$\frac{df}{d\tau} = h_1 A(f)$$

und:

$$\frac{d \log \nu_1}{d\tau} = \frac{h_1^2 (\psi A(g_1) - A(g_2) + B(\psi))}{g_1 h_2 - g_2 h_1},$$

also folgt nach (6), daß bei $\frac{d \log \nu_1}{d\tau} = 0$ die Größe t die Rolle eines Parameters spielt. In diesem Fall ist T_1 ein exaktes Differential, und die Differentialgleichung $dy - \psi dx = 0$ besitzt, einem bekannten Lieschen Satze gemäß, den integrierenden Faktor $\frac{1}{g_1 \psi - g_2}$. Ebenso spielt τ die Rolle eines Parameters, wenn T_2 ein exaktes Differential ist.

Dasselbe Ergebnis wird durch folgende Überlegung gezeitigt. Man nehme

$$\nu_1 T_1 = du, \quad \nu_2 T_2 = dv,$$

sodaß:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{\nu_1} \frac{df}{dt}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{\nu_2} \frac{df}{d\tau}.$$

Aus der Gleichung:

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial u}}{\partial v} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial v}}{\partial u}$$

geht dann unmittelbar die Beziehung (15) hervor. Ist T_1 ein exaktes Differential, so darf man ν_1 gleich 1 nehmen, und es folgt $u = t$. Die Kurven $v = \text{const.}$ fallen also mit den Kurven zusammen, längs deren t veränderlich ist, d. h. t ist ein Parameter.

2. Bisher haben wir uns auf ganz abstraktem Gebiet gehalten, indem über die geometrische Bedeutung der Größen t und τ keinerlei Bestimmung getroffen wurde. Wir geben nun in den Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = g_1, \quad \frac{dy}{dt} = g_2; \quad \frac{dx}{d\tau} = h_1, \quad \frac{dy}{d\tau} = h_2$$

den Größen t und τ die Bedeutung der Bogenlänge der Einzelkurven der durch die Differentialgleichungen:

$$g_2 dx - g_1 dy = 0, \quad h_2 dx - h_1 dy = 0$$

festgelegten Kurvenscharen und schreiben zur Unterscheidung von dem allgemeinen Fall statt t und τ bezüglich σ_1 und σ_2. Unsere Voraussetzung erfordert, daß für jedes Wertepaar x, y die Beziehungen gelten:

$$g_1^2 + g_2^2 = 1; \quad h_1^2 + h_2^2 = 1.$$

Wenn jetzt σ_1 als Parameter aufgefaßt werden kann, fallen die durch die Gleichung:

$$h_2 dx - h_1 dy = 0$$

bestimmten Kurven mit den Kurven $\sigma_1 = \text{const.}$ zusammen, d. h. sie entstehen, wenn auf den durch die Gleichung: $g_2 dx - g_1 dy = 0$ bestimmten Kurven von einer willkürlich gewählten, aber nicht zu ihnen gehörenden Kurve aus dieselbe Bogenlänge abgetragen wird.

Es fragt sich nun, ob sich nicht der betrachtete Fall durch eine Beziehung zwischen endlichen, geometrischen Größen kennzeichnen läßt.

Zur Beantwortung dieser Frage ist die geometrische Bedeutung der Ableitungen $\frac{d \log \nu_1}{d\sigma_2}$ und $\frac{d \log \nu_2}{d\sigma_1}$ aufzufinden.

Wir setzen abkürzend:

$$g_1 = \cos\alpha, \quad g_2 = \sin\alpha, \quad h_1 = \cos\beta, \quad h_2 = \sin\beta, \quad \beta - \alpha = \varphi$$

und denken die Bezeichnungen so gewählt, daß β größer ausfällt als α.

Nach (14) ergibt sich:

$$\frac{d \log \nu_1}{d\sigma_2} = \frac{\frac{d\beta}{d\sigma_1} - \cos\varphi \frac{d\alpha}{d\sigma_2}}{\sin\varphi}, \qquad \frac{d \log \nu_2}{d\sigma_1} = \frac{\cos\varphi \frac{d\beta}{d\sigma_1} - \frac{d\alpha}{d\sigma_2}}{\sin\varphi}.$$

Um den geometrischen Inhalt der hier auftretenden rechten Seiten zu erkennen, führen wir neben den gegebenen Kurvenscharen die Scharen ihrer senkrechten Durchdringungskurven ein und nennen die Bogenlängen der letzteren σ_3 und σ_4. Eine Kurve, deren Bogenlänge mit σ_λ bezeichnet ist, möge kurz eine „Kurve (σ_λ)“ genannt werden.

Für die senkrechten Durchdringungskurven der Kurven (σ_1) nehmen wir:

$$\frac{dx}{d\sigma_3} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha, \quad \frac{dy}{d\sigma_3} = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha,$$

aber für die senkrechten Durchdringungskurven der Kurven (σ_2) sei:

$$\frac{dx}{d\sigma_4} = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\beta, \quad \frac{dy}{d\sigma_4} = \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\beta.$$

Diese Festlegung hat den Vorteil, daß für $\varphi = \pi/2$ die zu wachsenden Bogenlängen der Kurven (σ_3) und (σ_4) gehörenden Halbtangenten mit denen der Kurven (σ_2) und (σ_1) zusammenfallen.

Der Krümmungsradius der Kurve (σ_λ) soll mit ϱ_λ bezeichnet und als positiv oder negativ in Rechnung gesetzt werden, je nachdem sich der entsprechende Krümmungsmittelpunkt in dem eben festgelegten positiven oder negativen Teil der Normalen der Kurve (σ_λ) befindet. Dann folgt durch Anwendung der ersten Frenetschen Formel:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{d\alpha}{d\sigma_1}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{d\beta}{d\sigma_2}, \quad \frac{1}{\varrho_3} = -\frac{d\alpha}{d\sigma_3}, \quad \frac{1}{\varrho_4} = \frac{d\beta}{d\sigma_4}.$$

Man kann nun die Ableitungen einer Funktion f von x und y nach den Bogenlängen der Kurven (σ_3) und (σ_4) durch ihre Ableitungen nach den Bogenlängen der Kurven (σ_1) und (σ_2) ausdrücken. Aus dem System:

$$\frac{df}{d\sigma_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha, \quad \frac{df}{d\sigma_2} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\beta$$

folgt nämlich:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sin\beta\frac{df}{d\sigma_1} - \sin\alpha\frac{df}{d\sigma_2}}{\sin\varphi}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\cos\beta\frac{df}{d\sigma_1} + \cos\alpha\frac{df}{d\sigma_2}}{\sin\varphi}.$$

Da nun:

$$\frac{df}{d\sigma_3} = -\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{df}{d\sigma_4} = \sin\beta\frac{\partial f}{\partial x} - \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y},$$

so ergibt sich:

$$\frac{df}{d\sigma_3} = \frac{-\cos\varphi\frac{df}{d\sigma_1} + \frac{df}{d\sigma_2}}{\sin\varphi}, \quad \frac{df}{d\sigma_4} = \frac{\frac{df}{d\sigma_1} - \cos\varphi\frac{df}{d\sigma_2}}{\sin\varphi}.$$

Nehmen wir in der ersten dieser Gleichungen f gleich α, in der zweiten f gleich β, so folgt:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma_2} = -\frac{\sin\varphi}{\varrho_3} + \frac{\cos\varphi}{\varrho_1}, \quad \frac{d\beta}{d\sigma_1} = \frac{\sin\varphi}{\varrho_4} - \frac{\cos\varphi}{\varrho_2},$$

und damit erhalten wir das gesuchte Ergebnis in der Gestalt:

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{d\log v_1}{d\sigma_2} = \dfrac{1}{\sin\varphi}\left\{\dfrac{\sin\varphi}{\varrho_4} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho_2} - \cos\varphi\left(\dfrac{\cos\varphi}{\varrho_1} - \dfrac{\sin\varphi}{\varrho_3}\right)\right\} \\ \dfrac{d\log v_2}{d\sigma_1} = \dfrac{1}{\sin\varphi}\left\{\cos\varphi\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varrho_4} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho_2}\right) - \left(\dfrac{\cos\varphi}{\varrho_1} - \dfrac{\sin\varphi}{\varrho_3}\right)\right\}. \end{cases}$$

Man kann diesen Gleichungen noch eine einfachere Form geben. Die Verbindungslinie (L_1) der Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_1) und (σ_3) hat die Gleichung:

$$(\xi - x)\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho_3} - \frac{\sin\alpha}{\varrho_1}\right) + (\eta - y)\left(\frac{\sin\alpha}{\varrho_3} + \frac{\cos\alpha}{\varrho_1}\right) = 1.$$

Die Tangente der Kurve (σ_4) möge die Linie (L_1) im Punkte (P_4) schneiden, dessen Abscisse hinsichtlich des Punktes (x, y) t_4 sei, sodaß:

$$x + t_4 \sin\beta, \quad y - t_4 \cos\beta$$

die Koordinaten von (P_4) sind. Dann hat man:

$$\frac{1}{t_4} = \frac{\sin\varphi}{\varrho_3} - \frac{\cos\varphi}{\varrho_1}.$$

Die Verbindungslinie (L_2) der Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_2) und (σ_4) hat die Gleichung:

$$(\xi - x)\left(\frac{\sin\beta}{\varrho_2} + \frac{\cos\beta}{\varrho_4}\right) - (\eta - y)\left(\frac{\cos\beta}{\varrho_2} - \frac{\sin\beta}{\varrho_4}\right) = 1.$$

Die Tangente der Kurve (σ_3) möge die Linie (L_2) im Punkte (P_3) schneiden, und die Abscisse von (P_3) hinsichtlich des Punktes (x, y) sei t_3. Dann ist:

$$\frac{1}{t_3} = \frac{\sin\varphi}{\varrho_4} - \frac{\cos\varphi}{\varrho_2}.$$

Wir erhalten jetzt anstatt (16):

$$\frac{d\log v_1}{d\sigma_2} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{t_3} + \frac{\cos\varphi}{t_4}\right), \quad \frac{d\log v_2}{d\sigma_1} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{t_3} + \frac{1}{t_4}\right)$$

und haben damit folgenden Satz gefunden: Besitzt die Bogenlänge σ_1 die Bedeutung eines Parameters, so besteht die Gleichung:

$$\frac{\cos\varphi}{t_4} + \frac{1}{t_3} = 0.$$

Besitzt die Bogenlänge σ_2 die Bedeutung eines Parameters, so besteht die Gleichung:

$$\frac{\cos\varphi}{t_3} + \frac{1}{t_4} = 0.$$

Im ersten dieser Fälle ist die Gerade $(P_3\,P_4)$ parallel der Tangente der Kurve (σ_2), im zweiten ist sie parallel der Tangente der Kurve (σ_1). Besitzen die Bogenlängen σ_1 und σ_2 gleichzeitig die Bedeutung von Parametern, so verschwindet sowohl $\frac{1}{t_3}$ wie $\frac{1}{t_4}$. Jetzt steht die Tangente der Kurve (σ_2) senkrecht auf der Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_1) und (σ_3), und die Tangente der Kurve (σ_1) ist senkrecht zur Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_2) und (σ_4). Im betrachteten Fall hat man es mit den sogenannten „Translationskurven" zu tun, die, wie bekannt[1]), das einzige

1) A. Voß, Mathem. Annalen Bd. 19. S. 18.

System von Parameterlinien bilden, für welches das Quadrat des Linearelements der Ebene die Form erhält:

$$ds^2 = d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 + 2\cos\varphi\, d\sigma_1\, d\sigma_2.$$

Sind nämlich x und y solche Funktionen von σ_1 und σ_2, die den Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{d\sigma_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma_2}\right)^2 = 1$$

genügen, so folgt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \sigma_1\, \partial \sigma_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \sigma_1\, \partial \sigma_2} = 0$$

und damit:

$$x = f(\sigma_1) + g(\sigma_2), \quad y = \int \sqrt{1 - f'(\sigma_1)^2}\, d\sigma_1 + \int \sqrt{1 - g'(\sigma_2)^2}\, d\sigma_2 .$$

Der Name „Translationskurven" rührt von der Art her, wie das betrachtete System von zwei willkürlich gewählten Kurven erzeugt werden kann. Man betrachte neben dem festen Koordinatensystem der (x, y) ein bewegliches der (ξ, η)-Koordinaten, dessen Achsen denen des festen parallel sind, sodaß: $x = a + \xi$, $y = b + \eta$.

Man nehme nun in dem beweglichen System eine beliebige Kurve mit den Gleichungen: $\xi = \psi_1(v)$, $\eta = \psi_2(v)$ und lasse den Punkt (a, b) die beliebig gewählte Kurve mit den Gleichungen: $a = \varphi_1(u)$, $b = \varphi_2(u)$ beschreiben. Die erste Kurve erzeugt so eine Kurvenschar $u = \text{const.}$ mit den Gleichungen:

$$x = \varphi_1(u) + \psi_1(v), \quad y = \varphi_2(u) + \psi_2(v).$$

Die Schar $v = \text{const.}$ wird durch die Bewegung der Kurve mit den Gleichungen $\xi = \varphi_1(u)$, $\eta = \varphi_2(u)$ im veränderlichen System erzeugt, wenn der Anfangspunkt des letzteren die durch $a = \psi_1(v)$, $b = \psi_2(v)$ bestimmte Kurve durchläuft. Will man statt u und v die Bogenlängen σ_1 und σ_2 einführen, so drücke man u durch σ_1 und v durch σ_2 aus mit Hilfe der Gleichungen:

$$\sigma_1 = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\varphi_1'(u)^2 + \varphi_2'(u)^2}\, du, \quad \sigma_2 = \int_{v_0}^{v} \sqrt{\psi_1'(v)^2 + \psi_2'(v)^2}\, dv.$$

Die Bogenlängen σ_1 sind dann von der Kurve mit den Gleichungen

$$x = \varphi_1(u_0) + \psi_1(v), \quad y = \varphi_2(u_0) + \psi_2(v),$$

die Bogenlängen σ_2 von der Kurve mit den Gleichungen

$$x = \varphi_1(u) + \psi_1(v_0), \quad y = \varphi_2(u) + \psi_2(v_0)$$

aus gerechnet.

Ein dem obigen entsprechender Satz gilt für das System der Kurven (σ_3) und (σ_4).

Wir nehmen hier:

$$g_1 = -\sin\alpha, \quad g_2 = \cos\alpha, \quad h_1 = \sin\beta, \quad h_2 = -\cos\beta.$$

$$T_3 = \frac{\cos\beta\, dx + \sin\beta\, dy}{\sin\varphi}, \quad T_4 = \frac{\cos\alpha\, dx + \sin\alpha\, dy}{\sin\varphi},$$

und bezeichnen mit ν_3 und ν_4 integrierende Faktoren der Differentialformen T_3 und T_4.

Dann folgt:

$$\frac{d\log\nu_3}{d\sigma_4} = \frac{-\cos\varphi\frac{d\alpha}{d\sigma_4} - \frac{d\beta}{d\sigma_3}}{\sin\varphi}, \quad \frac{d\log\nu_4}{d\sigma_3} = \frac{\frac{d\alpha}{d\sigma_4} + \cos\varphi\frac{d\beta}{d\sigma_3}}{\sin\varphi},$$

ferner:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma_4} = \frac{\sin\varphi}{\varrho_1} + \frac{\cos\varphi}{\varrho_3}, \quad \frac{d\beta}{d\sigma_3} = -\frac{\sin\varphi}{\varrho_2} - \frac{\cos\varphi}{\varrho_4}.$$

Die Tangente der Kurve (σ_2) bez. (σ_1) schneide die Gerade (L_1) bez. (L_2) in einem Punkte (P_2) bez. (P_1), dessen Abscisse hinsichtlich des Punktes (x, y) mit t_2 bez. t_1 bezeichnet werde.

Es ist dann:

$$\frac{1}{t_2} = \frac{d\alpha}{d\sigma_4}, \quad \frac{1}{t_1} = -\frac{d\beta}{d\sigma_3},$$

und wir haben den Satz: Besitzt im System der senkrechten Durchdringungskurven der gegebenen Scharen die Bogenlänge σ_3 oder σ_4 die Bedeutung eines Parameters, so besteht die Gleichung: $\frac{\cos\varphi}{t_2} - \frac{1}{t_1} = 0$ oder $\frac{1}{t_2} - \frac{\cos\varphi}{t_1} = 0$. Im ersten dieser Fälle ist die Gerade $(P_1 P_2)$ parallel der Tangente der Kurve (σ_4), im zweiten ist sie parallel der Tangente der Kurve (σ_3). Besitzen die Bogenlängen σ_3 und σ_4 gleichzeitig die Bedeutung von Parametern, so verschwindet sowohl $\frac{1}{t_1}$ wie $\frac{1}{t_2}$. Jetzt steht die Tangente der Kurve (σ_3) senkrecht zur Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_2) und (σ_4), während die Tangente der Kurve (σ_4) senkrecht ist zur Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_1) und (σ_3).

Schlußbemerkung. Betrachtungen, die den vorigen entsprechen, lassen sich an zwei auf einer beliebigen Fläche gelegene Kurvenscharen anknüpfen (vgl. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III D 3 S. 163). Es gelten dann gleichlautende Sätze, wenn nur der Begriff „Krümmungshalbmesser“ durch den Begriff „Halbmesser

der geodätischen Krümmung“ ersetzt wird. Die Mittel zum Beweise sind von mir in den Mathematischen Annalen Bd. 42, S. 505 entwickelt. Der Fall, in dem die Bogenlängen beider Scharen als Parameter auftreten, liefert die von Herrn A. Voß „äquidistant“ genannten Kurvensysteme. (Math. Annalen Bd. 19, S. 3.) Den hier geltenden Satz habe ich in meiner Schrift „Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen“ S. 40 aufgestellt.

Münster i. W., den 22. Mai 1902.

Über symmetrische Funktionen von unabhängigen Variablen.

Von HANS WILHELM PEXIDER in Göttingen.

Es handelt sich in diesem Aufsatz um die Aufstellung der Beziehungen, welche zwischen den Funktionen (einer oder mehrerer Variablen), die in einer Funktion auftreten, bestehen müssen, wenn diese Funktion von Funktionen in Bezug auf die sämtlichen, von einander unabhängigen Argumente, einzeln oder in Reihen genommen, symmetrisch ist; im speziellen, um die Aufsuchung von Eigenschaften symmetrischer Funktionen. Es erscheint vorteilhaft, die symmetrischen Funktionen in Gruppen geteilt zu behandeln.

1. *Formen erster Gattung.* — Sei die Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ symmetrisch in allen von einander unabhängigen Argumenten $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Vertauscht man zwei aus dieser Reihe beliebig herausgegriffene Argumente $x_\varkappa$ und x_λ unter einander, so muß der Symmetrie wegen

$$(1) \qquad F(\cdots x_\varkappa, x_\lambda, \cdots) - F(\cdots x_\lambda, x_\varkappa, \cdots) = 0$$

sein und zwar für alle $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n$, wobei man $\lambda > \varkappa$ annehmen darf, um Wiederholungen zu vermeiden.

Die Relation (1) besteht bei allen Wertsystemen der Variablen x; sie ist also auch erfüllt, wenn man für alle Variablen x außer $x_\varkappa$ und x_λ beliebige Konstanten setzt. Alsdann ergibt die Identität (1) eine Beziehung, welche zwischen den Funktionen der Variablen $x_\varkappa$ und x_λ, die in F auftreten, bestehen muß, und zwar identisch in $x_\varkappa$ und x_λ, wenn die Funktion F symmetrisch sein soll. Indem man nun $\varkappa < \lambda = 1, 2, \cdots, n$ setzt, die übrig bleibenden x aber als konstant ansieht, so erhält man zwischen den Funktionen je einer und den

Funktionen jeder andern Variablen eine Beziehung der Art (1). Auf diese Weise lassen sich, unter der Voraussetzung, daß die Gleichungen (1) die Funktionen der einen Variablen durch Funktionen, die als Funktionen der anderen Variablen in (1) vorkommen, auszudrücken gestatten, die sämtlichen in F auftretenden Funktionen durch die Funktionen einer einzigen Variablen, etwa x_1, ausdrücken.

Ist speziell die Funktion F der Form $F[a_1(x_1), a_2(x_2), \ldots, a_n(x_n)]$, so daß, wenn die Komplexionen $i_1 i_2 \ldots i_n$ und $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n$ irgend welche Permutationen der Zahlenfolge $1, 2, \ldots, n$ bedeuten, die Identitäten

$$(2) \quad F[a_1(x_{i_1}), a_2(x_{i_2}), \ldots, a_n(x_{i_n})] = F[a_1(x_{\varkappa_1}), a_2(x_{\varkappa_2}), \ldots, a_n(x_{\varkappa_n})]$$

statthaben, dann besitzt die Funktion F folgende Eigenschaften. Ist nämlich $\varkappa_1 = i_1$, und differenziert man (2) nach $a_1(x_{i_1})$, so erhält man die Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial a_1} F[a_1(x_{i_1}), \ldots, a_n(x_{i_n})] = \frac{\partial}{\partial a_1} F[a_1(x_{i_1}), a_2(x_{\varkappa_2}), \ldots, a_n(x_{\varkappa_n})]$$

und zwar für alle Permutationen $i_1 i_2 \ldots i_n$ und $i_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, die bloß an die eine Bedingung gebunden sind, in ihren ersten Elementen übereinzustimmen, und allgemeiner, wenn $\varkappa_\nu = i_\nu$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial a_\nu} F[a_1(x_{i_1}), \ldots, a_n(x_{i_n})] = \frac{\partial}{\partial a_\nu} F[a_1(x_{\varkappa_1}), \ldots, a_\nu(x_{i_\nu}), \ldots a_n(x_{\varkappa_n})],$$

d. h. der partielle Differentialquotient der Funktion F, genommen nach irgend einer Funktion a, etwa a_ν, bleibt ungeändert bei allen Permutationen der Indices-Gruppe $i_1 \ldots i_{\nu-1} i_{\nu+1} \ldots i_n$, ist also symmetrisch in allen x außer x_{i_ν}. Sei x_{i_ν} mit x_{μ_1} und $\frac{\partial}{\partial a_\nu} F(\cdots a_\nu(x_{i_\nu}), \cdots)$ mit $F_1(\nu_1, \mu_1)$ bezeichnet; dann ist die Funktion $F_1(\nu_1, \mu_1)$ symmetrisch in $n-1$ Argumenten x. Deshalb ist analog der Differentialquotient

$$\frac{\partial}{\partial a_\lambda} F_1(\nu_1, \mu_1) = \frac{\partial}{\partial a_\lambda} F_1[a_1(x_{i_1}), \cdots, a_{\nu_1}(x_{\mu_1}), \cdots, a_\lambda(x_{i_\lambda}), \cdots, a_n(x_{i_{n-1}})],$$

oder, wenn man $\lambda = \nu_2$, $i_\lambda = \mu_2$ setzt, die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial a_{\nu_1} \partial a_{\nu_2}} F[a_1(x_{i_1}), \cdots, a_{\nu_1}(x_{\mu_1}), \cdots, a_{\nu_2}(x_{\mu_2}), \cdots, a_n(x_{i_{n-1}})]$$

eine symmetrische Funktion der $n-2$ Argumente $x_1, \ldots, x_n$, x_{μ_1} und x_{μ_2} ausgeschlossen; u. s. f. Allgemein wird die m-te Ableitung

$$(4) \quad \frac{\partial^m F[\ldots a_{\nu_1}(x_{\mu_1}), \ldots, a_{\nu_2}(x_{\mu_2}), \ldots, a_{\nu_m}(x_{\mu_m}), \ldots]}{\partial a_{\nu_1} \partial a_{\nu_2} \ldots \partial a_{\nu_m}}$$

für $m \leqq n-2$ eine symmetrische Funktion der $n-m$, von den x_{μ_1}, $x_{\mu_2}, \ldots, x_{\mu_m}$ verschiedenen Argumenten x der Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sein müssen.

Es können nun die Indices der Funktionen a_ν und simultan die Indices der zugehörigen Variablen x in Reihen einander gleich sein, also

$$\nu_1 = \nu_2 = \cdots \nu_{\alpha_1} \equiv \nu', \; \nu_{\alpha_1+1} = \cdots = \nu_{\alpha_2} \equiv \nu'', \cdots, \nu_{\alpha_{\varepsilon-1}} = \cdots = \nu_{\alpha_\varepsilon} \equiv \nu^{(\varepsilon)},$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots \mu_{\alpha_1} \equiv \mu', \; \mu_{\alpha_1+1} = \cdots = \mu_{\alpha_2} \equiv \mu'', \cdots, \mu_{\alpha_{\varepsilon-1}} = \cdots = \mu_{\alpha_\varepsilon} \equiv \mu^{(\varepsilon)},$$

wobei $\alpha_\varepsilon = m$ ist; setzt man der Kürze wegen

$$\varkappa_\tau = \alpha_\tau - \alpha_{\tau-1}, \quad \tau = 1, 2, \ldots, \varepsilon, \quad \alpha_0 = 0,$$

so ist die aus (4) hervorgehende Ableitung

$$\text{(4a)} \qquad \frac{\partial^m F[\ldots a_{\nu'}(x_{\mu'}), \ldots a_{\nu^{(\varepsilon)}}(x_{\mu^{(\varepsilon)}}), \ldots]}{\partial^{\varkappa_1} a_{\nu'} \partial^{\varkappa_2} a_{\nu''} \ldots \partial^{\varkappa_\varepsilon} a_{\nu^{(\varepsilon)}}}$$

symmetrisch in allen x (der Anzahl $n-\varepsilon$), die von $x_{\mu'}, \ldots x_{\mu^{(\varepsilon)}}$ verschieden sind. Es ist klar, daß in diesem Falle $m > n$ werden kann, wenn nur die Ungleichung $n - \varepsilon > 1$ befriedigt ist.

Die Funktionen $a_\varkappa(x)$ sind wohl nicht als willkürlich anzunehmen; denn es müssen die Relationen (1) erfüllt sein.

Ist nun $a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_n \equiv 1$, so gehen die Ableitungen nach den Funktionen a in Differentialquotienten nach den Variablen x über. Man hätte diesen Fall ursprünglich wählen können, um zu denselben Resultaten zu gelangen; es ist nur des Weiteren wegen dieser Weg gewählt worden.

Die anfänglichen Betrachtungen mögen an drei einfachen Fällen näher erläutert werden.

1. Sei f eine symmetrische Funktion der Form

$$\text{(5)} \qquad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \cdots + \varphi_n(x_n).$$

Die Relation (1) lautet hier

$$\varphi_\varkappa(x_\varkappa) + \varphi_\lambda(x_\lambda) - \varphi_\varkappa(x_\lambda) - \varphi_\lambda(x_\varkappa) = 0,$$

woraus folgt

$$\varphi_\varkappa(x_\varkappa) - \varphi_\lambda(x_\varkappa) = \varphi_\varkappa(x_\lambda) - \varphi_\lambda(x_\lambda) = \text{Konstante } c_{\varkappa\lambda}$$

d. h.

$$\varphi_\varkappa(x) = \varphi_\lambda(x) + c_{\varkappa\lambda}$$

für $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n$.

Setzt man nun $\lambda = 1$ und successive $\varkappa = 2, 3, \cdots, n$, so erhält man sämtliche Funktionen $\varphi_\varkappa$ durch φ_1 ausgedrückt, so daß vermöge dieser Beziehungen die Funktion f die Form erhält

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi(x_\varkappa) + C, \tag{6}$$

wenn man einfach φ statt φ_1 und C statt $\sum_{\varkappa=2}^{n} c_{\varkappa 1}$ schreibt.

2. Damit die Funktion

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \cdots \varphi_n(x_n) \tag{7}$$

symmetrisch sei, sind die Beziehungen (1), d. h. die Relationen

$$\varphi_\varkappa(x_\varkappa)\, \varphi_\lambda(x_\lambda) - \varphi_\varkappa(x_\lambda)\, \varphi_\lambda(x_\varkappa) = 0, \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

zu erfüllen. Aus diesen folgt nun

$$\frac{\varphi_\varkappa(x_\varkappa)}{\varphi_\lambda(x_\varkappa)} = \frac{\varphi_\varkappa(x_\lambda)}{\varphi_\lambda(x_\lambda)} = c_{\varkappa\lambda},$$

d. h.

$$\varphi_\varkappa(x) = c_{\varkappa\lambda}\, \varphi_\lambda(x)$$

für $\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n$, so daß, wenn man $\lambda = 1$ und successive $\varkappa = 2, 3, \cdots, n$ setzt und die so erhaltenen Beziehungen auf die Funktion f anwendet, diese sich in die einfache Gestalt

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = C \prod_{\varkappa=1}^{n} \varphi(x_\varkappa) \tag{8}$$

transformiert, wenn man kurz φ_1 mit φ und $c_2 c_3 \ldots c_n$ mit C bezeichnet.

3. Bevor zu einem dritten Falle übergegangen wird, seien, des Verständnisses wegen, einige Definitionen gegeben.

Es sollen Funktionen einer Variablen x, zwischen denen eine lineare Relation der Form

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n \varphi_n(x) = \text{Konstante} \tag{9}$$

mit nicht verschwindenden Koeffizienten $\alpha_\varkappa$ für alle Werte von x zwischen zwei gegebenen Grenzen stattfindet, als in den gegebenen Grenzen l i n e a r a b h ä n g i g genannt werden. Sind bloß die Koeffizienten $\alpha_\varkappa, \alpha_\lambda, \ldots, \alpha_\nu$ von Null verschieden, so enthält die Reihe der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ eine Gruppe linear abhängiger Funktionen $\varphi_\varkappa, \varphi_\lambda, \cdots, \varphi_\nu$; es ist wohl zulässig, daß eine Reihe von Funktionen mehrere solcher Gruppen enthält.

Existiert aber weder zwischen den Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, noch irgend einer Gruppe von ihnen eine Relation der Form (9), so

sollen sie in den gegebenen Grenzen linear unabhängig genannt werden.

Es ist des Folgenden wegen notwendig gewesen, diese Definitionen anzuführen, da man in der Theorie der linearen Differentialgleichungen dem Begriff „linear unabhängige Funktionen" einen etwas anderen Inhalt beilegt.

Sei nun $F(x, y)$ eine symmetrische Funktion der unabhängigen Variablen x und y von der Form

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x) b_k(y) + a_n(x) + b_n(y), \tag{10}$$

und sie sei bereits so transformiert, daß die Funktionen a_k samt a_n von einander linear unabhängig sind. Durch Vertauschung von x mit y erhält man nach Subtraktion der also erhaltenen Identität von (10) die Relation

$$\sum_{k=1}^{m} [a_k(x) b_k(y) - a_k(y) b_k(x)] + a_n(x) - a_n(y) - b_n(x) + b_n(y) = 0. \tag{11}$$

Den Funktionen b_k kann man stets die Form geben

$$\begin{cases} b_1 = c_{11} a_1 + c_{12} a_2 + \cdots + c_{1n} a_n + b_1', \\ b_2 = c_{21} a_1 + c_{22} a_2 + \cdots + c_{2n} a_n + b_2', \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_n = c_{n1} a_1 + c_{n2} a_2 + \cdots + c_{nn} a_n + b_n', \end{cases} \tag{12}$$

wobei die Koeffizienten c_{ik} konstante Größen, einschließlich Null, bedeuten und $b_1', b_2', \ldots, b_n'$ von den Funktionen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ linear unabhängig sind. Setzt man diese Ausdrücke in (11) ein, so erhält man die Gleichung

$$\begin{cases} \quad a_1(x)\,[b_1 - c_{11} a_1 - c_{21} a_2 - \cdots - c_{m1} a_m - c_{n1}] \\ + a_2(x)\,[b_2 - c_{12} a_1 - c_{22} a_2 - \cdots - c_{m2} a_m - c_{n2}] \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + a_m(x)\,[b_m - c_{1m} a_1 - c_{2m} a_2 - \cdots - c_{mm} a_m - c_{nm}] \\ + a_n(x)\,[1 - c_{1n} a_1 - c_{2n} a_2 - \cdots - c_{mn} a_m - c_{nn}] \\ - [a_1 b_1'(x) + a_2 b_2'(x) + \cdots + b_n'(x)] - a_n + b_n = 0, \end{cases} \tag{13}$$

wobei überall φ statt $\varphi(y)$ geschrieben wurde. Da nun die Funktionen a_k unter einander und auch von den Funktionen b_k' linear unabhängig

sind, so müssen in (13) die Koeffizienten der Funktionen $a_k(x)$ identisch verschwinden, d. h. es muß

$$b_i = c_{1i}a_1 + c_{2i}a_2 + \cdots + c_{mi}a_m + c_{ni}, \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{14}$$

$$1 = c_{1n}a_1 + c_{2n}a_2 + \cdots + c_{mn}a_m + c_{nn}, \tag{15}$$

$$a_1 b'(x) + \cdots + a_m b_m'(x) + b_n'(x) + a_n - b_n = 0 \tag{16}$$

sein. Aus der Gleichung (15) folgt ohne weiters

$$c_{1n} = c_{2n} = \cdots = c_{mn} = 0, \quad c_{nn} = 1;$$

da aber außerdem die Systeme (12) und (14) einander gleich sein sollen, so müssen die Matrices der Determinanten

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1m} & c_{2m} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

einander identisch gleich, d. h. es muß $c_{ik} = c_{ki}$ sein. Demnach sind diese zwei Determinanten symmetrisch. Des weiteren folgt daraus, daß

$$b_1' = c_{n1}, b_2' = c_{n2}, \ldots, b_m' = c_{nm}$$

ist, und aus der letzten Gleichung des Systems (12) und der Relation (16), daß

$$b_n'(x) = b_n'(y) = \text{Konstante } c_{00}.$$

Die Funktionen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ lassen sich demnach in die Gestalt

$$b_i = \sum_{k=1}^{m} c_{ki}a_k + c_{ni}, \quad c_{ki} = c_{ik} \tag{17}$$

und b_n in die Gestalt

$$b_n = \sum_{i=1}^{m} c_{ni}a_i + a_n + c_{00} \tag{18}$$

überführen. Vermöge dieser Beziehungen wird die Funktion $F(x, y)$ auf die Form

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} c_{ik}a_i(x)a_k(y) + \sum_{i=1}^{m} c_{ni}[a_i(x) + a_i(y)] + a_n(x) + a_n(y) + c_{00}, \tag{19}$$

wobei $c_{ki} = c_{ik}$ ist, gebracht, die sich, wenn man c_{0i} für c_{ni} einsetzt und $a_0(x) = a_0(y) = 1$ festlegt, folgendermaßen kürzer schreiben läßt:

$$F(x, y) = \sum_{i,k=0}^{m} c_{ik}a_i(x)a_k(y) + a_n(x) + a_n(y), \quad c_{ik} = c_{ki}, \quad a_0 = 1. \tag{20}$$

Erteilt man der Summe $\sum\limits_{i,k}$ in der Weise eine Quadratform, daß das Glied mit dem konstanten Koeffizienten c_{ik} in der $(i+1)$-ten Zeile und $(k+1)$-ten Kolonne steht, so sieht man, daß die Determinante, gebildet aus den Koeffizienten dieser Quadratform, d. h. die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0m} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m0} & c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

eine symmetrische ist.

Damit also eine Funktion der Form $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k(x) b_k(y) + a_n(x) + b_n(y)$ eine symmetrische sei, ist es notwendig (und hinreichend), daß sich die Funktionen der einen Variablen so transformieren lassen, daß sie zu linearen Funktionen der Funktionen, die mit der anderen Variablen als Argument vorkommen, werden, daß dabei das Schema der neuen Koeffizienten der Produkte, in Quadratform gesetzt, die Matrix einer symmetrischen Determinante bildet, und daß unter den Summanden jede Funktion bloß einer Variablen auch als Funktion der anderen Variablen figuriert.

Ist speziell

$$a_n(x) \equiv b_n(x),$$

so folgt aus (18)

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ni} a_i + c_{00} \equiv \sum_{i=0}^{m} c_{0i} a_i = 0.$$

Da jedoch die Funktionen a_i von einander linear unabhängig sind, so muß

$$c_{0i} = 0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, m)$$

und zufolge $c_{ki} = c_{ik}$ auch $c_{i0} = 0$ sein für $i = 0, 1, \cdots, m$. Ist außerdem $a_n = 0$, so geht (20) in die Form über:

$$F(x, y) = \sum_{i,k=1}^{m} c_{ik} a_i(x) a_k(y), \quad c_{ki} = c_{ik}. \tag{20a}$$

2. *Formen zweiter Gattung.* — Sei y_k eine Funktion von unter einander unabhängigen Argumenten $x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{ks}$ und F eine Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_n$, und zwar symmetrisch in den Argumentenreihen $x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{ks}$ für $k = 1, 2, \cdots, n$ und $s \geqq 2$. Demzufolge wird, sobald

die Komplexion $i_1 i_2 \cdots i_n$ irgend eine Permutation der n Zahlen $1, 2, \cdots, n$ bedeutet, die Gleichung

$$(21)\quad F[y_1(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1s}), y_2(x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2s}), \cdots, y_n(x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{ns})]$$
$$= F[y_1(x_{i_1 1}, x_{i_1 2}, \cdots, x_{i_1 s}), y_2(x_{i_2 1}, x_{i_2 2}, \cdots, x_{i_2 s}), \cdots, y_n(x_{i_n 1}, x_{i_n 2}, \cdots, x_{i_n s})]$$

stets erfüllt sein.

Es sei $i_k = 1$, und man bilde successive die partiellen Ableitungen dieser Identität nach $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1s}$. Die Funktion linkerseits werde mit F, die Funktion rechterseits mit $F(i)$ bezeichnet. Alsdann erhält man durch Differentiation das System von Gleichungen

$$(22)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_{11}} = \frac{\partial F(i)}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_{11}}, \\ \frac{\partial F}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_{12}} = \frac{\partial F(i)}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_{12}}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \frac{\partial F}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_{1s}} = \frac{\partial F(i)}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_{1s}}. \end{cases}$$

Versteht man unter dem Symbol $\frac{\partial(y_1, y_k)}{\partial(x_{1\lambda}, x_{1\mu})}$ die bekannte Jacobische Funktionaldeterminante, gebildet aus den Differentialquotienten der Funktionen $y_1, y_\varkappa$ nach $x_{1\lambda}, x_{1\mu}$, so ersieht man auf Grund des Gleichungssystems (22), daß

$$(23)\quad \frac{\partial(y_1, y_\varkappa)}{\partial(x_{1\lambda}, x_{1\mu})} = 0$$

ist für $\varkappa = 1, 2, \cdots, n$ und $\lambda, \mu = 1, 2, \cdots, s$, wobei man $\lambda < \mu$ annehmen darf, um Wiederholungen zu vermeiden.

Die Minoren dieser Funktionaldeterminanten, d. h. die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial y_k}{\partial x}$ können nun nicht verschwinden, da sonst die Funktionen y_k nicht die sämtlichen Argumente $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{ks}$ enthalten würden. Dann existiert aber nach einem bekannten Satze über Funktionaldeterminanten zwischen den y_k und y_1 je eine Beziehung, und zwar sind jedenfalls die y_k durch y_1 ausdrückbar. Man hat demnach die Relationen

$$(24)\quad y_k = a_k(y_1), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

unter der Annahme $a_1(y_1) \equiv y_1$.

Man setze der Einfachheit wegen

$$y_1(x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{ks}) = \eta_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

alsdann besagt die Gleichung (21), die nun folgendermaßen lautet:

$$(25)\qquad F[a_1(\eta_1), a_2(\eta_2), \ldots, a_n(\eta_n)] = F[a_1(\eta_{i1}), a_2(\eta_{i2}), \ldots, a_n(\eta_{in})],$$

daß bei der angenommenen Symmetrie und unter der Voraussetzung, daß F und y_k differenzierbare Funktionen sind, die Funktion F auch in den Argumenten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ symmetrisch sein müsse. Man sieht, daß dies die schon am Anfang behandelte Form (3) ist, daß also die symmetrischen Funktionen der Form (21) im wesentlichen auf die Form (3) zurückführen. Es sind demnach die Funktionen a_k nicht willkürlich, sondern sie haben Gleichungen der Art (1) zu genügen, und die Ableitungen nach den Funktionen a müssen so beschaffen sein, wie die Differentialquotienten (4a). Es tritt hier aber eine Willkürlichkeit auf und zwar in Bezug auf die Funktionen η; diese sind keinen Bedingungen unterworfen. Es läßt sich also y_1 ganz beliebig wählen.

Es sei hier ein einfacher Fall $n = 2$ behandelt. Für die Funktion y_1 wähle man etwa den Ausdruck

$$\alpha(x_{11}, x_{12})^{\beta(x_{13})} + \gamma(x_{14}, \ldots, x_{1s}),$$

und es sei

$$(26)\qquad F(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(y_1)\psi_i(y_2)$$

eine symmetrische Funktion in den Argumentenreihen $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1s}$ und $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2s}$; setzt man $y_1 = \eta_1$, so muß zufolge (24) $y_2 = a(\eta_2)$ sein. Man erhält aus (26) die Identität

$$F[\eta_1, a(\eta_2)] = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\eta_1)\psi_i[a(\eta_2)],$$

wobei F eine symmetrische Funktion in η_1 und η_2 sein muß. Nach (20a) läßt sie sich alsdann, wenn φ_i von einander linear unabhängige Funktionen bedeuten, in der Form schreiben:

$$F = \sum_{i,k=1}^{m} c_{ik}\varphi_i(\eta_1)\varphi_k(\eta_2), \qquad c_{ik} = c_{ki}.$$

Die symmetrische Funktion $F(y_1, y_2)$ hat demnach die Gestalt

$$(27)\qquad \begin{cases} F(y_1, y_2) = \sum_{i,k=1}^{m} c_{ik}\varphi_i[\alpha(x_{11}, x_{12})^{\beta(x_{13})} + \gamma(x_{14}, \ldots, x_{1s})] \\ \qquad \times \varphi_k[\alpha(x_{21}, x_{22})^{\beta(x_{23})} + \gamma(x_{24}, \ldots x_{2s})], \qquad c_{ik} = c_{ki}. \end{cases}$$

3. *Formen dritter Gattung.* — Sei y_k eine Funktion von unabhängigen Variabeln $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{ks}$ und F eine Funktion von $y_1, y_2, \ldots, y_n$, und zwar symmetrisch in den Argumentenreihen $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}$ für $k = 1, 2, \ldots, s$, $s \geqq 2$. Demnach gilt die Gleichung

$$(28)\begin{cases} F[y_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1s}), y_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2s}), \ldots, y_n(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ns})] \\ = F[y_1(x_{1i_1}, x_{1i_2}, \ldots, x_{1i_s}), y_2(x_{2i_1}, x_{2i_2}, \ldots, x_{2i_s}), \ldots, y_n(x_{ni_1}, x_{ni_2}, \ldots, x_{ni_s})] \end{cases}$$

identisch in allen x und zwar für alle Permutationen $i_1 i_2 \ldots i_s$ der Zahlenfolge $1, 2, \ldots, s$.

Sei $y_k(x_{ki_1}, x_{ki_2}, \ldots, x_{ki_s})$ mit $y_k(i)$ bezeichnet, die linke Seite der Identität (28) mit F, die rechte Seite mit $F(i)$; alsdann erhält man durch Differentiation das folgende System von Gleichungen

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y_k(1)} \cdot \dfrac{\partial y_k(1)}{\partial x_{k1}} = \dfrac{\partial F(i)}{\partial y_k(i)} \cdot \dfrac{\partial y_k(i)}{\partial x_{k1}}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_k(1)} \cdot \dfrac{\partial y_k(1)}{\partial x_{k2}} = \dfrac{\partial F(i)}{\partial y_k(i)} \cdot \dfrac{\partial y_k(i)}{\partial x_{k2}}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_k(1)} \cdot \dfrac{\partial y_k(1)}{\partial x_{ks}} = \dfrac{\partial F(i)}{\partial y_k(i)} \cdot \dfrac{\partial y_k(i)}{\partial x_{ks}}, \end{cases}$$

woraus folgt, daß

$$\frac{\partial(y_k(1), y_k(i))}{\partial(x_{k\lambda}, x_{k\mu})} = 0$$

ist für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, s$, wobei man wieder $\lambda < \mu$ annehmen darf, um Wiederholungen vorzubeugen. Indem also alle Funktionaldeterminanten, gebildet aus den Differentialquotienten der Funktionen $y_k(1)$ und $y_k(i)$ nach je zwei von den sämtlichen Variabeln $x_{k1}, \ldots, x_{ks}$, verschwinden, aber ihre Minoren der Vorraussetzung halber nicht verschwinden, so ist jedes $y_k(i)$ durch $y_k(1)$ ausdrückbar, d. h. es ist, wenn man $y_k(1) = \eta_k$ setzt,

$$(30)\qquad y_k(i_1 i_2 \ldots i_s) = a^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_s}(\eta_k),$$

(unter der Voraussetzung $a^{(k)}_{12\ldots s} \equiv 1$ für $k = 1, 2, \ldots, n$), und zwar für alle Permutationen $i_1 i_2 \ldots i_s$ der Zahlenfolge $1, 2, \ldots, s$. Weil nun das System (29) für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ besteht, so gelten auch die Beziehungen (30) für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$. Die Identität (28) wird nun lauten

$$F[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n] = F\left[a^{(1)}_{i_1 i_2 \ldots i_s}(\eta_1), a^{(2)}_{i_1 i_2 \ldots i_s}(\eta_2), \ldots, a^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_s}(\eta_n)\right].$$

Zieht man hierin nur zwei von den Variablen η in Betracht, etwa η_k und η_ν, und sieht die übrigen als konstant an, so existiert zwischen den Funktionen $a_i^{(k)}$ und $a_i^{(\nu)}$ für jede Permutation (i) eine Relation der Form

$$(31)\qquad F[\ldots\eta_k, \eta_\nu\ldots] - F\left[\ldots a_i^{(k)}(\eta_k), a_i^{(\nu)}(\eta_\nu)\ldots\right] = 0,$$

die identisch in η_k und η_ν erfüllt sein muß. Sieht man nun auch von der Variablen η_ν als einer in Bezug auf η_k beliebigen Konstante ab, so ist $a_i^{(k)}$ eine bestimmte, durch die Gleichung

$$(32)\qquad F[\eta_k; \ldots] - F\left[a_i^{(k)}(\eta_k); \ldots\right] = 0$$

definierte Funktion von η_k, die auch mehrdeutig sein kann. Die Funktion η_k bleibt dabei willkürlich; die Funktionen $a_i^{(k)}$ und $a_i^{(\nu)}$ hängen aber zufolge (31) von einander ab.

Wenn nun einmal die Funktionen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ als gegeben vorliegen, so sind $a_i^{(k)}$ wegen (32) bestimmte Funktionen dieser η_k und willkürlicher Konstanten, deren Anzahl höchstens $n-1$ ist. Man nehme an, die Funktionen $a_i^{(k)}$ seien eindeutige Lösungen der Gleichungen (32). Alsdann haben die in diesen Lösungen auftretenden arbiträren Konstanten noch den Identitäten (31) zu genügen. Man setze weiter voraus, daß dies System für das System der Konstanten nur eine einzige Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ zuläßt, ohne dabei notwendigerweise die Willkürlichkeit sämtlicher Konstanten aufzuheben. In diesem Falle ist für ein bestimmtes k die Lösung $a_i^{(k)} = f_k(\eta_k; a_1, a_2, \ldots)$ für alle Permutationen $i_1 i_2 \ldots i_s$ der Voraussetzungen wegen eine und dieselbe; es ist aber $a_{12\ldots s}^{(k)}(\eta_k) \equiv \eta_k$. Daraus folgt, daß

$$y_k(x_{ki_1}, x_{ki_2}, \ldots, x_{ki_s}) = y_k(x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{ks})$$

ist, d. h. im Falle, daß die Gleichungssysteme (32) und (31) eine einzige Lösung zulassen, ist die wichtige Folge davon, daß die Funktionen y_k selbst symmetrische Funktionen sein müssen — natürlich stets unter der Annahme der Differenzierbarkeit der Funktionen F als auch der Funktionen y_k.

Zur Erläuterung des Vorstehenden sei folgende einfache Frage gelöst: Welchen Typus nimmt die Funktion

$$(33)\qquad F = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi_\nu(x_{1\nu}) \cdot \left[\sum_{\nu=1}^{s} \psi_\nu(x_{2\nu})\right]^3 = \eta_1 \cdot \eta_2$$

an, wenn sie in den Argumentenpaaren $(x_{1\nu}, x_{2\nu})$ für $\nu = 1, 2, \ldots, s$ symmetrisch sein soll?

Vorerst hat man nach (32)

$$a_i^{(1)}(\eta_1) = c_i \eta_1, \quad a_i^{(2)}(\eta_2) = d_i \eta_2 \tag{34}$$

und mit Bezug auf (31)

$$c_i d_i = 1, \quad d_i = \frac{1}{c_i}.$$

Man wähle nun eine solche Permutation (i) von $1, 2, \ldots, s$, in welcher der Reihenfolge nach bloß λ und $\varkappa$ mit einander vertauscht erscheinen; dann folgen aus (34), wenn man gleich alle Variabeln außer $x_\varkappa$, x_λ als arbiträre Konstanten ansieht, die Relationen

$$\left\{\begin{aligned} &C'_{\varkappa\lambda} + \varphi_\varkappa(x_{1\lambda}) + \varphi_\lambda(x_{1\varkappa}) = c_{\varkappa\lambda}[\varphi_\varkappa(x_{1\varkappa}) + \varphi_\lambda(x_{1\lambda}) + C'_{\varkappa\lambda}],\\ &[D'_{\varkappa\lambda} + \psi_\varkappa(x_{2\lambda}) + \psi(x_{2\varkappa})]^3 = \frac{1}{c_{\varkappa\lambda}}[\psi_\varkappa(x_{2\varkappa}) + \psi_\lambda(x_{2\lambda}) + D'_{\varkappa\lambda}]^3.\end{aligned}\right. \tag{35}$$

Aus der ersten dieser Beziehungen folgt weiter

$$\varphi_\varkappa(x_{1\lambda}) - c_{\varkappa\lambda}\varphi_\lambda(x_{1\lambda}) = c_{\varkappa\lambda}\varphi_\varkappa(x_{1\varkappa}) - \varphi_\lambda(x_{1\varkappa}) + C''_{\varkappa\lambda} = C_{\varkappa\lambda},$$

d. h.

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_\varkappa(x) &= c_{\varkappa\lambda}\varphi_\lambda(x) + C_{\varkappa\lambda},\\ c_{\varkappa\lambda}\varphi_\varkappa(x) &= \varphi_\lambda(x) + C_{\varkappa\lambda} - C''_{\varkappa\lambda}\end{aligned}\right. \tag{36}$$

und aus diesen Gleichungen

$$(c^2_{\varkappa\lambda} - 1)\varphi_\lambda(x) = C_{\varkappa\lambda}(1 - c_{\varkappa\lambda}) - C''_{\varkappa\lambda}.$$

Nun ist der Koeffizient bei φ_λ entweder als von Null verschieden oder gleich Null anzunehmen. Im ersteren Falle wäre $\varphi_\lambda(x) =$ Konstante und zwar für $\lambda = 1, 2, \ldots, s$, d. h. die Funktion η_1 wäre überhaupt eine Konstante, was trivial ist. Im letzteren Falle hat man

$$c^2_{\varkappa\lambda} - 1 = 0, \quad \text{also} \quad c_{\varkappa\lambda} = \pm 1.$$

Nun behandle man analog die zweite Gleichung von (35). Man hat $c_{\varkappa\lambda} = \pm 1$ zu setzen, indem der Fall $c_{\varkappa\lambda} \neq \pm 1$ als trivial ausgeschlossen wurde, und gelangt zunächst zu der Gleichung

$$\psi_\varkappa(x_{2\lambda}) + \psi_\lambda(x_{2\varkappa}) + D'_{\varkappa\lambda} = N[\psi_\varkappa(x_{2\varkappa}) + \psi_\lambda(x_{2\lambda}) + D'_{\varkappa\lambda}],$$

wenn $N = \sqrt[3]{\pm 1}$ ist, weiter zu

$$\psi_\varkappa(x_{2\lambda}) - N\psi_\lambda(x_{2\lambda}) = N\psi_\varkappa(x_{2\varkappa}) - \psi_\lambda(x_{2\varkappa}) + D''_{\varkappa\lambda} = D_{\varkappa\lambda},$$

d. h.

$$\left\{\begin{aligned} \psi_\varkappa(x) &= N\psi_\lambda(x) + D_{\varkappa\lambda}, \\ N\psi_\varkappa(x) &= \psi_\lambda(x) + D_{\varkappa\lambda} - D''_{\varkappa\lambda}, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

und aus diesen Gleichungen folgt

$$(N^2 - 1)\psi_\lambda(x) = D_{\varkappa\lambda}(1 - N) - D''_{\varkappa\lambda}.$$

Wenn man gleichfalls von dem trivialen Fall $\psi_\lambda(x) = \text{const.}$ absieht, so muß

$$N^2 - 1 = 0$$

werden, d. h.

$$N = \sqrt[3]{\pm 1} = \pm 1$$

sein. Die dritte Wurzel kann hier also nur ihren reellen Wert annehmen. Man hat demnach die zwei Fälle zu unterscheiden:

$$c_{\varkappa\lambda} = 1, \quad \sqrt[3]{c_{\varkappa\lambda}} = 1; \qquad c_{\varkappa\lambda} = -1, \quad \sqrt[3]{c_{\varkappa\lambda}} = -1.$$

1. Sei $c_{\varkappa\lambda} = 1$; dann folgen aus (36) und (37) die Beziehungen

$$\varphi_\varkappa(x) = \varphi_\lambda(x) + C_{\varkappa\lambda}, \quad C''_{\varkappa\lambda} = 0,$$
$$\psi_\varkappa(x) = \psi_\lambda(x) + D_{\varkappa\lambda}, \quad D''_{\varkappa\lambda} = 0$$

und zwar für $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, s$. Setzt man nun $\lambda = 1$ und $\varkappa = 2, 3, \ldots, s$, so erhält man die Funktionen $\varphi_\varkappa$ resp. $\psi_\varkappa$ als lineare Funktionen von $\varphi_1 \equiv \varphi$ resp. $\psi_1 \equiv \psi$ allein, und indem man die Summen $\sum\limits_{\varkappa=2}^{s} C_{\varkappa 1}$ resp. $\sum\limits_{\varkappa=2}^{s} D_{\varkappa 1}$ mit C resp. D bezeichnet, so erhält man, diese Resultate auf (33) anwendend, für die Funktion F die Gestalt

$$F = \left[\sum_{\nu=1}^{s} \varphi(x_{1\nu}) + C\right]\left[\sum_{\nu=1}^{s} \psi(x_{2\nu}) + D\right]^3. \tag{38}$$

2. Sei $c_{\varkappa\lambda} = -1$; alsdann ergeben die Relationen (36) und (37) die Beziehungen

$$\varphi_\varkappa(x) = -\varphi_\lambda(x) + C_{\varkappa\lambda}, \quad C''_{\varkappa\lambda} = 2C_{\varkappa\lambda},$$
$$\psi_\varkappa(x) = -\psi_\lambda(x) + D_{\varkappa\lambda}, \quad D''_{\varkappa\lambda} = 2D_{\varkappa\lambda}.$$

Zufolge (35) ist nun

$$2C'_{\varkappa\lambda} = 2\sum{}' \varphi_{1\nu}(x_{1\nu}) = -2C_{\varkappa\lambda},$$

$$2D'_{\varkappa\lambda} = 2\sum{}' \psi_{1\nu}(x_{2\nu}) = -2D_{\varkappa\lambda},$$

wobei Σ' die Summe aller Funktionen φ resp. ψ mit Ausnahme von $\varphi_\varkappa$ und φ_λ resp. $\psi_\varkappa$ und ψ_λ bedeutet, d. h. in diesem Falle $c_{\varkappa\lambda} = -1$ sind notwendigerweise sämtliche übrigen Funktionen φ resp. ψ identisch gleich Konstanten. Unter der Annahme $c_{\varkappa\lambda} = -1$ ist daher für s nur der Wert $s = 2$ zulässig; die Funktion F hängt also nur von den zwei Argumentenpaaren $(x_{1\varkappa}, x_{2\varkappa})$, $(x_{1\lambda}, x_{2\lambda})$ ab, und in diesen ist sie symmetrisch. Man erhält sonach für η_1 und η_2 die Ausdrücke:

$$\eta_1 = -C_{\varkappa\lambda} + \varphi_\varkappa(x_{1\varkappa}) - \varphi_\varkappa(x_{1\lambda}) + C_{\varkappa\lambda},$$

$$\eta_2 = [-D_{\varkappa\lambda} + \psi_\varkappa(x_{2\varkappa}) - \psi_\varkappa(x_{2\lambda}) + D_{\varkappa\lambda}]^3$$

und für F die Gestalt:

$$F = [\varphi_\varkappa(x_{1\varkappa}) - \varphi_\varkappa(x_{1\lambda})]\,[\psi_\varkappa(x_{2\varkappa}) - \psi_\varkappa(x_{2\lambda})]^3. \tag{39}$$

Ist aber s im vornherein gegeben und von 2 verschieden, dann kann $c_{\varkappa\lambda}$ bloß den Wert $+1$ annehmen. In diesen Fällen $(s \neq 2)$ haben demnach die Gleichungssysteme (31) und (32) (unter F die Funktion (33) verstanden) eine einzige Lösung in den $a_i^{(k)}$ und den Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; demnach müssen η_1 sowie η_2 für sich allein symmetrische Funktionen in allen Argumenten $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1s}$ resp. $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2s}$ sein.

Die Formel (38) zeigt nun, daß dies tatsächlich erfüllt ist, indem die Ausdrücke $\Sigma\varphi(x_{1\nu})$ und $\Sigma\psi(x_{2\nu})$ symmetrische Funktionen ihrer Argumente sind. Nur in dem Falle, daß $s = 2$ ist, hat man zwei Lösungen, und die Funktionen η_1, η_2 sind dann im allgemeinen keine symmetrischen. Faktisch hatte man gefunden, daß für $s = 2$ die Funktion F zwei verschiedene Typen annehmen kann, und zwar entweder den Typus

$$F = [\varphi(x_{11}) + \varphi(x_{12}) + C]\,[\psi(x_{21}) + \psi(x_{22}) + D]^3 \tag{40}$$

oder den Typus

$$F = [\varphi(x_{11}) - \varphi(x_{12})]\,[\psi(x_{21}) - \psi(x_{22})]^3.$$

Göttingen, 20. Januar 1902.

Über diejenigen Rotationsflächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden.

Von A. Tachauer in Gunzenhausen.

1. *Die allgemeinen Vofsschen Flächen.* — Das Problem, diejenigen Flächen zu finden, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden, wurde zuerst von Vofs[1]) auf eine direkte Weise gelöst.

Bezeichnet man nämlich[2]) die Fundamentalgröfsen 1. Ordnung einer auf die Gaufsschen Oberflächenkoordinaten u und v bezogenen Fläche mit E, F, G und die Fundamentalgröfsen 2. Ordnung mit D, D', D'', das Krümmungsmafs mit K, so müssen für diese Flächen die sechs Beziehungen[3]) erfüllt sein:

$$(1)\begin{cases} D'=0, \quad FE_u+EE_v-2EF_u=0, \quad FG_v+GG_u-2GF_v=0, \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\sqrt{G}}{\sqrt{\sigma}}\right)=0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\sqrt{E}}{\sqrt{\sigma}}\right)=0, \quad DD''=K\sigma. \end{cases}$$

Mit diesen Flächen, den sogenannten V-Flächen, stehen die pseudosphärischen Flächen, die wir als S-Flächen bezeichnen wollen, in enger Beziehung durch folgenden Satz:

Jeder vorgegebenen, auf ihre Haupttangentenkurven als Parameterlinien bezogenen S-Fläche ist durch Parallelismus der Normalen eine ganze Klasse von auf ein konjugiertes System geodätischer Linien bezogenen V-Flächen assoziiert, wobei der ihnen gemeinsame Winkel ω der Parameterlinien der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$(2)\qquad \omega_{uv}=\sin\omega$$

1) A. Vofs: Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden (Sitzungsberichte d. math. phys. Klasse d. kgl. bayr. Akad. d. Wiss. zu München, 1888, 18. Band, S. 96 u. ff.)

2) Wir wollen in folgender Abhandlung uns der Bezeichnungsweise von Bianchi bedienen, wie er sie in seinem Lehrbuch: Differentialgeometrie, übersetzt von Lukat (Teubner 1896—98) durchgeführt hat.

3) Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{\partial E}{\partial u}=E_u, \quad \frac{\partial F}{\partial u}=F_u \text{ etc.}, \quad \frac{\partial E}{\partial v}=E_v, \quad \text{ebenso} \quad \frac{\partial x}{\partial u}=x_u, \quad \frac{\partial x}{\partial v}=x_v \text{ etc.}$$

ferner

$$x_u^2+y_u^2+z_u^2=\sum x_u^2, \quad x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v=\sum x_ux_v \text{ etc.}, \quad \sigma=EG-F^2.$$

genügt. Jede Lösung M der Differentialgleichung:

$$(3) \qquad M_{uv} \sin \omega + M_u \omega_v + M_v \omega_u = 0$$

liefert eine V-Fläche, deren Fundamentalgröfsen aus den Formeln:

$$(4) \quad \begin{cases} \sqrt{E} = \dfrac{M_u}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}; \qquad \sqrt{G} = \dfrac{M_v}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}; \qquad F = \sqrt{EG} \cos \omega, \\ D = -k\sqrt{E} \sin \omega; \quad D'' = -\dfrac{1}{k} \sqrt{G} \sin \omega; \quad D' = 0, \end{cases}$$

und deren Koordinaten x, y, z durch Quadratur aus den Formeln:

$$(5) \quad \begin{cases} x_u = -\dfrac{k\sqrt{E}}{\sin \omega} \left(\dfrac{1}{k^2} X_u + \cos \omega \, X_v\right), \\ x_v = -\dfrac{\sqrt{G}}{k \sin \omega} (k^2 X_v + \cos \omega \, X_u) \end{cases} \quad \text{(analog für } y \text{ und } z)$$

gefunden werden, wobei X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen sind und k eine beliebige Konstante bedeutet.

Umgekehrt läfst sich zu einer vorgegebenen ganzen Klasse von auf das konjugierte System geodätischer Linien bezogenen V-Flächen die auf ihre Haupttangentenkurven bezogene S-Fläche mit den Fundamentalgröfsen:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathsf{E} = R^2 k^2; \quad \mathsf{F} = R^2 \cos \omega; \quad \mathsf{G} = R^2 \dfrac{1}{k^2}, \\ \mathsf{D} = 0; \quad \mathsf{D}' = R \sin \omega; \quad \mathsf{D}'' = 0 \end{cases}$$

aus den Formeln:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi_u = -\dfrac{R}{\sin \omega} (k^2 X_v + \cos \omega \, X_u), \\ \xi_v = -\dfrac{R}{\sin \omega} \left(\dfrac{1}{k^2} X_u + \cos \omega \, X_v\right) \end{cases} \quad \text{(analog für } \eta \text{ und } \zeta)$$

durch Quadratur ermitteln, wo ξ, η, ζ die Koordinaten der S-Fläche sind und R eine beliebige Konstante bedeutet.

Während die S-Fläche das konstante negative Krümmungsmafs: $\mathsf{K} = -\frac{1}{R^2}$ besitzt, ergiebt sich für das Krümmungsmafs der V-Fläche: $K = \frac{1}{\sqrt{EG}}$, wobei das Vorzeichen von K von den Vorzeichen der die Gleichungen (4) befriedigenden Gröfsen $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ abhängt.

Dieser Satz ist von Vofs nur für den Fall $k = 1$ abgeleitet worden, gilt aber auch für beliebiges k. Hierbei sind diejenigen V-Flächen, für welche k beliebig ist, Biegungen der V-Flächen für den Fall $k = 1$ und zwar derart, dafs das konjugierte System geodätischer

Linien erhalten bleibt. Hierbei ist zu bemerken, daſs die einer gebogenen V-Fläche assoziierte S-Fläche keine Biegung der der ursprünglichen V-Fläche assoziierten S-Fläche ist.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wollen wir die Rotationsflächen V_R, die von Voſs nur kurz erwähnt werden, deren assoziierte S-Flächen, sowie bei spezieller Wahl der durch die Integration eingeführten Konstanten die gebogenen V-Flächen nebst ihren S-Flächen aufsuchen und die Gestalt aller dieser Flächen, sowie den Verlauf der Parameterlinien näher betrachten.

2. *Bestimmung sämtlicher Flächen* V_R. — Die Koordinaten x, y, z einer jeden Rotationsfläche lassen sich in der Form:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = f(r)$$

darstellen, wo r der Radius des durch den Punkt x, y, z gehenden Parallelkreises und φ die geographische Länge des Meridians ist. Soll diese Fläche eine V-Fläche sein, so müssen wir r und φ als Funktionen der konjugierten geodätischen Parameterkurven u und v auffassen, die sechs Gleichungen (1) bilden, und, wenn es uns gelingt, aus diesen r und φ als Funktionen von u und v, sowie f als Funktion von r zu ermitteln, so liefert uns f die Flächen V_R, und r und φ geben die Lage der Meridiane und Breitenkreise zu dem konjugiert-geodätischen Systeme u und v an.

Zunächst ist zu bemerken, daſs die letzte Gleichung, wie man nach Berechnung der Fundamentalgröſsen leicht verifizieren kann, eine Folge der übrigen Gleichungen ist, also hier fortgelassen werden kann. Ferner dürfen wir bei der Integration der vierten und fünften Gleichung, da wir von den Biegungen zunächst absehen wollen, $\frac{D\sqrt{G}}{\sqrt{\sigma}} = \frac{D''\sqrt{E}}{\sqrt{\sigma}} = -1$ setzen.

Diese fünf Gleichungen lauten dann:

$$\frac{f'' r_u r_v + r f' \varphi_u \varphi_v}{\sqrt{1 + f'^2}} = 0,$$

$$r(r_v\varphi_u - r_u\varphi_v)[r(1+f'^2)(r_{uu}\varphi_u - \varphi_{uu}r_u) + (rf'f'' - 2\overline{1+f'^2}).r_u^2\varphi_u - r^2\varphi_u{}^3] = 0,$$

$$r(r_u\varphi_v - r_v\varphi_u)[r(1+f'^2)(r_{vv}\varphi_v - \varphi_{vv}r_v) + (rf'f'' - 2\overline{1+f'^2})\, r_v^2\varphi_v - r^2\varphi_v{}^3] = 0,$$

$$\frac{\sqrt{f''^2 r_u^2 + f'^2(1+f'^2)\varphi_u^2}}{1+f'^2} = -1,$$

$$\frac{\sqrt{f''^2 r_v^2 + f'^2(1+f'^2)\varphi_v^2}}{1+f'^2} = -1.$$

Damit die zweite und dritte Gleichung erfüllt wird, mufs, da das Verschwinden der beiden ersten Faktoren keine Fläche liefern würde, die eckige Klammer $= 0$ sein. Um diese Gleichungen zu integrieren, setzen wir zunächst in der zweiten Gleichung $\left(\frac{r_u}{\varphi_u}\right)^2 = \zeta$, so dafs

$$r_{uu}\varphi_u - \varphi_{uu}r_u = \frac{\varphi_u^3}{2r_u}\zeta_u$$

wird. Multiplizieren wir dann die Gleichung mit $\frac{2r_u}{r^5\varphi_u^3}$, so erhalten wir

$$\frac{1+f'^2}{r^4}\zeta_u + \frac{2rf'f''-4(1+f'^2)}{r^5}r_u\zeta - \frac{2}{r^3}r_u = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$\frac{1+f'^2}{r^4}\zeta + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{V^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1+f'^2}{r^4}\left(\frac{r_u}{\varphi_u}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{V^2}.$$

Ebenso gelangen wir durch Integration der dritten Gleichung zu der folgenden:

$$\frac{1+f'^2}{r^4}\left(\frac{r_v}{\varphi_v}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{U^2}.$$

Hierbei sind U und V beliebige Funktionen von u bezw. v. Die obigen fünf Gleichungen gehen also in die folgenden über:

$$(8)\qquad f''r_ur_v + rf'\varphi_u\varphi_v = 0,$$

$$(9)\qquad (1+f'^2)V^2r_u^2 - r^2(r^2-V^2)\varphi_u^2 = 0,$$

$$(10)\qquad (1+f'^2)U^2r_v^2 - r^2(r^2-U^2)\varphi_v^2 = 0,$$

$$(11)\qquad f''^2r_u^2 + f'^2(1+f'^2)\varphi_u^2 = (1+f'^2)^2,$$

$$(12)\qquad f''^2r_v^2 + f'^2(1+f'^2)\varphi_v^2 = (1+f'^2)^2.$$

Bestimmen wir aus den Gleichungen (9) bis (12) die Gröfsen r_u^2, r_v^2, φ_u^2, φ_v^2 und setzen diese Werte in die aus (8) resultierende Gleichung:

$$\frac{r_u^2r_v^2}{\varphi_u^2\varphi_v^2} = \frac{r^2f'^2}{f''^2}$$

ein, so erhalten wir:

$$\frac{(r^2-U^2)(r^2-V^2)}{U^2V^2} = \frac{f'^2(1+f'^2)}{r^2f''^2}.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von f und kann, da f, als Funktion von r, u und v nicht explizite enthalten darf, nur dann befriedigt sein, wenn U und V konstant sind. Setzen wir also:

$$U = a \quad \text{und} \quad V = b,$$

so wird f durch zweimalige Integration gefunden aus der Gleichung:

$$(13) \qquad \frac{f''}{f'(1+f'^2)} = \frac{ab}{r\sqrt{(r^2-a^2)(r^2-b^2)}}.$$

r und φ erhalten wir dann durch je eine weitere Quadratur aus den Gleichungen[1]):

$$(14) \qquad \begin{cases} r_u = \frac{1+f'^2}{rf''}a, & \varphi_u = \frac{\sqrt{1+f'^2}}{rf'}\sqrt{r^2-a^2}, \\ r_v = \frac{1+f'^2}{rf''}b, & \varphi_v = -\frac{\sqrt{1+f'^2}}{rf'}\sqrt{r^2-b^2}. \end{cases}$$

Hierbei setzen wir fest, daſs a gröſser als b ist, wozu wir, ohne das Problem einzuschränken, berechtigt sind, da sich sonst lediglich u mit v vertauschen würde. Ferner erkennen wir, daſs wir, um *reelle* Lösungen zu erhalten, — und nur solche sollen hier behandelt werden — r gröſser als a nehmen müssen. Es gilt also die Ungleichung[2]):

$$(15) \qquad b \overline{\lessgtr} a \overline{\lessgtr} r \overline{\lessgtr} \infty.$$

Wir wollen zunächst voraussetzen, daſs a *und* b *beide positiv* sind. Setzen wir dann zur Abkürzung:

$$\lambda = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}},$$

so wird durch die Substitution:

$$(16) \qquad t = 2\lambda^2 + 1 - \frac{ab}{r^2}$$

die Differentialgleichung (13) in die folgende:

$$\frac{f''dr}{f'(1+f'^2)} = \frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{t^2-4\lambda^2(\lambda^2+1)}}$$

übergeführt. Die erste Integration liefert:

$$(17) \qquad f' = \frac{c}{\sqrt{t-c^2-\sqrt{t^2-4\lambda^2(\lambda^2+1)}}}.$$

Bilden wir f'' und setzen die Werte von f' und f'', sowie den aus (16) sich ergebenden Wert von r in die zur Bestimmung

1) Das Vorzeichen von φ_v rührt daher, daſs die Gleichung (8) erfüllt sein muſs. Wählen wir in der Gleichung (13) für die Wurzel das positive Vorzeichen, so erhält φ_v das negative.

2) Bis zu diesem Resultate gelangte Voſs in seiner oben genannten Abhandlung.

von r dienenden Gleichungen (14) ein, so erhalten wir zur Ermittlung von t:

$$au + bv = \frac{c\sqrt{ab}}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2\lambda^2+1-t\sqrt{t^2-4\lambda^2(\lambda^2+1)}}\sqrt{t-c^2-\sqrt{t^2-4\lambda^2(\lambda^2+1)}}}.$$

Setzen wir noch:

$$\sqrt{t^2-4\lambda^2(\lambda^2+1)} = t - \frac{2\lambda^2(\lambda^2+1)}{\cos^2\frac{\omega}{2}+\lambda^2},$$

sodaß:

$$t = \frac{\cos^4\frac{\omega}{2}+2\lambda^2\cos^2\frac{\omega}{2}+\lambda^2(2\lambda^2+1)^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}+\lambda^2} \tag{18}$$

wird, so gilt für ω die Gleichung:

$$au + bv = -\frac{\sqrt{ab}}{2}\int\frac{d\omega}{\sqrt{\frac{2\lambda^2(\lambda^2+1)-c^2\lambda^2}{c^2}-\cos^2\frac{\omega}{2}}}.$$

Führen wir schließlich statt der Konstanten c eine andere Konstante C ein durch die Substitution:

$$C^2 = \frac{2\lambda^2(\lambda^2+1)-c^2\lambda^2}{c^2},$$

so wird die Abhängigkeit der Funktion ω von den Variabeln u und v festgelegt durch die Gleichung:

$$au + bv = -\frac{\sqrt{ab}}{2}\int\frac{d\omega}{\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}. \tag{19}$$

Haben wir diese Quadratur ausgeführt, was wir später tun wollen, dann läßt sich aus (18) t und aus (16) r, ebenso aus (17) f vermittelst der Größe r als Funktion von u und v ermitteln.

Wir wollen alle in Betracht kommenden Funktionen zunächst als Funktionen von ω betrachten und erst durch ω hindurch als von u und v abhängig auffassen.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$T = \sqrt{\cos^2\frac{\omega}{2}+\lambda^2} \quad \text{und} \quad \Lambda = \sqrt{C^2+\lambda^2}, \tag{20}$$

so ist, da

$$f' = \frac{T}{\sqrt{C^2 - \cos^2 \frac{\omega}{2}}},$$

Flächen V_R

$$(21)\quad r = 2\sqrt{ab}\,\frac{T}{\sin\omega} \quad \text{und}^{1)} \quad f = -\frac{1}{2\sqrt{ab}} \int \frac{(a\cos\omega + b)\,(b\cos\omega + a)}{\sin^2\omega \sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\, d\omega.$$

Da ferner:

$$d\omega = -2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}\;\frac{a\,du + b\,dv}{\sqrt{ab}}$$

ist, so wird:

$$(22)\qquad \varphi = \Lambda\left(\frac{au - bv}{\sqrt{ab}} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}}{2}\int \frac{d\omega}{T^2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\right).$$

Diese Formeln bestimmen sämtliche Flächen V_R. Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß, falls a positiv und b negativ ist, $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{-ab}$ und Winkel ω in den Supplementswinkel übergeht. Die anderen Fälle bewirken lediglich eine Vertauschung von u und v.

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung werden:

$$(23)\quad \begin{cases} E = \dfrac{4aA^2(a\cos\omega + b)^2}{b\sin^4\omega}; \quad F = \dfrac{4A^2(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}{\sin^4\omega}\cos\omega; \\ G = \dfrac{4bA^2(b\cos\omega + a)^2}{a\sin^4\omega}; \end{cases}$$

die Normale hat die Richtungskosinus:

$$(24)\qquad X = \frac{T}{\Lambda}\cos\varphi; \quad Y = \frac{T}{\Lambda}\sin\varphi; \quad Z = -\frac{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{\Lambda};$$

die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung haben die Werte:

$$(25)\quad D = -\frac{2a\Lambda(a\cos\omega + b)}{\sqrt{ab}\sin\omega}; \quad D' = 0; \quad D'' = -\frac{2b\Lambda(b\cos\omega + a)}{\sqrt{ab}\sin\omega}.$$

Was nun den Gültigkeitsbereich von ω anlangt, so muß infolge der Ungleichung (15) die Grenzbedingung:

$$(26)\qquad \frac{a-b}{2a} \leqq \cos^2\frac{\omega}{2} \leqq 1$$

bestehen.

---

1) Die Ausführung dieses Integrals, sowie noch einiger weiterer Integrale, unterlassen wir, da wir derselben im weiteren nicht bedürfen.

Um ferner die Vorzeichen von $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ zu bestimmen, beachten wir, daß die Funktionen:

$$M_u = \sqrt{E}\cos^2\frac{\omega}{2} \quad \text{und} \quad M_v = \sqrt{G}\cos^2\frac{\omega}{2}$$

die Differentialgleichung:

$$M_{uv}\sin\omega + M_u\omega_v + M_v\omega_u = 0$$

befriedigen müssen. Dies ist aber, wie die Ausführung der Rechnung zeigt, nur dann der Fall, wenn $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ gleiches Vorzeichen besitzen. Daraus folgt, daß das Krümmungsmaß: $K = \frac{1}{\sqrt{EG}}$ stets positiv ist. Also sind *alle Flächen* V_R *elliptisch gekrümmt.*

3. *Die assoziierten S-Flächen.* — Wenden wir die Formeln (7) an, so erhalten die Koordinaten der assoziierten S-Flächen folgende Werte:

$$\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\Big\} = -R\frac{\sin\omega}{2AT}\begin{matrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{matrix}\begin{matrix}+\\ -\end{matrix}R\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{A^2T}\begin{matrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{matrix},$$

$$\zeta = \frac{R}{2A}\int\frac{T^2 d\omega}{\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}} + R\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}}{A}\cdot\frac{au-bv}{\sqrt{ab}}.$$

Daß diese Flächen Schraubenflächen sind, läßt sich leicht auf folgende Weise zeigen.

Setzen wir:

$$R\frac{\sin\omega}{2AT} = \varrho\cos\psi \quad \text{und} \quad R\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{A^2T} = \varrho\sin\psi,$$

so ist:

$$\tan\psi = \frac{2\lambda\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{A\sin\omega} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{RT}{A^2}.$$

Führen wir noch zur Abkürzung $\chi = \varphi - \psi$ ein, so ist:

Assoziierte S-Flächen:

$$\xi = \frac{RT}{A^2}\cos\chi;\quad \eta = \frac{RT}{A^2}\sin\chi;\quad \zeta = \frac{RA}{8}\int\frac{\sin^2\omega\, d\omega}{T^2\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}} + R\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}}{A^2}\chi.$$

Hierbei ist:

$$T = \sqrt{A^2\sin^2\frac{\omega}{2} + (C^2-1)\lambda^2}$$

und

$$\chi = A\left(\frac{au-bv}{\sqrt{ab}} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}}{2}\int\frac{\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{T^2}d\omega\right).$$

Dies ist die bekannte Form der Koordinaten einer Schraubenfläche.

4. *Die Gestalt der Flächen V_R und der assoziierten S-Flächen, sowie der Verlauf der geodätischen Systeme, bezw. der Haupttangentenkurven auf denselben.* — Denken wir uns die Meridiankurve der Flächen V_R bezogen auf die Variablen r und z, die von dem Parameter ω abhängen, so ist:

$$(27)\qquad r = 2\sqrt{ab}\,\frac{T}{\sin\omega}; \qquad z = -\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int\frac{(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}{\sin^2\omega\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\omega.$$

Da

$$\frac{\partial r}{\partial\omega} = -\frac{(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}{2\sqrt{ab}\,T\sin^2\omega}$$

ist, so haben die Differentialquotienten von r nach z die Werte:

$$(28)\qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{T}; \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{A^2\sqrt{ab}\sin^3\omega}{2\,T^3(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}.$$

Ebenso gilt für das Meridianprofil der assoziierten Schraubenflächen S, das wir auf die Variablen ϱ und ζ beziehen[1]):

$$(29)\qquad \varrho = \frac{R\mathsf{T}}{A^2}; \qquad \zeta = \frac{RA}{8}\int\frac{\sin^2\omega}{\mathsf{T}^2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\omega; \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial\omega} = \frac{R\sin\omega}{4\mathsf{T}}.$$

$$(30)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial\zeta} = -\frac{2\mathsf{T}\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{A\sin\omega}; \qquad \frac{\partial^2\varrho}{\partial\zeta^2} = \frac{16\,\mathsf{T}\,\Psi}{RA^2\sin^4\omega},$$

wo

$$\Psi = [A^4 - \lambda^2(\lambda^2 + 1)]\sin^4\frac{\omega}{2} - \lambda^2(C^2 - 1)^2\cos\omega$$

ist.

Diese Formeln (27) bis (30) genügen zur Betrachtung der Gestalt unserer Flächen. Wir haben nur noch die Quadratur (19) auszuführen, was je nach dem Werte der Konstanten C drei Fälle liefert, denen drei Typen von Flächen V_R und ihrer S-Flächen entsprechen.

In der Formel (19) kommen, da wir nur reelle Werte der Variabeln ins Auge fassen, lediglich positive Werte von C^2 in Betracht.

---

1) Eigentlich sollten z und ζ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, sodaß der positiven z-Achse die negative ζ-Achse entspricht; da aber die Flächen zur xy- bezw. $\xi\eta$-Ebene symmetrisch liegen, ändern wir aus praktischen Gründen das Vorzeichen von ζ.

I. Fall. $1 < C^2 \overline{\gtrless} \infty.$

Substituieren wir[1]): $C^2 = \frac{1}{\varkappa^2}$ und $\cos\frac{\omega}{2} = \mu$, so geht die Grenzbedingung für C über in die folgende:

$$0 \overline{\gtrless} \varkappa < 1,$$

und, da nach (26)

$$\frac{a-b}{2a} \overline{\gtrless} \cos^2\frac{\omega}{2} \overline{\gtrless} 1$$

ist, so genügt μ der Bedingung:

$$\frac{a-b}{2a} \overline{\gtrless} \mu^2 \overline{\gtrless} 1.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$\tau = \frac{au + bv}{\varkappa\sqrt{ab}},$$

so besitzt die zu integrierende Gleichung:

$$\tau = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\varkappa^2\mu^2)}}$$

die Lösung[2]): $\mu = \operatorname{sn}\tau$; somit ist: $\cos\frac{1}{2}\omega = \operatorname{sn}\tau$. Da also:

$$\varDelta = \frac{\sqrt{1+\varkappa^2\lambda^2}}{\varkappa} \quad \text{und} \quad T = \sqrt{\operatorname{sn}^2\tau + \lambda^2},$$

so wird:

$$r = \sqrt{ab}\,\frac{\sqrt{\operatorname{sn}^2\tau+\lambda^2}}{\operatorname{sn}\tau\operatorname{cn}\tau}; \quad \frac{\partial r}{dz} = \frac{\operatorname{dn}\tau}{\varkappa\sqrt{\operatorname{sn}^2\tau+\lambda^2}};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{(1+\varkappa^2\lambda^2)\operatorname{sn}^3\tau\operatorname{cn}^3\tau}{\varkappa^2\sqrt{ab}(\sqrt{\operatorname{sn}^2\tau+\lambda^2})^3\left(\operatorname{sn}^2\tau - \frac{a-b}{2a}\right)\left(\operatorname{sn}^2\tau + \frac{a-b}{2b}\right)}.$$

Somit wächst r von a bis ∞, $\frac{\partial r}{\partial z}$ ist stets positiv, $\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$ stets negativ. Für negatives z erhalten wir einen symmetrischen Kurvenzweig.

Die Rotationsfläche entsteht dann durch Rotation dieser Kurve um die z-Achse.

1) C kann positiv oder negativ sein, für $\varkappa$ ist jedoch stets der positive Wert zu nehmen.

2) Hierbei mögen $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ die elliptischen Funktionen: $\sin\operatorname{am}(x, \varkappa)$, $\cos\operatorname{am}(x, \varkappa)$, $\varDelta\operatorname{am}(x, \varkappa)$ bedeuten.

Für die S-Fläche gilt[1]):

$$\mathsf{T} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\mathrm{cn}^2\tau + \lambda^2\,\mathrm{dn}^2\tau}; \quad \Psi = \frac{1}{\varkappa^4}\left[\mathrm{cn}^4\tau + \lambda^2\,\mathrm{dn}^4\tau\,(\mathrm{cn}^2\tau - \varkappa'^2\,\mathrm{sn}^2\tau)\right].$$

$$\varrho = \frac{R\varkappa}{1+\varkappa^2\lambda^2}\sqrt{\mathrm{cn}^2\tau + \lambda^2\,\mathrm{dn}^2\tau}; \quad \frac{\partial\varrho}{\partial\zeta} = -\frac{\mathrm{dn}\,\tau\sqrt{\mathrm{cn}^2\tau + \lambda^2\,\mathrm{dn}^2\tau}}{\varkappa\sqrt{1+\varkappa^2\lambda^2}\,\mathrm{sn}\,\tau\,\mathrm{cn}\,\tau};$$

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial\zeta^2} = \frac{\Psi\varkappa\sqrt{\mathrm{cn}^2\tau + \lambda^2\,\mathrm{dn}^2\tau}}{R\,(1+\varkappa^2\lambda^2)\,\mathrm{sn}^4\tau\,\mathrm{cn}^4\tau}.$$

Mit wachsendem r nimmt ϱ ab, $\frac{\partial\varrho}{\partial\zeta}$ ist stets negativ, $\frac{\partial^2\varrho}{\partial\zeta^2}$ ist anfangs positiv, verschwindet bei $\mathrm{sn}^2\tau = \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda\varkappa'^2}$, wo demnach die Kurve einen Wendepunkt besitzt, und wird dann negativ. Für $\mathrm{sn}^2\tau = 1$, wo ϱ ein Minimum besitzt, steht die Tangente der Kurve senkrecht zur ζ-Achse. Da dieser Punkt im Endlichen liegt, setzt sich infolge der Periodizität der elliptischen Funktionen die Kurve periodisch fort, so daß hier eine Spitze entsteht.

Die Schraubenfläche erhält man durch Rotation mit gleichzeitiger Schraubung dieses Meridianprofils um die ζ-Achse; sie besitzt demnach für $\mathrm{sn}^2\tau = 1$ eine Rückkehrkurve.

II. Fall. $\quad 0 < C^2 < 1.$

Substituieren wir: $C^2 = \varkappa^2$ und $\cos\frac{1}{2}\omega = \varkappa\mu$, so wird für $\tau = \frac{au+bv}{\sqrt{ab}}$ Gleichung (19) übergeführt in:

$$\tau = \int\frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\varkappa^2\mu^2)}}.$$

Hierbei genügt $\varkappa$ der Bedingung: $0 < \varkappa < 1$ und da die Ungleichung (26) mit Rücksicht darauf, daß die Wurzel reell sein soll, übergeht in:

$$\frac{a-b}{2a} \gtreqless \cos^2\frac{\omega}{2} \gtreqless \varkappa^2,$$

so gilt für μ die Grenzbedingung:

$$\frac{a-b}{2a\varkappa^2} \gtreqless \mu^2 \gtreqless 1;$$

zwischen $\varkappa$ und 1 existiert also kein reeller Wert von $\cos\frac{1}{2}\omega$. [I]wird nun: $\mu = \mathrm{sn}\,\tau$, also $\cos\frac{1}{2}\omega = \varkappa\,\mathrm{sn}\,\tau$. Ferner:

$$\Lambda = \sqrt{\lambda^2+\varkappa^2}; \quad T = \sqrt{\varkappa^2\,\mathrm{sn}^2\tau + \lambda^2};$$

---

folglich:

$$r = \sqrt{ab}\,\frac{\sqrt{\varkappa^2 \operatorname{sn}^2\tau + \lambda^2}}{\varkappa \operatorname{sn}\tau \operatorname{dn}\tau};\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\varkappa \operatorname{cn}\tau}{\sqrt{\varkappa^2\operatorname{sn}^2\tau + \lambda^2}};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{(\lambda^2+\varkappa^2)\operatorname{sn}^3\tau \operatorname{dn}^3\tau}{\varkappa\sqrt{ab}\left(\sqrt{\varkappa^2\operatorname{sn}^2\tau+\lambda^2}\right)^3\left(\operatorname{sn}^2\tau - \frac{a-b}{2a\varkappa^2}\right)\left(\operatorname{sn}^2\tau + \frac{a-b}{2b\varkappa^2}\right)}.$$

r wächst bis zu einem endlichen Maximum, wo die Tangente der Kurve parallel der z-Achse ist; $\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$ ist stets negativ. Die Kurve verläuft periodisch.

Für die S-Fläche gilt:

$$\mathsf{T} = \varkappa\sqrt{\operatorname{dn}^2\tau + \lambda^2\operatorname{cn}^2\tau};\quad \Psi = \varkappa^4\left[\operatorname{dn}^4\tau + \lambda^2\operatorname{cn}^2\tau\left(\operatorname{dn}^2\tau + \varkappa'^2\operatorname{sn}^2\tau\right)\right].$$

$$\varrho = \frac{R\varkappa}{\lambda^2+\varkappa^2}\sqrt{\operatorname{dn}^2\tau + \lambda^2\operatorname{cn}^2\tau};\quad \frac{\partial\varrho}{\partial\zeta} = -\frac{\varkappa\operatorname{cn}\tau\sqrt{\operatorname{dn}^2\tau+\lambda^2\operatorname{cn}^2\tau}}{\sqrt{\lambda^2+\varkappa^2}\operatorname{sn}\tau\operatorname{dn}\tau};$$

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial\zeta^2} = \frac{\Psi\sqrt{\operatorname{dn}^2\tau+\lambda^2\operatorname{cn}^2\tau}}{R(\lambda^2+\varkappa^2)\varkappa^3\operatorname{sn}^4\tau\operatorname{dn}^4\tau}.$$

Für das Minimum von ϱ, das bei $\operatorname{sn}^2\tau = 1$ stattfindet, besitzt die Kurve eine der ζ-Achse parallele Tangente. Ein Wendepunkt ist nicht vorhanden, da $\frac{\partial^2\varrho}{\partial\zeta^2}$ stets positiv ist. Die Kurve kehrt periodisch wieder.

III. Fall. $C^2 = 1.$

Setzen wir:

$$\tau = \frac{au+bv}{\sqrt{ab}},$$

so wird:

$$\tau = -\int\frac{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}} = \ln\cot\frac{\omega}{4};$$

folglich:

$$\tan\frac{\omega}{2} = \frac{1}{\operatorname{sh}\tau}\ ^{1)}\quad\text{und}\quad \cos\frac{\omega}{2} = \frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau};$$

hierbei gilt die Grenzbedingung:

$$\frac{2a}{a+b} \gtreqless \operatorname{ch}^2\tau \gtreqless \infty.$$

Da ferner:

$$A = \sqrt{\lambda^2+1}\quad\text{und}\quad T = \frac{\sqrt{(\lambda^2+1)\operatorname{ch}^2\tau - 1}}{\operatorname{ch}\tau}$$

---

1) sh x und ch x bedeuten die hyperbolischen Funktionen: sinus hyperbolicus von x und cosinus hyperbolicus von x.

ist, so wird:

$$r = \sqrt{ab}\,\frac{\operatorname{ch}\tau\sqrt{(\lambda^2+1)\operatorname{ch}^2\tau - 1}}{\operatorname{sh}\tau}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2+1)\operatorname{ch}^2\tau - 1}};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{\operatorname{sh}^3\tau\operatorname{ch}^3\tau}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{(\lambda^2+1)\operatorname{ch}^2\tau - 1}\right)^3\left(\operatorname{ch}^2\tau - \frac{2a}{a+b}\right)\left(\operatorname{ch}^2\tau - \frac{2b}{a+b}\right)}.$$

r wächst also unter positivem $\frac{\partial r}{\partial z}$ von a bis ∞; $\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$ ist stets negativ. Die Kurve verläuft ins Unendliche.

Für die S-Fläche gilt:

$$\mathsf{T} = \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\operatorname{ch}\tau}; \quad \Psi = \frac{\lambda^2+1}{\operatorname{ch}^4\tau}; \quad \varrho = \frac{R}{\operatorname{ch}\tau\sqrt{\lambda^2+1}};$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\zeta} = -\frac{1}{\operatorname{sh}\tau}; \quad \frac{\partial^2\varrho}{\partial\zeta^2} = \frac{\sqrt{\lambda^2+1}\operatorname{ch}^3\tau}{R\operatorname{sh}^4\tau}.$$

ϱ nimmt ab bis zum Werte 0; $\frac{\partial\varrho}{\partial\zeta}$ ist stets negativ und wird für $\operatorname{ch}^2\tau = \infty$ gleich 0; $\frac{\partial^2\varrho}{\partial\zeta^2}$ ist positiv. Die ζ-Achse ist Asymptote der Kurve.

In den angefügten Zeichnungen (Fig. 1—6) sind die Meridiankurven der Flächen V_R, bezogen auf die Koordinatenachsen z und r, sowie die Meridianprofile der S-Flächen, bezogen auf die Koordinatenachsen ζ und ϱ, dargestellt.

Sämtliche Kurven besitzen im Punkte A bezw. A zwei von einander verschiedene, zur r- bezw. ϱ-Achse symmetrische Tangenten.

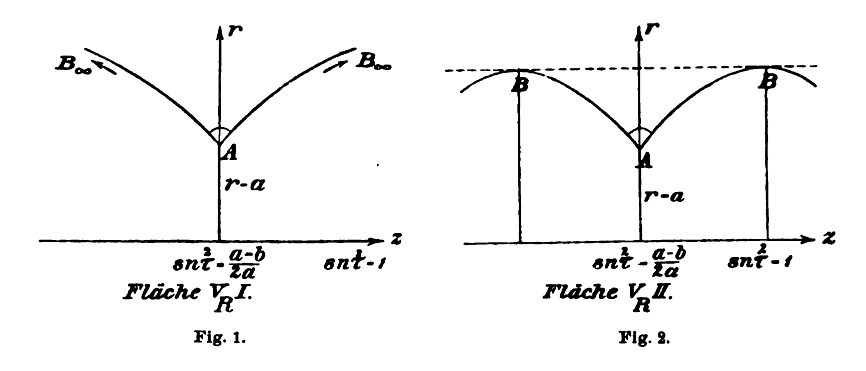


Fig. 1. Fig. 2.

Bei den Flächen V_R besitzt die Meridiankurve in A die Koordinaten $z = 0$, $r = a$, dann nimmt r zu und zwar in den Fällen I und III bis $r = \infty$ und im Falle II bis zu einem endlichen Maximum. Die Kurve wendet in ihrem ganzen Verlaufe ihre konkave Seite der z-Achse zu; ihre Richtung nähert sich dabei einer festen Grenzlage B, wo sie

im Falle I mit der z-Achse einen spitzen Winkel bildet, im Falle III zu derselben parallel ist, ohne daß im Endlichen eine Asymptote vorhanden ist; im Falle II setzt sich die Kurve, deren Tangente in dem endlichen Punkte B zur z-Achse parallel ist, periodisch fort.

Bei den S-Flächen dagegen besitzt das Meridianprofil in A ein Maximum von ϱ; dann nimmt ϱ ab und erreicht in B sein Minimum,

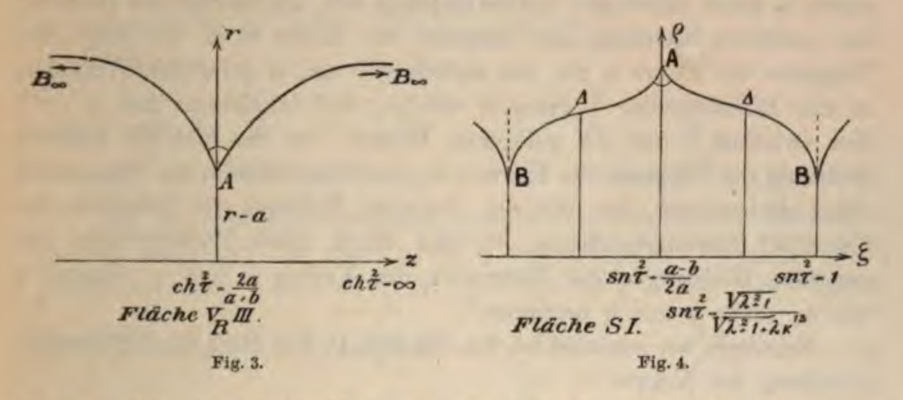


Fig. 3. Fig. 4.

das im Falle III gleich Null ist. Im Falle I wendet die Kurve anfangs ihre konvexe Seite der ξ-Achse zu, besitzt in Δ einen Wendepunkt, von wo aus sie dann konkav gegen die ξ-Achse verläuft, während sie dagegen in den Fällen II und III in ihrem ganzen Verlaufe konvex gegen die ξ-Achse gekrümmt ist.

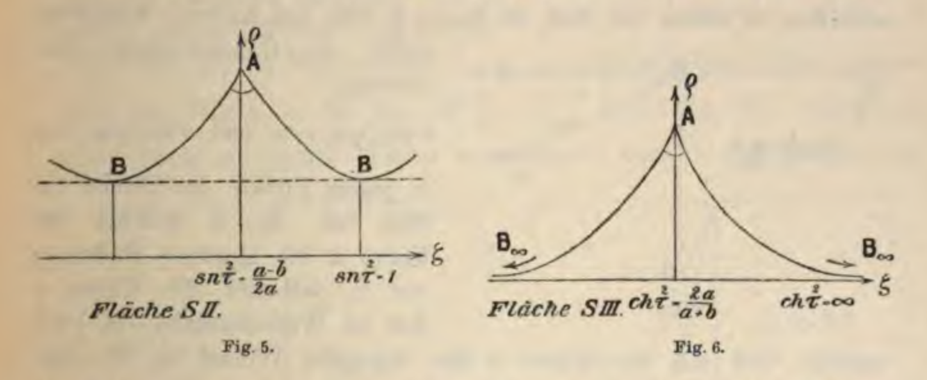


Fig. 5. Fig. 6.

laufe konvex gegen die ξ-Achse gekrümmt ist. Im Punkte B bildet ferner das Meridianprofil im Falle I eine Spitze, deren Tangente senkrecht zur ξ-Achse steht, so daß hier die S-Fläche eine Rückkehrkurve besitzt; im Falle II ist die Tangente der ξ-Achse parallel und im Falle III berührt die Kurve die ξ-Achse. Da in den Fällen I und II B im Endlichen liegt, setzt sich die Kurve periodisch fort, während sie im Falle III sich der ξ-Achse asymptotisch nähert.

Um nun den Verlauf des konjugiert-geodätischen Systems der Flächen V_R, bezw. der Haupttangentenkurven der assoziierten S-Flächen zu untersuchen, gehen wir von den Differentialgleichungen der Kurven r und φ, bezw. ϱ und χ aus und bestimmen[1]) die Winkel, welche diese Kurven mit den Parameterlinien u und v einschließen.

Setzen wir (nach Bianchi) als die positive Seite der Tangentialebene in einem beliebigen Punkte diejenige fest, auf welcher die Drehung der positiven Richtung der Tangente der Kurve v in die Lage der Tangente der Kurve u um den zwischen 0 und π gelegenen Winkel ω in der Richtung des Uhrzeigers erfolgt, und bezeichnen mit $\sphericalangle (vC)$ den zwischen 0 und 2π gelegenen Winkel, um den sich die positive Richtung der Tangente der Kurve v im positiven Sinne in der Tangentialebene drehen muß, um mit der positiven Richtung der Tangente der Kurve C zusammenzufallen, so sind durch diese Festsetzungen die positiven Richtungen der Tangenten der Kurven v und u, ebenso r und φ, sowie ϱ und χ bestimmt.[2])

Ermitteln wir zunächst bei den Flächen V_R mit Hilfe der Differentialgleichung der Kurven r:

$$a\,du + b\,dv = 0$$

und der Kurven φ:

$$(a \cos \omega + b)\,du - (b \cos \omega + a)\,dv = 0$$

die Winkel, welche die Kurven r und φ mit den Kurven v und u einschließen, so finden wir, daß, da Kurve φ stets auf Kurve r senkrecht steht, die Clairautsche Beziehung:

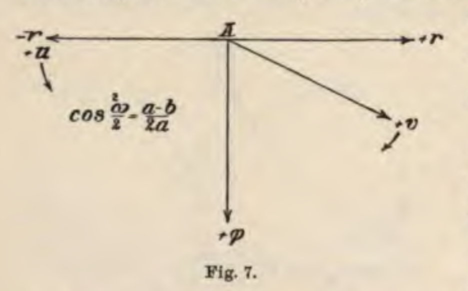


Fig. 7.

$$r \sin (\varphi u) = a \quad \text{und} \quad r \sin (v \varphi) = b$$

in jedem Punkte der Fläche erfüllt ist. In A berührt die Kurve u die negative Richtung von r, während die Kurve v sich im Winkelraume $(+r, +\varphi)$ befindet und mit der Kurve u den stumpfen Winkel ω, für den $\cos^2 \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{2a}$ ist, bildet (s. Fig. 7). Mit wachsendem r nimmt dann der Winkel ω ab, die Kurven v und u nähern sich der Kurve φ

1) S. Bianchi, Differentialgeometrie S. 64 und 65.

2) Da im folgenden nur die positiven Richtungen der Tangenten der Kurven v und u, sowie φ und χ auftreten, bezeichnen wir diese der Abkürzung wegen einfach mit Kurve v, Kurve u etc., während wir jedoch bei der Kurve r bezw. ϱ zwischen der positiven und negativen Richtung unterscheiden müssen.

(s. Fig. 8) und berühren diese schließlich in den Fällen I und III im Punkte B, wo r unendlich wird (s. Fig. 9), während im Falle II, wo r dieses Maximum nicht erreicht, ω nur bis zum Werte $\cos\frac{1}{2}\omega = C < 1$ abnimmt.

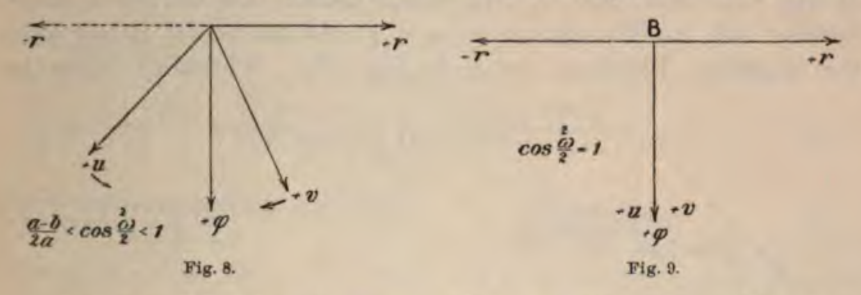


Fig. 8. Fig. 9.

Bei den S-Flächen dagegen, welche im allgemeinen Schraubenflächen sind, gilt für die Kurven ϱ zwar die nämliche Differentialgleichung: $a\,du + b\,dv = 0$, für die Kurven χ jedoch die folgende:

$$\left[C^2(b - a\cos\omega) + (a-b)\cos^2\frac{\omega}{2}\right]du - \left[C^2(a - b\cos\omega) - (a-b)\cos^2\frac{\omega}{2}\right]dv = 0.$$

Fig. 10.

In A ist $\sphericalangle(\varrho\,\chi)$ stumpf, die Kurve v, welche im Winkelraume $(+\,\varrho,\ +\,\chi)$ mit der positiven Richtung von ϱ einen spitzen Winkel einschließt, bildet mit der im Winkelraume $(-\,\varrho,\ +\,\chi)$ befindlichen Kurve u ebenfalls den Winkel ω, für den $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{2a}$ ist (s. Fig. 10). Indem nun gleichzeitig mit ϱ der Winkel ω abnimmt, wird $\sphericalangle(\varrho\chi)$ größer, die

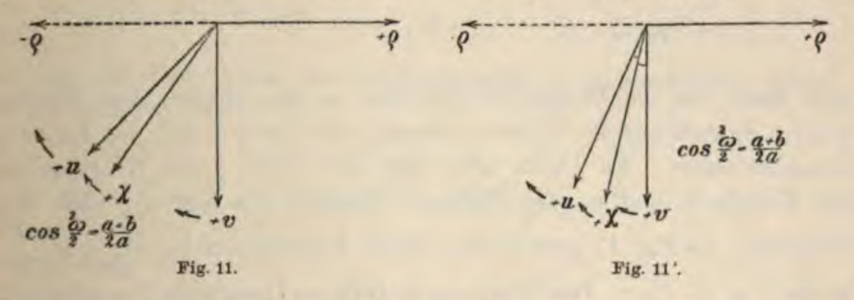


Fig. 11. Fig. 11'.

Kurven v und u entfernen sich von der positiven bezw. negativen Richtung von ϱ und nähern sich der Kurve χ. Im Falle I erreicht $\sphericalangle(\varrho u)$ bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{a+b}{2a}$ sein Minimum, wo $\sphericalangle(\varrho v) = \frac{\pi}{2}$ ist (s. Fig. 11). Von da an nimmt mit $\sphericalangle(\varrho v)$ auch $\sphericalangle(\varrho u)$ wieder zu, indem auch

$\sphericalangle(\varrho\chi)$ immer größer wird. Bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{(a+b)\,C^2}{2aC^2-(a-b)}$, wo das Meridianprofil einen Wendepunkt besitzt, berührt Kurve v die Kurve χ (s. Fig. 12). Nun wird $\sphericalangle(\varrho\chi)$ wieder kleiner, die Kurven v und u befinden sich im Winkelraume $(-\varrho, +\chi)$ und nähern sich immer mehr der negativen Richtung von ϱ (s. Fig. 13). Schließlich fallen im

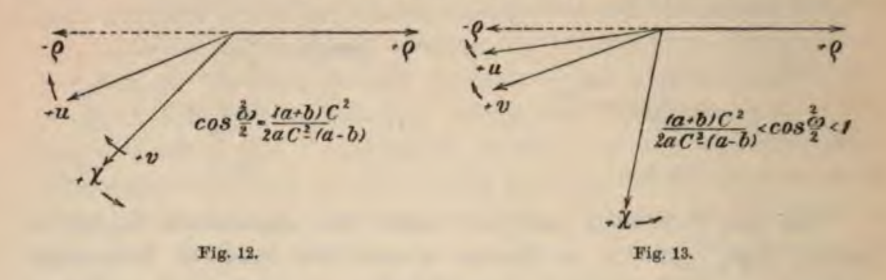


Fig. 12. Fig. 13.

Punkte B die beiden Kurven v und u zusammen und berühren die negative Richtung von ϱ, während der $\sphericalangle(\varrho\chi)$ sein Minimum $\frac{\pi}{2}$ erreicht hat (s. Fig. 14). Im Falle II, wo ω nur bis zum Werte $\cos\frac{\omega}{2} = C < 1$ abnimmt, wird in B, je nachdem C^2 kleiner oder größer als $\frac{a+b}{2a}$ ist, die Stellung in Fig. 11 nicht erreicht oder überschritten; keinesfalls

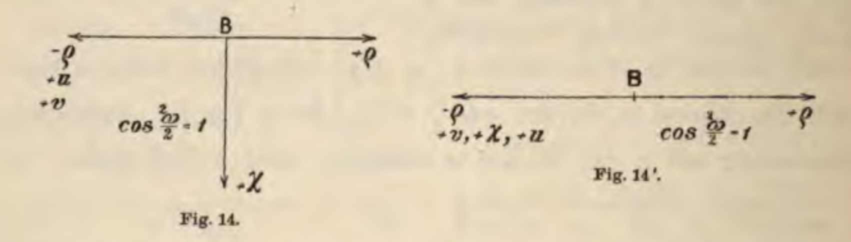


Fig. 14. Fig. 14′.

aber kann, da der Winkel ω nicht bis zu dem obigen, dem Wendepunkte entsprechenden Werte abnimmt, die Kurve v mit der Kurve χ zusammenfallen. Es bleibt also stets die Kurve χ im Winkelraume der Kurven v und u. Im Falle III halbiert die Kurve χ stets den Winkel ω; die Fig. 11 geht infolge dieser Modifikation bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{a+b}{2a}$ in die Fig. 11′ über. Der Wendepunkt fällt ins Unendliche für $\cos\omega = 1$, wo die Kurve χ gemeinsam mit den Kurven v und u die negative Richtung von ϱ berührt (s. Fig. 14′).

5. *Der spezielle Fall $b = a$. Die Biegungen der Flächen V_R und die diesen Biegungen assoziierten S-Flächen in diesem Falle.* — In dem

speziellen Falle $b = a$ werden die Koordinaten der Flächen V_R die folgenden:

Flächen V_R für $b = a$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sin\frac{\omega}{2}} \cos C(u-v); \quad y = \dfrac{a}{\sin\frac{\omega}{2}} \sin C(u-v); \\ z = -\dfrac{a}{2}\displaystyle\int \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}\, d\omega. \end{cases}$$

Die Fundamentalgrößen sind dann:

$$E = G = \frac{a^2 C^2}{\sin^4\frac{\omega}{2}}; \quad F = \frac{a^2C^2}{\sin^4\frac{\omega}{2}}\cos\omega; \quad D = D'' = -\frac{2aC\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}; \quad D' = 0.$$

Da die Richtungskosinus der Normale die folgenden Werte:

$$X = \frac{1}{C}\cos\frac{\omega}{2}\cos C(u-v); \quad Y = \frac{1}{C}\cos\frac{\omega}{2}\sin C(u-v);$$

$$Z = -\frac{1}{C}\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}$$

besitzen, so erhalten wir für die Koordinaten der assoziierten S-Flächen:

Assoziierte S-Flächen

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{R}{C}\sin\dfrac{\omega}{2}\cos C(u-v); \quad \eta = \dfrac{R}{C}\sin\dfrac{\omega}{2}\sin C(u-v); \\ \zeta = \dfrac{R}{2C}\displaystyle\int\dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}\, d\omega. \end{cases}$$

Ihre Fundamentalgrößen sind:

$$\mathsf{E} = \mathsf{G} = R^2; \quad \mathsf{F} = R^2\cos\omega; \quad \mathsf{D} = \mathsf{D}'' = 0; \quad \mathsf{D}' = R\sin\omega.$$

Um die drei Typen von Flächenfamilien zu unterscheiden, haben wir zu setzen:

I. Fall:

$$C^2 = \frac{1}{\varkappa^2}\,(0 \gtreqless \varkappa < 1) : \cos\frac{\omega}{2} = \operatorname{sn}\frac{u+v}{\varkappa}\left(0 \lesseqgtr \operatorname{sn}\frac{u+v}{\varkappa} \gtreqless 1\right).$$

II. Fall:

$$C^2 = \varkappa^2\,(0 < \varkappa < 1) : \cos\frac{\omega}{2} = \varkappa\operatorname{sn}(u+v)\,(0 \gtreqless \operatorname{sn}(u+v) \gtreqless 1).$$

III. Fall:

$$C^2 = 1 : \cos\frac{\omega}{2} = \frac{\operatorname{sh}(u+v)}{\operatorname{ch}(u+v)}\,(1 \gtreqless \operatorname{ch}(u+v) \gtreqless \infty).$$

Ehe wir die besonderen Eigenschaften dieser Flächen untersuchen, wollen wir zeigen, daß wir zu ∞^1 Biegungen der Flächen V_R unter Beibehaltung des konjugiert-geodätischen Systems gelangen, wenn wir von einem Satze Bours[1]) über die Biegung von Rotationsflächen ausgehen. Bour zeigte nämlich, daß die Rotationsfläche:

$$x = F(p)\cos\psi;\quad y = F(p)\sin\psi;\quad z = \int\sqrt{1 - F'^2(p)}\,dp,$$

deren Linienelement ds durch die Gleichung:

$$ds^2 = dp^2 + F'^2(p)\,d\psi^2$$

gegeben ist, unter Beibehaltung von ds in ∞^2 Schraubenflächen von der Form:

$$x = \alpha\sqrt{F^2(p) - \beta^2}\cos\frac{\psi - \Phi(p)}{\alpha};\quad y = \alpha\sqrt{F^2(p) - \beta^2}\sin\frac{\psi - \Phi(p)}{\alpha};$$
$$z = X(p) + \beta\psi$$

gebogen werden kann, wo α und β beliebige Konstanten sind und $\Phi(p)$ und $X(p)$ folgende Werte besitzen:

$$\Phi(p) = \int\sqrt{F^2(p) - \beta^2 - \alpha^2F^2(p)F'^2(p)}\,\frac{\beta\,dp}{F(p)\,[F^2(p) - \beta^2]};$$
$$X(p) = \int\sqrt{F^2(p) - \beta^2 - \alpha^2F^2(p)F'^2(p)}\,\frac{dp}{F(p)}.$$

Bestimmen wir nach dieser Methode die Koordinaten der Biegungen der Flächen V_R und führen dann wieder die Variabeln u und v ein, so bleiben E, F, G selbstverständlich erhalten, aber D' verschwindet nur dann, wenn zwischen α und β die Beziehung: $\beta = a\alpha'$ $(\alpha' = \sqrt{1 - \alpha^2})$ besteht. Dann erhalten auch D und D'' den Faktor k bezw. $1/k$, wo k eine von α abhängige Konstante ist.

Wir setzen nun für β obigen Wert ein und verifizieren nachträglich, daß die entstehenden Biegungen wieder V-Flächen sind.

Um vor allem die Variable p zu ermitteln, setzen wir: $C(u - v) = \psi$ und betrachten die Koordinaten zunächst als Funktionen von ω und ψ, so daß das Quadrat des Linienelementes den Wert erhält:

$$ds^2 = \frac{a^2C^2\cos^2\frac{\omega}{2}}{4\sin^4\frac{\omega}{2}\left(C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}\right)}\,d\omega^2 + \frac{a^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,d\psi^2.$$

Substituieren wir nun:

$$dp = -\frac{aC\cos\frac{\omega}{2}}{2\sin^2\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\omega,$$

1) Bour, Théorie de la déformation des surfaces (Journal de l'école polyt. Cah. 39, Paris 1892, S. 82).

so wird:

$$p = \frac{aC\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{(C^2-1)\sin\frac{\omega}{2}}.$$

Es ist dann:

$$F(p) = \frac{a}{\sin\frac{\omega}{2}} \quad \text{und} \quad F'(p) = \frac{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{C}.$$

Bilden wir die Funktionen $\Phi(p)$ und $X(p)$, so erhalten wir für die Koordinaten der Biegungen der Flächen V_R, welche wir mit **Flächen V^*** bezeichnen wollen:

$$x = \frac{a\alpha T}{\sin\frac{\omega}{2}}\cos\varphi; \quad y = \frac{a\alpha T}{\sin\frac{\omega}{2}}\sin\varphi;$$

$$z = -\frac{a\alpha_1}{2}\int\frac{\cos^2\frac{\omega}{2}\,d\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}\,T^2\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}} + a\alpha\alpha'\varphi,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$T = \sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\frac{\omega}{2}}; \quad \alpha_1 = \sqrt{\alpha'^2C^2+\alpha^2};$$

$$\varphi = \frac{1}{\alpha}\left[C(u-v) + \frac{\alpha'\alpha_1}{2}\int\frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{T^2\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\omega\right].$$

Betrachten wir ω wieder als Funktion von u und v, so nehmen mit Rücksicht auf:

$$d\omega = -2\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}\,d(u+v)$$

die Fundamentalgrößen erster Ordnung die nämlichen Werte an wie bei den ursprünglichen Flächen V_R, D' verschwindet, D und D'' erhalten einen Faktor k bezw. $1/k$; es ist nämlich:

$$E = G = \frac{a^2C^2}{\sin^4\frac{\omega}{2}}; \quad F = \frac{a^2C^2}{\sin^4\frac{\omega}{2}}\cos\omega;$$

$$D = -\frac{2akC\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}; \quad D' = 0; \quad D'' = -\frac{2aC\cos\frac{\omega}{2}}{k\sin\frac{\omega}{2}},$$

wo $k = \frac{\alpha_1 - \alpha' C}{\alpha}$ und $\frac{1}{k} = \frac{\alpha_1 + \alpha' C}{\alpha}$ ist.

Es bleibt also sowohl die Eigenschaft der Parameterlinien u und v, konjugiert zu sein, als auch diejenige, geodätisch zu sein, bestehen (letztere Eigenschaft hängt ja nur von den Fundamentalgrößen 1. Ordnung ab), d. h.:

Die Flächen V^*, d. s. die Biegungen der Flächen V_R für den Fall $b = a$, sind wieder V-Flächen, und zwar Schraubenflächen.

Da ferner die Normale die Richtung:

$$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\Bigg\} = \frac{\alpha_1 \cos\frac{\omega}{2}}{CT} \begin{matrix} \cos\varphi - \\ \sin\varphi + \end{matrix} \frac{a\alpha' \sin\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{CT} \begin{matrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{matrix}; \quad Z = -\frac{\alpha\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{C}$$

besitzt, so erhalten wir für die Koordinaten der den Flächen V^* assoziierten S-Flächen die Werte:

$$\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\Bigg\} = \frac{R\alpha^2\alpha_1 \sin\frac{\omega}{2}}{CT} \begin{matrix} \cos\varphi + \\ \sin\varphi - \end{matrix} \frac{R\alpha\alpha' \cos\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{CT} \begin{matrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{matrix};$$

$$\zeta = \frac{R\alpha}{2C}\int \frac{\alpha_1^2 - T^2 \sin^2\frac{\omega}{2}}{T^2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\, d\omega + R\frac{\alpha'\alpha_1}{C}\varphi.$$

Setzen wir noch:

$$\frac{R\alpha^2\alpha_1 \sin\frac{\omega}{2}}{CT} = \varrho\cos\psi \quad \text{und} \quad \frac{R\alpha\alpha' \cos\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{CT} = \varrho\sin\psi,$$

so daß:

$$\tan\psi = \frac{\alpha' \cos\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{\alpha\alpha_1 \sin\frac{\omega}{2}} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{R\alpha\mathsf{T}}{C}$$

ist, so brauchen wir nur zur Abkürzung:

$$\chi = \varphi - \psi$$

einzuführen, um die Koordinaten der **assoziierten S-Flächen** in folgender Form zu erhalten:

$$\xi = \frac{R\alpha\mathsf{T}}{C}\cos\chi; \quad \eta = \frac{R\alpha\mathsf{T}}{C}\sin\chi; \quad \zeta = \frac{R\alpha}{8C}\int \frac{\sin^2\omega\, d\omega}{\mathsf{T}^2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}} + \frac{R\alpha'\alpha_1}{C}\chi;$$

Hierbei ist:

$$\mathsf{T} = \sqrt{\sin^2\frac{\omega}{2} + \alpha'^2(C^2 - 1)}, \quad \chi = \frac{1}{\alpha}\left[C(u - v) + \frac{\alpha'\alpha_1}{2}\int \frac{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{T^2}\, d\omega\right].$$

Ihre Fundamentalgrößen sind:

$$\mathbf{E} = R^2 k^2; \quad \mathbf{F} = R^2 \cos\omega; \quad \mathbf{G} = R^2 \frac{1}{k^2}; \quad \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{D}' = R \sin\omega; \quad \mathbf{D}'' = 0.$$

Die den Flächen V^* assoziierten S-Flächen sind ebenfalls Schraubenflächen, ohne jedoch Biegungen der den ursprünglichen Flächen V_R assoziierten S-Flächen zu sein.

Um nun diese Flächen näher zu untersuchen, betrachten wir ihr Meridianprofil.

Es gilt für die Flächen V^*:

$$r = \frac{a\alpha T}{\sin\frac{\omega}{2}}; \quad z = -\frac{a\alpha_1}{2}\int \frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}\, T^2 \sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\, d\omega;$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\alpha T \sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{\alpha_1 \cos\frac{\omega}{2}}; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{\alpha T \sin^3\frac{\omega}{2}\left(\alpha^2 C^2 + \alpha'^2 \cos^4\frac{\omega}{2}\right)}{a\alpha_1^2 \cos^4\frac{\omega}{2}}.$$

Ebenso für die S-Flächen[1]):

$$\varrho = \frac{R\alpha\mathsf{T}}{C}; \quad \zeta = -\frac{R\alpha}{8C}\int \frac{\sin^2\omega}{\mathsf{T}^2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\, d\omega;$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \zeta} = -\frac{2\mathsf{T}\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{\sin\omega}; \quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial \zeta^2} = \frac{16 C\mathsf{T}\Psi}{R\alpha \sin^4\omega},$$

wo

$$\Psi = \left[(\alpha'^2 + 1) C^2 - \alpha'^2\right] \cos^4\frac{\omega}{2} - \alpha_1^2 C^2 \cos\omega$$

ist.

Unterscheiden wir wieder die drei Fälle, so erkennen wir, daß die Flächen analog wie die allgemeinen Flächen verlaufen, nur hat das Meridianprofil bei A bezw. A eine Spitze, deren Tangente senkrecht zur z- bezw. ζ-Achse steht, so daß hier die Flächen Rückkehrkurven besitzen. Im Falle I findet der Wendepunkt der S-Fläche statt für:

$$\mathrm{sn}^2\tau = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \alpha^2\varkappa^2}}{\sqrt{\alpha'^2 + \alpha^2\varkappa^2} + \alpha'\varkappa'^2}.$$

Was nun den Verlauf der geodätischen Linien auf den Flächen V^* betrifft, so steht in A Kurve φ auf Kurve r senkrecht; die Kurven v und u berühren die positive bezw. negative Richtung von r (s. Fig. 15).

1) S. Note 1, zu Nr. 4, S. 68.

Mit wachsendem r nimmt $\sphericalangle(r\varphi)$ ab, die Kurven v und u entfernen sich von der positiven bezw. negativen Richtung von r und nähern sich der Kurve φ, und zwar so, daß die Winkel $(+r, v)$ und $(u, -r)$ einander gleich sind. Bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$ erreicht $\sphericalangle(r\varphi)$ sein Minimum (s. Fig. 16) und nimmt von da an wieder zu, indem die Kurven v und u

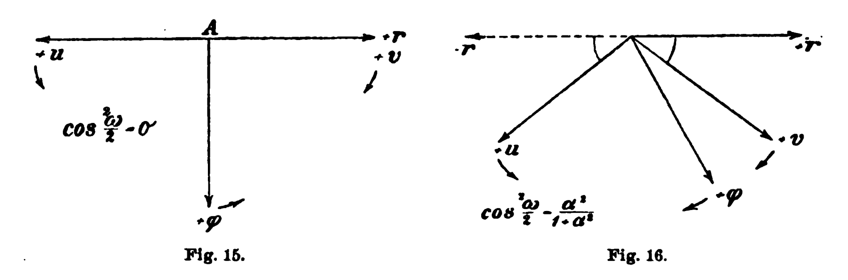


Fig. 15. Fig. 16.

sich der Kurve φ immer mehr nähern. In B erreicht $\sphericalangle(r\varphi)$ wieder seinen größten Wert, der in den Fällen I und III, wo r unendlich wird, $\frac{\pi}{2}$ ist — hier berühren die Kurven v und u die Kurve φ (s. Fig. 17) —, im Falle II dagegen, wo ω nur bis zum Werte: $\cos\frac{\omega}{2} = C < 1$ abnimmt, unter $\frac{\pi}{2}$ sich befindet. Je nachdem C^2 kleiner oder größer als $\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$ ist, wird im Falle II die Stellung in Fig. 16 nicht erreicht oder überschritten.

Bei den S-Flächen ist in A die gegenseitige Lage der Kurven die nämliche wie bei den Flächen V^* bei A (s. Fig. 18). Dann nimmt

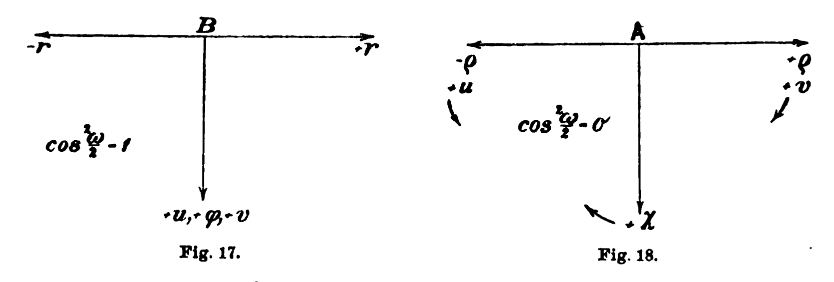


Fig. 17. Fig. 18.

$\sphericalangle(\varrho\chi)$ zu, die Kurven v und u entfernen sich von der positiven bezw. negativen Richtung von ϱ und nähern sich der Kurve χ. Im Falle I ist bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha' C}$ $\sphericalangle(\varrho v) = \frac{\pi}{2}$, während $\sphericalangle(\varrho u)$ sein Minimum erreicht (s. Fig. 19). Von da an nimmt mit $\sphericalangle(\varrho v)$ auch $\sphericalangle(\varrho u)$ wieder zu, indem auch $\sphericalangle(\varrho\chi)$ immer größer wird. Bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{\alpha_1 C}{\alpha_1 C + \alpha'(C^2-1)}$,

wo das Meridianprofil einen Wendepunkt besitzt, berührt Kurve v die Kurve χ (s. Fig. 20). Jetzt nimmt $\sphericalangle(\varrho\chi)$ wieder ab, die Kurven v und u befinden sich im Winkelraume $(-\varrho, \chi)$ und nähern sich immer mehr der negativen Richtung von ϱ (s. Fig. 21). Schließlich fallen in B

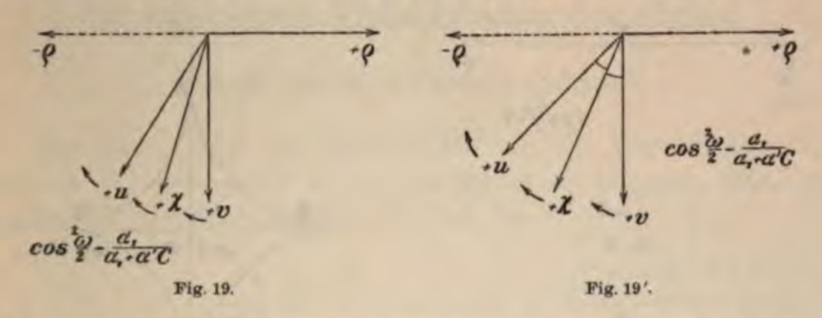


Fig. 19. Fig. 19′.

die Kurven v und u zusammen und berühren die negative Richtung von ϱ, während $\sphericalangle(\varrho\chi)$ sein Minimum $\frac{\pi}{2}$ erreicht hat (s. Fig. 22). Im Falle II, wo ω nur bis zum Werte $\cos\frac{\omega}{2} = C < 1$ abnimmt, wird in B, je nachdem C^2 kleiner oder größer als $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha' C}$ ist, die Stellung in Fig. 19 nicht erreicht oder überschritten. Keinesfalls aber kann, da der Winkel ω nicht bis zu dem obigen, dem Wendepunkte entsprechenden

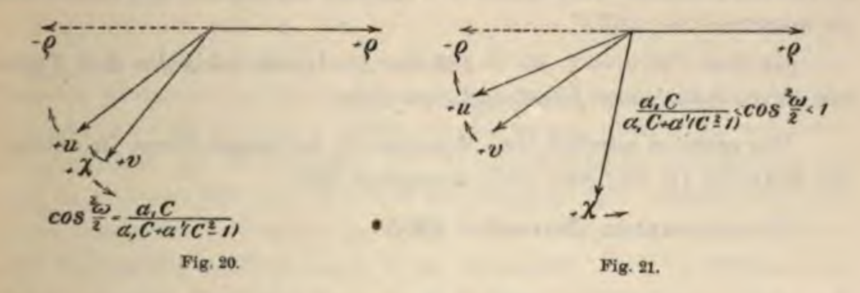


Fig. 20. Fig. 21.

Werte abnimmt, die Stellung in Fig. 20 erreicht werden, so daß also Kurve χ stets im Winkelraume der Kurven v und u verbleibt. Im Falle III halbiert Kurve χ stets den Winkel ω; die Fig. 19 geht bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{1}{1+\alpha'}$ in die Fig. 19′ über; der Wendepunkt fällt in den Punkt B, also ins Unendliche, wo Kurve χ gemeinsam mit den Kurven v und u die negative Richtung von ϱ berührt (s. Fig. 22′).

Zum Schlusse wollen wir noch einige besondere Eigenschaften derjenigen V- und S-Flächen hervorheben, für welche $\alpha = 1$ ist. Beide Flächengruppen sind Rotationsflächen; der Meridian halbiert den Winkel

der geodätischen Linien, bezw. der Haupttangentenkurven. Die beiden Kurven v und u berühren in A bezw. A den Parallelkreis mit entgegengesetzter Tangente, nähern sich dann dem Meridian, den sie im Unendlichen berühren. Die Flächen werden durch die Parameterlinien

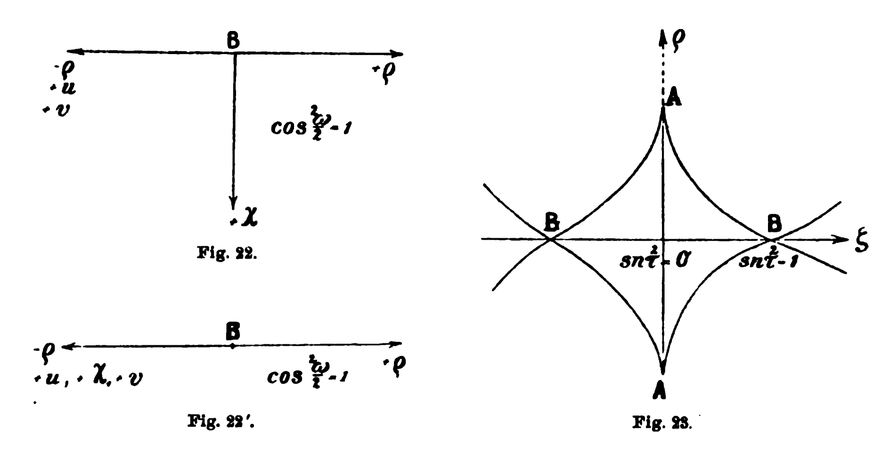


Fig. 22.

Fig. 22'.

Fig. 23.

in lauter Rhomben geteilt. Im Falle I rückt für die S-Fläche der Wendepunkt in den Punkt B, wo $\varrho = 0$ ist, so daß hier die Fläche einen Knotenpunkt besitzt (s. Fig. 23).

Setzen wir die den drei Typen zugehörigen Werte von C und ω in die Koordinaten der Flächen V^* und der assoziierten S-Flächen ein, so erkennen wir, daß:

für den Fall $\alpha = 1$ die S-Flächen die bereits bekannten drei Typen von pseudosphärischen Rotationsflächen sind.

Wir erhalten nämlich ihre Meridiane in derjenigen Form, in welcher sie Bianchi (S. 192 und 193) angegeben hat.

Gunzenhausen, November 1902.

Über den Kroneckerschen Beweis der sogenannten Kroneckerschen Grenzformel.

Von M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

Bedeuten a, b, c drei reelle Größen von der Beschaffenheit, daß $4ac - b^2 = 1$ und $a > 0$ ist, so konvergiert die folgende, schon von Lejeune-Dirichlet eingeführte Doppelreihe

$$\sum_{m,n}' \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\varrho}} \quad \left(\begin{array}{c} m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \text{mit Ausschluß von } m = n = 0 \end{array}\right),$$

solange $\varrho > 0$ bleibt; ihre Summe wächst ins Unendliche, wenn sich ϱ der Null nähert, und zwar so, daß sie nach Subtraktion von $2\pi/\varrho$ einen endlichen Rest gibt, der für $\varrho = 0$ bestimmt bleibt und sich durch elliptische Funktionen ausdrücken läßt. Dies erkannt zu haben, ist ein interessantes Resultat Kroneckers. Jedoch sind die Betrachtungen, welche dieser große Mathematiker zur Begründung seines Satzes ausgeführt hat[1]), der Form nach so kompliziert, daß sich das Bedürfnis eines einfacheren Beweises wirklich fühlbar macht. Solche Beweise sind nachher geliefert worden, und zwar von Herrn H. Weber[2]), von mir[3]) (zwei wesentlich verschiedene) und von Herrn Franel.[4]) Einige dieser Beweise gestatten in die analytische Natur der durch die Doppelreihe definierten Funktion von ϱ tiefer einzudringen; wenn man sich aber lediglich mit der Begründung der Kroneckerschen Grenzformel begnügen will, so läßt sich, wie ich vor längerer Zeit erkannt habe, der Kroneckersche Beweis so darstellen, daß er den anderen der Klarheit und Einfachheit nach in keiner Weise nachsteht. Eine Veröffentlichung dieser zumeist bloß formalen Vereinfachung scheint mir schon aus dem Grunde geboten zu sein, weil dadurch die der Kroneckerschen Beweisführung anhaftende gedankliche Eleganz erst recht zu Tage tritt.

---

1) Sitzungsberichte der kgl. preuß. Akad. d. Wiss., 1889, p. 123 u. ff.

2) Math. Ann., Bd. 33 und in dem Werke „Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen", p. 456.

3) Rozpravy české Akademie, I. Jahrg., Nr. 27 (§ 11), 1891, bzw. Sitzungsberichte d. kgl. böhm. Ges. der Wiss. in Prag, II. Klasse, 1893, Nr. IX.

4) Math. Ann., Bd. 48.

1. Wir gehen mit Kronecker von der unendlichen Doppelreihe

$$(1)\qquad F(\sigma, \tau, \varrho) = \sum_{m,\,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{f(m, n)^{1+\varrho}} \qquad \left(\begin{matrix} m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \text{mit Ausschluß von } m = n = 0 \end{matrix}\right)$$

aus, in welcher die Funktion $f(x, y)$ die quadratische Form $ax^2 + bxy + cy^2$ bedeuten soll und σ, τ, ϱ drei reelle Größen sind, die wir den Bedingungen $0 < \sigma < 1$, $0 < \tau < 1$, $\varrho > 0$ unterwerfen wollen. Mit Zuhilfenahme der bekannten Integralformel

$$\frac{\Gamma(1+\varrho)}{k^{1+\varrho}} = \int_0^\infty e^{-kx} x^\varrho \, dx$$

erhält man für $k = f(m, n)$ an Stelle von (1)

$$\Gamma(1+\varrho) F(\sigma, \tau, \varrho) = \sum_{m,\,n}{}' \int_0^\infty x^\varrho \, dx \cdot e^{-xf(m,\,n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)},$$

und es soll zunächst gezeigt werden, daß man das Summationszeichen unter das Integralzeichen bringen darf, sodaß die Formel

$$(2)\qquad \Gamma(1+\varrho) F(\sigma, \tau, \varrho) = \int_0^\infty x^\varrho \, dx \sum_{m,\,n}{}' e^{-xf(m,\,n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)},$$

entsteht. Da die unter dem Integralzeichen stehende Doppelsumme in jedem Intervalle $(x_0 \ldots \infty)$, wo $x_0 > 0$, gleichmäßig konvergiert und einen Wert hat, der für unendlich wachsendes x so intensiv gegen die Null konvergiert wie eine Exponentialfunktion, so ist die Existenz des Integrals mit den Grenzen x_0 und ∞ evident. Über die Integrierbarkeit der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion von $x = 0$ aus gewinnt man am bequemsten Aufschluß, wenn man die weiter unten noch zu benutzende Transformationsformel

$$(3)\qquad \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2u\pi f(m,\,n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)} = \frac{1}{u} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{u} f'(m+\sigma,\, n+\tau)}$$

heranzieht. In derselben wurde $f'(x, y) = cx^2 - bxy + ay^2$ gesetzt, und u bedeutet darin irgend welche positive Größe. Dieselbe findet sich in der zitierten Abhandlung Kroneckers vollständig bewiesen und kann auch direkt abgeleitet werden, wenn man die rechte Seite in eine Fouriersche Doppelreihe entwickelt. Da sich der Kroneckersche Beweis überdies in einem über die Kroneckerschen Arbeiten

verfaßten Kommentar[1]) in getreuer Wiedergabe findet, so kann ich mir den Beweis der Formel (3) an dieser Stelle ersparen.

Wir wollen nun in den beiden Doppelreihen der Gleichung (3) das Glied $m = n = 0$ isolieren, und erhalten so

$$(3^0)\quad \begin{cases} \sum\limits_{m,n}' e^{-2u\pi f(m,n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)} \\ = \left(-1 + \frac{1}{u} e^{-\frac{2\pi}{u} f'(\sigma,\tau)}\right) + \frac{1}{u}\sum\limits_{m,n}' e^{-\frac{2\pi}{u} f'(m+\sigma,\, n+\tau)}, \end{cases}$$

wobei die Summationsbedingungen auf beiden Seiten die gleichen sind wie in der Formel (1).

Wenn man jetzt in (3^0) für u die Größe $x/2\pi$ setzt, so erhält man für die unter dem Integralzeichen in (2) stehende Funktion eine Darstellung, aus welcher unmittelbar zu ersehen ist, daß zur Integralexistenz die Bedingung $\varrho > -1$ ausreicht, solange allerdings die Ungleichungen $0 < \sigma < 1,\ 0 < \tau < 1$ *in sensu rigoroso* stattfinden, wie wir übrigens angenommen haben. Diese letzte Bedingung wird jedoch bei der Annahme $\varrho > 0$ hinfällig, eine Bemerkung, die für das Folgende sehr wichtig ist.

Wir wollen nun zeigen, daß sich in (2) die Integration gliedweise ausführen läßt, wenn $\varrho > 0$ ist. Ich spalte zu dem Zwecke die Doppelreihe in zwei Teile $S_N + R_N$, indem ich setze

$$S_N = \sum_{m,n}' e^{-xf(m,n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)}, \qquad (f(m,n) \leq N)$$

$$R_N = \sum_{m,n}' e^{-xf(m,n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)}, \qquad (f(m,n) > N)$$

ich bezeichne außerdem mit S_N^0, R_N^0 die vorhergehenden Ausdrücke für das spezielle Wertsystem $\sigma = \tau = 0$.

Das Integral (2) ist dann offenbar

$$(4)\qquad \int_0^\infty x^\varrho (S_N + R_N)\,dx = \int_0^\infty x^\varrho S_N\,dx + \int_0^\infty x^\varrho R_N\,dx;$$

es existiert ferner unter der Annahme $\varrho > 0$ auch das Integral

$$\int_0^\infty x^\varrho (S_N^0 + R_N^0)\,dx \quad \text{sowie} \quad \int_0^\infty x^\varrho R_N^0\,dx,$$

---

1) Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après **Kronecker**, par J. de **Séguier**. Berlin, Felix L. Dames, 1894.

und es ist, wie leicht zu sehen,

$$\lim_{N=\infty}\int_0^\infty x^\varrho R_N^0\,dx = 0.$$

Beachtet man, daß $|R_N| \leqq R_N^0$ ist, so folgt hieraus die Grenzgleichung

$$\lim_{N=\infty}\int_0^\infty x^\varrho R_N\,dx = 0,$$

und infolge dessen erschließt man aus (4)

$$\lim_{N=\infty}\int_0^\infty x^\varrho(S_N + R_N)\,dx = \lim_{N=\infty}\int_0^\infty x^\varrho S_N\,dx.$$

Da sich im letzten Integral die Summation und die Integration offenbar vertauschen lassen, so ist die rechte Seite dieser Gleichung nichts anderes als die Doppelreihe $\Gamma(1+\varrho)\,F(\sigma,\,\tau;\,\varrho)$, womit die Formel (2) erwiesen ist.

Um nun die rechte Seite von (2) umzuformen, spalte ich das Integral nach dem Schema

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

in zwei andere, ersetze im ersten Integral die Doppelsumme

$$\sum{}' e^{-xf(m,\,n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)}$$

durch den transformierten Ausdruck (3^0)

$$\left(-1 + \frac{2\pi}{x} e^{-\frac{4\pi^2}{x} f'(\sigma,\,\tau)}\right) + \frac{2\pi}{x}\sum_{m,\,n}{}' e^{-\frac{4\pi^2}{x} f'(m+\sigma,\,n+\tau)}$$

und führe die Integrationsvariable $1/x$ anstelle von x ein. Alsdann läßt sich das Integral der mit x^ϱ multiplizierten Reihe mit demjenigen, dessen Grenzen 1 und ∞ sind, vereinigen, während man die aus dem eingeklammerten Ausdruck stammenden Integrale von dem Rest abtrennen kann. Man erhält in der Weise die Formel

$$(5)\begin{cases} \Gamma(1+\varrho)\,F(\sigma,\,\tau,\,\varrho) = -\dfrac{1}{1+\varrho} + 2\pi\displaystyle\int_1^\infty e^{-4\pi^2 x f'(\sigma,\,\tau)}\frac{dx}{x^{1+\varrho}} \\ +\displaystyle\int_1^\infty dx \sum_{m,\,n}{}'\left(x^\varrho e^{-xf(m,\,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)} + \frac{2\pi}{x^{1+\varrho}} e^{-4\pi^2 x f'(m+\sigma,\,n+\tau)}\right). \end{cases}$$

Die Dirichletsche Doppelreihe entsteht aus (1) vermöge des Grenzübergangs $\sigma = 0$, $\tau = 0$, da wegen $\varrho > 0$ offenbar

$$\lim_{\sigma=0,\,\tau=0} F(\sigma, \tau, \varrho) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{f(m, n)^{1+\varrho}} = F(0, 0, \varrho).$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (5) verwandelt sich bei diesem Grenzübergang das erste Integral in

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho},$$

und ebenso läßt sich beim zweiten Integral der Grenzübergang durch bloßes Einsetzen $\sigma = \tau = 0$ ausführen, sodaß man nach der Division durch $\Gamma(1+\varrho)$ die Formel

$$F(0, 0, \varrho) = -\frac{1}{(1+\varrho)\,\Gamma(1+\varrho)} + \frac{2\pi}{\varrho\,\Gamma(1+\varrho)}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} \int_1^\infty dx \sum_{m,n}{}' \left(x^\varrho e^{-xf(m,n)} + \frac{2\pi}{x^{1+\varrho}} e^{-4\pi^2 x f'(m,n)} \right)$$

erhält. In derselben ist das erste und dritte Glied rechts an der Stelle $\varrho = 0$ endlich und stetig, und die Potenzentwickelung

$$\frac{2\pi}{\varrho\,\Gamma(1+\varrho)} = \frac{2\pi}{\varrho} - 2\pi\,\Gamma'(1) + \cdots$$

zeigt, daß die Differenz

$$F(0, 0, \varrho) - \frac{2\pi}{\varrho}$$

an der Stelle $\varrho = 0$ endlich und stetig bleibt, und daselbst den Wert

$$(6)\quad \begin{cases} \lim_{\varrho=0} \left[F(0, 0, \varrho) - \frac{2\pi}{\varrho} \right] \\ = -1 - 2\pi\,\Gamma'(1) + \int_1^\infty dx \sum_{m,n}{}' \left(e^{-xf(m,n)} + \frac{2\pi}{x} e^{-4\pi^2 x f'(m,n)} \right) \end{cases}$$

erreicht. Um diesen Grenzwert genauer zu beherrschen, muß man noch den Integralwert rechts ermitteln; die so erwachsene neue Aufgabe löst Kronecker in geistreicher Weise durch Heranziehung der Formel (5) im Grenzfalle $\varrho = 0$, welche unter der Bezeichnung

$$F(\sigma, \tau, 0) = \lim_{\varrho=0} F(\sigma, \tau, \varrho)$$

offenbar die Gestalt hat

$$(7)\quad \begin{cases} F(\sigma, \tau, 0) = -1 + 2\pi \int_1^\infty e^{-4\pi^2 x f'(\sigma, \tau)} \frac{dx}{x} \\ + \int_1^\infty dx \sum_{m,n}' \left(e^{-x f(m,n) + 2\pi i (m\sigma + n\tau)} + \frac{2\pi}{x} e^{-4\pi^2 x f'(m+\sigma, n+\tau)} \right). \end{cases}$$

Wenn man nämlich in derselben das zweite Glied rechts auf die linke Seite bringt, so läßt sich der Grenzübergang zu $\sigma = 0$, $\tau = 0$ ausführen, und man erhält

$$-1 + \int_1^\infty dx \sum_{m,n}' \left(e^{-x f(m,n)} + \frac{2\pi}{x} e^{-4\pi^2 x f'(m,n)} \right)$$
$$= \lim_{\sigma=0,\, \tau=0} \left\{ F(\sigma, \tau, 0) - 2\pi \int_1^\infty e^{-4\pi^2 x f'(\sigma, \tau)} \frac{dx}{x} \right\}.$$

Die linke Seite bildet einen Bestandteil der rechten Seite von (6), und demnach hat man an Stelle von (6) die Gleichung

$$(8)\quad \begin{cases} \lim_{\varrho=0} \left[F(0, 0, \varrho) - \frac{2\pi}{\varrho} \right] \\ = -2\pi \Gamma'(1) + \lim_{\sigma=0,\, \tau=0} \left\{ F(\sigma, \tau, 0) - 2\pi \int_1^\infty e^{-4\pi^2 x f'(\sigma, \tau)} \frac{dx}{x} \right\}. \end{cases}$$

Nun hat aber Kronecker den Ausdruck $F(\sigma, \tau, 0)$ schon früher bestimmt, und zwar[1])

$$(9)\quad F(\sigma, \tau, 0) = -2\pi \log \left\{ e^{(w_1 + w_2)\tau^2 \pi i} \frac{\vartheta_1(\sigma + \tau w_1 | w_1)\, \vartheta_1(\sigma - \tau w_2 | w_2)}{H(w_1)\, H(w_2)} \right\},$$

wobei der Kürze wegen

$$w_1 = \frac{-b+i}{2c}, \quad w_2 = \frac{b+i}{2c}$$

gesetzt und ferner die Bezeichnung

$$(10)\quad H(w) = e^{\frac{w\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2nw\pi i})$$

benutzt wird. Die Bezeichnung $\vartheta_1(u|w)$ ist die in der Theorie der elliptischen Funktionen übliche, und zwar für $q = e^{w\pi i}$:

$$\vartheta_1(u|w) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin u\pi \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n} e^{2u\pi i})(1 - q^{2n} e^{-2u\pi i}).$$

---

1) Berliner Sitzungsberichte 1883, S. 497 u. ff.

Wir geben die Begründung des Hilfssatzes (9) weiter unten, und wollen uns seiner vorläufig bedienen, um den Grenzausdruck auf der rechten Seite von (8) zu ermitteln.

Man hat offenbar

$$\int_1^\infty e^{-4\pi^2 x f'(\sigma,\tau)} \frac{dx}{x} = \int_{4\pi^2 f'(\sigma,\tau)}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x},$$

und da sich vermöge der partiellen Integration die Formel ergibt

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = -e^{-\varepsilon} \log \varepsilon + \int_\varepsilon^\infty e^{-x} \log x \, dx,$$

aus welcher für unendlich kleine ε

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = -\log \varepsilon + \int_0^\infty e^{-x} \log x \, dx = -\log \varepsilon + \Gamma'(1)$$

folgt, so kann man an Stelle der rechten Seite von (8) schreiben

$$-4\pi\Gamma'(1) + \lim_{\sigma=0,\ \tau=0} \{F(\sigma,\tau,0) + 2\pi \log 4\pi^2 f'(\sigma,\tau)\}.$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist nun nach (9) offenbar

$$-2\pi \log e^{(w_1+w_2)\tau^2\pi i} \frac{\vartheta_1(\sigma+\tau w_1 \mid w_1)\, \vartheta_1(\sigma-\tau w_2 \mid w_2)}{H(w_1)\, H(w_2)\, 4\pi^2 f'(\sigma,\tau)},$$

und da man für unendlich kleine σ und τ

$$\sin(\sigma+\tau w_1)\pi \cdot \sin(\sigma-\tau w_2)\pi = \pi^2(\sigma+\tau w_1)(\sigma-\tau w_2) = \pi^2 \frac{f'(\sigma,\tau)}{c}$$

hat, so geht der in Rede stehende Ausdruck für $\sigma = 0$, $\tau = 0$ über in

$$-2\pi \log \frac{e^{(w_1+w_2)\frac{\pi i}{4}}\, \Pi\left(1-e^{2nw_1\pi i}\right)^8 \Pi\left(1-e^{2nm_2\pi i}\right)^8}{c \cdot H(w_1)\, H(w_2)}$$

$$= 4\pi \log \frac{\sqrt{c}}{H(w_1)\, H(w_2)}.$$

Man hat daher an Stelle von (8)

$$(11)\quad \lim_{\varrho=0}\left[F(0,0,\varrho) - \frac{2\pi}{\varrho}\right] = -4\pi\Gamma'(1) + 4\pi \log \frac{\sqrt{c}}{H(w_1)\, H(w_2)},$$

die Kroneckersche *Grenzformel*. Man kann ihr eine etwas allgemeinere Gestalt erteilen, indem man eine allgemeine *positive* quadratische Form $ax^2 + bxy + cy^2$ mit der negativen Diskriminante $b^2 - 4ac = -\Delta$ einführt. Wird dann

$$w_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c}, \quad w_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c}$$

gesetzt, so lautet das gemeinte Theorem wie folgt:

$$\lim_{\varrho=0}\left[-\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}{}'\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\varrho}\right]$$
$$=-2\Gamma'(1)-\log\sqrt{\Delta}+2\log\frac{\sqrt{c}}{H(w_1)\,H(w_2)}.$$

2. Nachdem wir den Hauptgegenstand erledigt haben, wollen wir auf einige Punkte näher eingehen, welche die Hilfsformel (9) betreffen. Man kann dieselbe vorläufig so formulieren, daß die Grenzgleichung

$$\lim_{\varrho=0}F(\sigma,\tau,\varrho)=\sum_{m,n}{}'\frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{f(m,n)} \tag{12}$$

stattfindet, wobei rechts die Summation zuerst nach n und dann nach m auszuführen ist, d. h. genau ausgedrückt, daß man die folgende Größe bilden soll:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi i n\tau}}{f(0,n)}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{f(m,n)}, \tag{12a}$$

wobei der am Summationszeichen angebrachte Accent bedeutet, daß man das Glied $n=0$, bezw. $m=0$ unterdrücken soll.

Daß die Übereinstimmung des Grenzwertes $F(\sigma,\tau,0)$ mit der Doppelreihe (12a) nicht von vorneherein klar ist, ersieht man schon aus dem Umstande, daß die Doppelreihe $F(\sigma,\tau,\varrho)$ für $\varrho>0$ absolut konvergiert, während dies bei (12a) nicht der Fall ist. Für diese Übereinstimmung hat Kronecker einen Beweis entwickelt, der sich auf eine Abelsche Identität gründet (l. c., Art. IV), außerdem hat er einen zweiten Beweis angedeutet (Art. V), dessen Ausführung jedoch dem Kommentator Herrn J. de Séguier nicht gelungen ist.[1]) Es wird an der betreffenden Stelle zwar mit aller Strenge gezeigt, daß der Grenzwert

$$\lim_{\varrho=0}F(\sigma,\tau,\varrho)=F(\sigma,\tau,0)$$

existiert, und daß er durch das Integral

$$\int_0^\infty dx\sum_{m,n}{}'e^{-xf(m,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)}$$

dargestellt wird; für die Übereinstimmung des letzteren mit dem Ausdruck (12a) habe ich mich jedoch vergebens bemüht, an der angegebenen

1) S. 192 des citierten Werkes.

Stelle irgend einen Beweisgrund zu entdecken. Der oben auseinandergesetzte analoge Beweis im Falle $\varrho > 0$ ist hier nicht anwendbar, weil das Integral

$$\int_0^\infty dx \sum{}' e^{-x f(m,\, n)}$$

nicht existiert. Bevor dieser prinzipielle Punkt mit gehöriger Strenge erledigt ist, kann ich nur den ersten von den Kroneckerschen Beweisen als brauchbar betrachten. Von diesem soll hier eine vereinfachte Darstellung kurz angedeutet werden. Es wird genügen zu zeigen, daß die Gleichung

$$\lim_{\varrho = 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{f(m,\, n)^{1+\varrho}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{f(m,\, n)}$$

stattfindet; denn der Rest der Doppelreihe läßt sich durch dasselbe Verfahren behandeln.

In der bekannten Abelschen Identität

$$\sum_{n=0}^{r} a_n b_n = \sum_{n=0}^{r-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_r b_r, \quad A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

etze ich

$$a_n = e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}, \quad b_n = f(m,\, n)^{-1-\varrho},$$

daß

$$A_n = \frac{e^{2\pi i m\sigma}\left(e^{2\tau\pi i(n+1)} - 1\right)}{e^{2\tau\pi i} - 1}.$$

Die Bemerkung, daß in diesem Falle

$$\lim_{r=\infty} A_r b_r = 0$$

liefert unmittelbar die Relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{f(m,\, n)^{1+\varrho}}$$

$$\frac{e^{2m\sigma\pi i}}{e^{2\tau\pi i} - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{2\tau\pi i(n+1)} - 1\right)\left[f(m,\, n)^{-1-\varrho} - f(m,\, n+1)^{-1-\varrho}\right].$$

Anwendung des Mittelwertsatzes ergibt ferner

$$f(m,\, n)^{-1-\varrho} - f(m,\, n+1)^{-1-\varrho}$$
$$= (1+\varrho) f(m,\, n+\vartheta)^{-2-\varrho}(bm + 2cn + 2c\vartheta),$$

wobei $0 < \vartheta < 1$ ist, und hieraus folgt, daß die Doppelreihe, welche entsteht, wenn man rechts $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ setzt und die Resultate addiert, nicht nur absolut, sondern auch gleichmäßig in Bezug auf ϱ in der Umgebung von $\varrho = 0$ konvergiert. Dies gibt

$$\lim_{\varrho=0} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{f(m,n)^{1+\varrho}}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2m\sigma\pi i}}{e^{2\tau\pi i}-1} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{2\tau\pi i(n+1)}-1)\left(\frac{1}{f(m,n)} - \frac{1}{f(m,n+1)}\right),$$

und die rechte Seite ist nichts anderes als eine Umformung der Doppelreihe

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{f(m,n)}$$

vermittelst der Abelschen Identität.

Nachdem die Gleichung (12) bewiesen ist, bleibt noch übrig, die Summation auf der rechten Seite auszuführen, um zur Hülfsformel (9) zu gelangen. Dies geschieht am einfachsten, wenn man gerade den umgekehrten Weg verfolgt wie Kronecker. Man erhält zunächst vermöge der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{f(m,n)} = \frac{1}{mi}\left(\frac{1}{n-mw_1} - \frac{1}{n+mw_2}\right);$$

multipliziert man beiderseits mit $e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}$, so läßt sich rechts mit Hilfe der Relation

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\tau\pi i}}{n-u} = 2\pi i \frac{e^{2u\tau\pi i}}{1-e^{2u\pi i}}$$

die Summation nach n ausführen, und wenn man in der so gewonnenen einfachen Reihe mit dem Summationsbuchstaben $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ die einzelnen Glieder in geometrische Reihen verwandelt, so wird man mit Hilfe der logarithmischen Reihe die Summation nach m ausführen können, wodurch dann nach geringen Rechnungen die Formel (9) sich ergibt.

Freiburg (Schweiz), 21. November 1902.

Geometrische Kriterien für die projektive Einteilung der nicht entarteten Kurven und Flächen zweiter Ordnung.

Von C. Koehler in Heidelberg.

Zur projektiven Einteilung der nicht entarteten Kurven und Flächen zweiter Ordnung, die im wesentlichen zusammenfällt mit der Einteilung der Polarfelder und der räumlichen Polarsysteme in solche von elliptischer, bezw. hyperbolischer Art, benützt man in der *Geometrie der Lage* gewöhnlich die beiden folgenden Kriterien[1]):

Eine Kurve zweiter Ordnung ist nur dann imaginär, wenn die drei Strahlen, durch welche ein beliebiger Punkt p der Ebene aus je einem Eckpunkte eines Poldreiecks projiziert wird, durch die jeweiligen übrigen beiden Eckpunkte getrennt sind von den Polaren π des Punktes p.

Eine Fläche zweiter Ordnung ist nur dann imaginär, wenn jede der sechs Ebenen, durch welche ein beliebiger Punkt p des Raumes aus den Kanten eines Poltetraeders projiziert wird, durch die beiden Eckpunkte der resp. Gegenkante getrennt ist von der Polarebene π des Punktes p.

Die beiden Kriterien gewähren in dieser Form insofern keine volle Befriedigung, als sie die *reellen* Kurven und Flächen nur *indirekt* als „nicht imaginäre" charakterisieren. Wollte man sich aber auch mit ihr bei den *Kurven* zweiter Ordnung zufrieden geben, so müßte doch das zweite Kriterium, um nicht nur zur Unterscheidung elliptischer und hyperbolischer Polarsysteme, sondern zur *vollständigen* projektiven Einteilung der *Flächen* zweiter Ordnung dienen zu können, so ausgestaltet werden, daß es auch noch die Trennung der reellen unter diesen Flächen in geradlinige und nichtgeradlinige ermöglicht, und würde dann eine sehr wenig übersichtliche Gestalt annehmen.

Es soll nun in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden, daß man beiden Kriterien eine Form geben kann, die nicht nur den reellen und imaginären Kurven, bezw. den nichtgeradlinigen, geradlinigen und imaginären Flächen zweiter Ordnung in gleicher Weise gerecht wird, sondern auch vor der bisherigen noch den Vorzug besitzt, daß in ihr *allein die zur Bestimmung der Kurve oder Fläche notwendigen Elemente* — ein Poldreieck oder Poltetraeder und die Polarelemente p und π —

1) Vgl. z. B. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., Bd. II, S. 124 und 133.

über deren projektive Beschaffenheit Aufschluß geben, eine Form also, die eine Konstruktion projizierender Strahlen oder Ebenen, wie sie oben nötig war, nicht mehr erfordert.

Die zur Herleitung dieser Kriterien in Nr. 1 für die Kurven, in Nr. 2 für die Flächen zweiter Ordnung durchgeführten Betrachtungen werden in ihrem weiteren Verlauf dann noch ergeben, wie die projektive Beschaffenheit des Schnittes der Kurve, bezw. Fläche mit der Geraden, bezw. Ebene π ebenfalls *aus der Konfiguration der Bestimmungselemente allein* erkannt werden kann.

1.

Eine im Unendlichen unbegrenzt gedachte Gerade wird durch zwei auf ihr liegende Punkte k und l in zwei Teile zerlegt. Wenn k und l eigentliche Punkte sind, so ist der eine Teil die von den beiden Punkten eingeschlossene *Strecke* kl; der andere soll als die *Außenstrecke* $\overline{kl}$ dieser Punkte bezeichnet werden. Jeden der beiden Teile wollen wir auch die *Ergänzung* des anderen nennen, da sie sich gegenseitig zur Geraden $|kl|$ ergänzen.

In gleicher Weise wird eine im Unendlichen unbegrenzt gedachte Ebene durch drei ihrer Geraden $\varkappa, \lambda, \mu$, die sich nicht in demselben Punkte schneiden, in vier Teile zerlegt. Sind $k = (\lambda\mu)$, $l = (\mu\varkappa)$, $m = (\varkappa\lambda)$ die Schnittpunkte der drei Geraden, so besitzt bei eigentlichem k, l, m einer dieser Teile die *Strecken* kl, lm, mk als *Seiten*, — wir nennen ihn, wo er von den drei anderen unterschieden werden soll, das *Hauptdreiseit* unserer Ebeneneinteilung — ein zweiter besitzt die *Strecke* lm und die *Außenstrecken* $\overline{kl}$, $\overline{km}$ als *Seiten* und kann deshalb auch als ein *Dreiseit* (in weiterem Sinne) bezeichnet werden u. s. w. Wir erhalten also *vier Dreiseite mit den Ecken* k, l, m und können somit sagen:

Eine Ebene wird durch drei ihrer Geraden, die sich nicht in demselben Punkte schneiden, in vier Dreiseite zerlegt.

Die drei Geraden $\varkappa, \lambda, \mu$ schneiden nun jede andere mit ihnen in einer Ebene liegende Gerade π, die durch keinen der Punkte k, l, m geht, in drei verschiedenen Punkten, sie zerlegen dieselbe also in drei Teile. Die Gerade π geht mithin immer durch drei und nur durch drei von den vier aus $\varkappa, \lambda, \mu$ gebildeten Dreiseiten hindurch und trifft jedes derselben in zwei Seiten, d. h.

In einer Ebene schneidet jede Gerade, welche durch keine Ecke der vier aus drei Geraden in allgemeiner Lage gebildeten Dreiseite geht, stets drei von diesen; mit dem vierten aber hat sie keinen Punkt gemein.

Es sei jetzt die projektive Beschaffenheit einer nicht entarteten Kurve zweiter Ordnung zu bestimmen, von der ein Poldreieck mit den Ecken k, l, m und den Seiten*linien* $\varkappa$, λ, μ, sowie die Polare π eines auf keiner dieser Seitenlinien liegenden Punktes p gegeben ist. Dann ist von den vier Dreiseiten, in welche die Ebene der Kurve durch das Poldreieck zerlegt wird, eines vor den übrigen dadurch ausgezeichnet, daß der Punkt p *innerhalb* desselben liegt. Dieses wollen wir, da es uns im Verein mit der Geraden π das Kriterium für die projektive Einteilung der Kurve liefern wird, das für diese Einteilung *charakteristische Dreiseit*, die Gerade π aber *die ihm zugeordnete Gerade* nennen.

Zunächst sieht man unmittelbar, daß man als Projektionen des Punktes p aus den Punkten k, l, m auf die Geraden $\varkappa$, λ, μ stets drei Punkte k', l' m' erhält, die auf den Seiten des charakteristischen Dreiseits selbst, also niemals auf deren Ergänzungen liegen. Durchlaufen wir nämlich den projizierenden Strahl $|kp|$ vom Punkte p aus im Sinne pkk', so treten wir bei k unter Überschreitung der Geraden λ und μ aus dem charakteristischen Dreiseit heraus, wir müssen also, um wieder in dasselbe einzutreten, die Gerade $\varkappa$ überschreiten; der Punkt k' muß somit auf demjenigen Teile dieser Geraden liegen, welcher dem charakteristischen Dreiseit als Seite angehört. Nun sind aber in der Involution, welche von der Kurve auf der Geraden $\varkappa$ hervorgerufen wird, die Punkte l und m, sowie die Punkte k' und $(\pi\varkappa)$ einander konjugiert, diese Involution ist somit dann und nur dann hyperbolisch, wenn auch der Punkt $(\pi\varkappa)$ auf dem zur Begrenzung des charakteristischen Dreiseits beitragenden Teil der Geraden $\varkappa$ liegt, wenn also die Gerade π die Gerade $\varkappa$ in der Begrenzung dieses Dreiseits trifft, d. h.

I. *Von den Seitenlinien eines Poldreiecks schneiden immer und nur diejenigen die Kurve in zwei reellen Punkten, welche von der einem charakteristischen Dreiseit desselben zugeordneten Geraden in den Seiten des letzteren getroffen werden.*

Da aber eine Kurve zweiter Ordnung nur dann reell ist, wenn sie von jedem ihrer Poldreiecke reell geschnitten wird, so ergibt sich hieraus sofort für die projektive Einteilung dieser Kurven das Kriterium:

II. *Eine nicht entartete Kurve zweiter Ordnung ist reell oder imaginär, je nachdem ein charakteristisches Dreiseit derselben von der ihm zugeordneten Geraden geschnitten wird oder nicht.*

Ebenso einfach können wir auch erkennen, ob die Gerade π die Kurve reell oder imaginär schneidet. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Einteilung der Ebene durch die *vier* Geraden $\varkappa$, λ, μ und π. Da von den vier Dreiseiten, in welche die Ebene durch die *drei* Geraden $\varkappa$,

λ, μ *allein* eingeteilt wird, diejenigen drei, welche von der Geraden π geschnitten werden, in je zwei Teile zerfallen und von diesen beiden Teilen immer der eine dreiseitig, der andere aber vierseitig begrenzt ist, so können wir sagen:

Eine Ebene wird durch vier ihrer Geraden, von denen sich keine drei in demselben Punkte schneiden, in vier Dreiseite und in drei Vierseite zerlegt.

Wir zeigen jetzt, daß die Gerade π die Kurve zweiter Ordnung immer imaginär schneidet, sobald ihr Pol p in ein Dreiseit der durch sie und das Poldreieck klm bewirkten Ebeneneinteilung fällt. Dies ist unmittelbar ersichtlich, wenn p in demjenigen Dreiseit dieser Einteilung liegt, zu dessen Begrenzung die Gerade π *nicht* beiträgt, da dann nach II die Kurve selbst imaginär ist. Liegt dagegen p in einem anderen Dreiseit dieser Einteilung, — es sei dasjenige mit den Ecken k, $(\pi\lambda)$, $(\pi\mu)$, — so ist die Kurve selbst nach II reell, sie wird aber nach I von der Seitenlinie $\varkappa$ des Poldreiecks in zwei imaginären Punkten geschnitten. Der Punkt $(\pi\varkappa)$ befindet sich somit *außerhalb* der Kurve und trägt daher in Bezug auf sie eine *hyperbolische* Strahleninvolution, in der die Strahlen $\varkappa$ und $|(\pi\varkappa)k|$, sowie die Strahlen π und $|(\pi\varkappa)p|$ einander konjugiert sind. Aus der für p angenommenen Lage folgt aber auch direkt, daß die Strahlen $\varkappa$ und π durch die beiden ihnen konjugierten Strahlen nicht voneinander getrennt sind. Diese Strahlen werden also auch durch die Doppelstrahlen der Involution nicht voneinander getrennt und müssen somit beide die Kurve *gleichartig* schneiden; diese muß daher, da sie von der Geraden $\varkappa$ imaginär geschnitten wird, von der Geraden π ebenfalls in zwei imaginären Punkten getroffen werden.

Auf die gleiche Weise überzeugt man sich davon, daß die Gerade π die Kurve reell schneidet, wenn ihr Pol p in einem Vierseit unserer Ebeneneinteilung liegt, und da endlich die beiden Kurvenpunkte auf π zusammenfallen, wenn p auf π selbst liegt, so gilt der Satz:

III. *Eine Gerade schneidet eine nicht entartete Kurve zweiter Ordnung in zwei reellen oder in zwei imaginären Punkten, je nachdem ihr Pol in einem Vierseit oder in einem Dreiseit der durch sie und ein Poldreieck bewirkten Ebeneneinteilung liegt. In zwei zusammenfallenden Punkten trifft die Gerade die Kurve nur dann, wenn ihr Pol auf die Grenze zwischen einem Dreiseit und einem Vierseit fällt.*[1])

---

1) Da selbstverständlich keine Ecke des zur Zerlegung der Ebene benützten Poldreiecks auf der Geraden liegen darf, ihr Pol also niemals auf eine Seitenlinie des letzteren fallen kann, so sagt der letzte Teil des Satzes nur, daß die Gerade

Ist von einer Kurve zweiter Ordnung ein eigentliches Poldreieck und der Mittelpunkt gegeben, so ergibt sich aus diesem Satz direkt das Verhalten der Kurve im Unendlichen. Er dient also dann zu ihrer metrischen Einteilung, und wir erhalten nach ihm und II in diesem speziellen Fall für die Gesamteinteilung der Kurve folgende Kriterien:

„Eine Kurve zweiter Ordnung ist imaginär, wenn ihr Mittelpunkt im Hauptdreiseit der durch ein eigentliches Poldreieck bestimmten Ebeneneinteilung liegt; sie ist eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem ihr Mittelpunkt in dem dreiseitig oder in dem vierseitig begrenzten Teile eines durch die unendlich ferne Gerade nochmals zerlegten Dreiseits dieser Einteilung liegt; sie ist endlich eine Parabel, wenn ihr Mittelpunkt ein uneigentlicher Punkt ist.[1])"

2.

Der ganze im Unendlichen unbegrenzt gedachte Raum wird durch vier Ebenen $\varkappa$, λ, μ, ν, die sich nicht in demselben Punkte schneiden, in acht Teile zerlegt. Jeder dieser Teile ist von vier Dreiseiten (im Sinne von Nr. 1) begrenzt und soll deshalb ein *Tetraeder* genannt werden, obgleich nur einer derselben ein Tetraeder im Sinne der Elementargeometrie ist. Wir können dann sagen:

Durch vier Ebenen, welche sich nicht in demselben Punkte schneiden, wird der ganze Raum in acht Tetraeder zerlegt.

Alle acht Tetraeder besitzen als *Ecken* die vier Punkte $k = (\lambda\mu\nu)$, $l = (\varkappa\mu\nu)$, $m = (\varkappa\lambda\nu)$, $n = (\varkappa\lambda\mu)$. Die *Seitenflächen* oder *Seiten* eines Tetraeders sind die dasselbe begrenzenden *Dreiseite*, seine *Kanten* die Seiten dieser Dreiseite. Bei eigentlichem k, l, m, n besitzt eines dieser Tetraeder, das dann das *Haupttetraeder* unserer Raumeinteilung heißen soll, als Kanten die Strecken kl, km, kn, lm, ln, mn. Drei andere haben mit diesem keine Seitenfläche, sondern nur je eines der drei Paare von Gegenkanten gemein. Zu ihnen gehört also das Tetraeder, dessen Kanten die Strecken kl, mn und die Außenstrecken $\overline{km}$, $\overline{kn}$, $\overline{lm}$, $\overline{ln}$ sind, u. s. w. Wir bezeichnen diese drei mit dem Haupttetraeder zusammen als die vier *Tetraeder erster Art* unserer Einteilung. Die vier noch übrigen Tetraeder — die *Tetraeder zweiter Art* — haben mit

die Kurve berührt, wenn ihr Pol auf sie selbst fällt. Die Form, die ihm oben gegeben wurde, paßt aber besser in den Rahmen von III und läßt außerdem die Analogie mit dem ihm entsprechenden Teile des Satzes VI für die Flächen zweiter Ordnung deutlicher hervortreten.

1) Vgl. Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig 1895. S. 253, Nr. 34.

dem Haupttetraeder je eine Seitenfläche gemein, eines derselben ist also das Tetraeder, das als Kanten die Strecken lm, mn, nl und die Außenstrecken $\overline{kl}$, $\overline{km}$, $\overline{kn}$ besitzt, u. s. w.

Nun wird, wie wir in Nr. 1 gesehen haben, jede Ebene π, die durch keinen der Punkte k, l, m, n geht, durch die vier Geraden $|\pi\varkappa|$, $|\pi\lambda|$, $|\pi\mu|$, $|\pi\nu|$ in vier Dreiseite und in drei Vierseite, also in sieben Teile zerlegt, d. h.

Jede Ebene, die durch keine Ecke der acht aus vier Ebenen in allgemeiner Lage gebildeten Tetraeder geht, schneidet sieben von diesen und zwar vier in Dreiseiten, drei in Vierseiten, mit dem achten aber hat sie keinen Punkt gemein.[1])

Wir nehmen jetzt an, es sei von einer nichtentarteten Fläche zweiter Ordnung ein Poltetraeder oder, wie wir aus leicht ersichtlichem Grunde hier lieber sagen wollen, ein *räumliches Polviereck*[2]) mit den Ecken k, l, m, n und den Seiten*ebenen* $\varkappa$, λ, μ, ν, sowie die Polarebene π eines in keiner dieser Seitenebenen liegenden Punktes p gegeben. Dann werden wir die projektive Beschaffenheit der Fläche erkennen können aus der Lage, welche die Ebene π in Bezug auf dasjenige der acht aus den Ebenen $\varkappa$, λ, μ, ν gebildeten Tetraeder einnimmt, innerhalb dessen der Punkt p liegt. Wir nennen das letztere deshalb das für die projektive Einteilung der Fläche *charakteristische Tetraeder*, die Ebene π aber *die ihm zugeordnete Ebene.*

Genau wie in Nr. 1 findet man zunächst, daß die Projektionen k', l', m', n' des Punktes p aus den Punkten k, l, m, n auf die Ebenen $\varkappa$, λ, μ, ν stets auf die Seitenflächen des charakteristischen Tetraeders fallen müssen. Da aber für die Schnittkurve der Fläche mit der Ebene $\varkappa$ die Punkte l, m, n ein Poldreieck bilden und die Gerade $|\pi\varkappa|$ die Polare des Punktes k' ist, folgt hieraus, daß wir in der der Ebene $\varkappa$ angehörenden Seitenfläche des charakteristischen Tetraeders ein charakteristisches Dreiseit dieser Schnittkurve mit der ihm zugeordneten Geraden $|\pi\varkappa|$ besitzen Die Kurve ist somit nach II reell oder imaginär, je nachdem die Ebene π jene Seitenfläche schneidet oder nicht schneidet, d. h.

IV. *Von den Seitenebenen eines räumlichen Polvierecks schneiden immer und nur diejenigen die Fläche in einer reellen Kurve, welche von*

---

1) Man sieht leicht, daß diejenigen Teile einer solchen Ebene, welche durch zwei Tetraeder *gleicher Art* aus ihr ausgeschnitten werden, stets *gleichartig* begrenzt sind, d. h. daß die Ebene immer sämtliche Tetraeder der einen Art in Dreiseiten, diejenigen der anderen Art aber bis auf Eines in Vierseiten schneidet.

2) Im Anschluß an Reye (Journ. f. Math. Bd. 77, S. 272).

der einem charakteristischen Tetraeder desselben zugeordneten Ebene in den Seiten des letzteren getroffen werden.[1])

Je nachdem also drei, vier oder keine Seite des charakteristischen Tetraeders von der Ebene π geschnitten werden, besitzt die Fläche in drei, in allen vier oder in keiner Seitenebene des gegebenen Polvierecks eine reelle Schnittkurve. Wir erhalten daher für die projektive Einteilung der Fläche das Kriterium:

V. *Eine nicht entartete Fläche zweiter Ordnung ist nichtgeradlinig, geradlinig oder imaginär, je nachdem ein charakteristisches Tetraeder derselben von der ihm zugeordneten Ebene in einem Dreiseit, in einem Vierseit oder gar nicht geschnitten wird.*

Wenn wir von einer Fläche zweiter Ordnung außer einem eigentlichen Polviereck speziell den Mittelpunkt kennen und aus diesen Elementen ein charakteristisches Tetraeder bilden, dem dann die unendlich ferne Ebene zugeordnet ist, so ergibt sich hieraus, da diese Ebene sämtliche Tetraeder zweiter Art in Dreiseiten, alle Tetraeder erster Art außer dem Haupttetraeder aber in Vierseiten schneidet, der Satz:

„Eine Fläche zweiter Ordnung ist imaginär, geradlinig oder nichtgeradlinig, je nachdem ihr Mittelpunkt im Haupttetraeder, in einem der drei übrigen Tetraeder erster Art oder in einem Tetraeder zweiter Art der durch ein eigentliches Polviereck bestimmten Raumeinteilung liegt."

Um die projektive Beschaffenheit der Kurve zu bestimmen, welche eine Fläche zweiter Ordnung aus der einem charakteristischen Tetraeder zugeordneten Ebene π ausschneidet, untersuchen wir zunächst die Einteilung, die der Raum durch die *fünf* Ebenen $\varkappa$, λ, μ, ν und π erhält. Da die Ebene π sieben von den acht aus den *vier* Ebenen $\varkappa$, λ, μ, ν *allein* gebildeten Tetraedern schneidet, also in je zwei Teile zerlegt, wird der ganze Raum durch die fünf Ebenen zusammen in fünfzehn Teile geteilt. Betrachten wir nun eines der obigen Tetraeder, das durch die Ebene π in zwei Teile gespalten wird, so sehen wir, daß jede von π getroffene Seitenfläche desselben selbst durch π in zwei Teile — ein Dreiseit und ein Vierseit — zerlegt wird, daß sie also für jeden der beiden durch die Tetraederspaltung entstehenden Raumteile eine Seitenfläche liefert. Wenn mithin die Ebene π das betrachtete Tetraeder in einem Vierseit

---

1) Auf die Kanten*linien* des Polvierecks übertragen lautet dieser Satz:
Von den Kantenlinien eines räumlichen Polvierecks schneiden immer und nur diejenigen die Fläche in zwei reellen Punkten, welche von der einem charakteristischen Tetraeder desselben zugeordneten Ebene in den Kanten des letzteren getroffen werden.

schneidet, so besitzen die beiden Raumteile außer der von π gelieferten noch vier Seitenflächen, sie sind somit beide von fünf Seiten oder pentaedrisch begrenzt. Wird das Tetraeder dagegen von der Ebene π in einem Dreiseit geschnitten, so hat der eine der beiden Raumteile nur vier, der andere aber fünf Seitenflächen, d. h. der eine ist tetraedrisch, der andere pentaedrisch begrenzt. Da der erstere Fall immer bei drei, der letztere bei vier Tetraedern eintritt, eines der acht Tetraeder aber von der Ebene π überhaupt nicht getroffen wird, so finden wir mithin:

Durch fünf Ebenen, von denen sich keine vier in demselben Punkte schneiden, wird der ganze Raum in fünf Tetraeder und in zehn Pentaeder zerlegt.

Man erkennt nun leicht, daß die Ebene π unsere Fläche zweiter Ordnung reell oder imaginär schneidet, je nachdem ihr Pol p in ein Pentaeder oder in ein Tetraeder der durch sie und das Polviereck $klmn$ hervorgerufenen Raumeinteilung fällt. Diese Schnittkurve ist zunächst sicher reell, wenn der Punkt p in einem derjenigen sechs Pentaeder liegt, zu deren Begrenzung die Ebene π je ein Vierseit liefert, da dann das aus den Elementen $\varkappa$, λ, μ, ν und p gebildete charakteristische Tetraeder der Fläche von der ihm zugeordneten Ebene π in einem Vierseit getroffen wird, die Fläche selbst also geradlinig ist. Ferner ist diese Kurve sicher imaginär, wenn der Punkt p in demjenigen Tetraeder unserer neuen Raumeinteilung liegt, zu dessen Begrenzung die Ebene π *nicht* beiträgt; denn dann ist die Fläche selbst imaginär. Liegt aber p in einem der vier anderen Tetraeder dieser Einteilung, — etwa in demjenigen mit den Ecken k, $(\pi\lambda\mu)$, $(\pi\mu\nu)$, $(\pi\nu\lambda)$ — so ist die Fläche selbst nichtgeradlinig, weil die Ebene π aus dem charakteristischen Tetraeder das Dreiseit mit den drei zuletzt genannten Ecken ausschneidet, und aus IV folgt dann, daß die Schnittkurve der Fläche mit der Seitenebene $\varkappa$ des gegebenen Polvierecks imaginär ist, die Gerade $|\pi\varkappa|$ also in Bezug auf die Fläche eine *hyperbolische* Ebeneninvolution tragen muß. Hieraus ergibt sich aber durch eine Überlegung, die der am Schlusse von Nr. 1 angestellten genau entspricht, daß auch die Schnittkurve der Fläche mit der Ebene π imaginär sein muß. Auf die gleiche Weise überzeugt man sich endlich davon, daß diese Kurve dagegen wieder reell ist, sobald der Punkt p in einem derjenigen vier Pentaeder liegt, deren von der Ebene π gelieferte Seitenfläche dreiseitig begrenzt ist.

Auf die Grenze zwischen zwei Teilen unserer Raumeinteilung kann der Punkt p offenbar nur dann fallen, wenn er in der Ebene π selbst

liegt, diese also eine Berührungsebene der Fläche ist. Dann folgt aber unmittelbar aus V, daß diese Ebene die Fläche in einem reellen oder in einem imaginären Geradenpaar schneidet, je nachdem p auf der Grenze zwischen zwei Pentaedern oder zwischen einem Pentaeder und einem Tetraeder liegt, weil im ersteren Fall das charakteristische Tetraeder der Fläche von der ihm zugeordneten Ebene π in einem Vierseit, im letzteren dagegen in einem Dreiseit getroffen wird. Es gilt somit der Satz:

VI. *Eine Ebene schneidet eine nicht entartete Fläche zweiter Ordnung in einer nicht entarteten reellen oder imaginären Kurve, je nachdem ihr Pol in einem Pentaeder oder in einem Tetraeder der durch sie und ein Polviereck bewirkten Raumeinteilung liegt. Die Schnittkurve ist dagegen ein reelles, bezw. imaginäres Geradenpaar, wenn der Pol der Ebene auf die Grenze zwischen zwei Pentaedern, bezw. zwischen einem Pentaeder und einem Tetraeder fällt.*

Wenn von einer Fläche zweiter Ordnung außer einem eigentlichen Polviereck der Mittelpunkt gegeben ist, so dient dieser Satz zur projektiven Einteilung ihrer Schnittkurve mit der unendlich fernen Ebene, also zur metrischen Einteilung der Fläche und liefert dann mit V zusammen für die Gesamteinteilung derselben folgende Kriterien:

„Eine Fläche zweiter Ordnung ist imaginär, wenn ihr Mittelpunkt in dem Haupttetraeder der durch ein eigentliches Polviereck bestimmten Raumeinteilung liegt; sie ist ein einfaches Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid, je nachdem ihr Mittelpunkt ein eigentlicher oder ein uneigentlicher Punkt eines vom Haupttetraeder verschiedenen Tetraeders erster Art ist; sie ist ein Ellipsoid oder ein zweifaches Hyperboloid, je nachdem ihr Mittelpunkt in dem tetraedrisch oder in dem pentaedrisch begrenzten Teile eines durch die unendlich ferne Ebene nochmals zerlegten Tetraeders zweiter Art liegt; sie ist endlich ein elliptisches Paraboloid, wenn ihr Mittelpunkt ein uneigentlicher Punkt eines Tetraeders zweiter Art ist."

Heidelberg, den 15. Dezember 1901.

The So-called Foundations of Geometry.

By EDWIN BIDWELL WILSON of Yale University, New Haven (Conn.).

1. — In the current number of the *Mathematische Annalen*[1]), Mr. Hilbert has printed an elaborate account of his recent work on the foundations of geometry. A preliminary sketch of the work had previously appeared in the *Göttinger Nachrichten.*[2]) In these papers the method of treatment is quite the reverse of that earlier employed in the now famous *Festschrift, Grundlagen der Geometrie*[3]) — except in one point only there is no similitude between the methods. That one point of resemblance is the strict regard for absolutely perfect *logic* and a natural corresponding disregard for that *intuition* which hitherto has played such a preponderating rôle in geometry.

In the earlier work the author introduced the axiom of continuity last; in the present case that axiom is fundamental from the start. There is a greater difference. In the *Festschrift* Mr. Hilbert followed to a considerable extent the methods that have been employed ever since Euclid for discussing geometry. So nearly did he, despite his merciless logic, confine himself in the usual paths that some enthusiasts have been led to believe that his work will become current in the schools of elementary instruction. We doubt that: but it only goes to confirm our statement that the author at that time was following the lines that had earlier been laid out more or less carefully, especially in Italy, and have since been followed by Messrs. Schur[4]) and Moore[5]) to demonstrate that the axioms found by Mr. Hilbert are not independent as he seemed to think them. These results of later investigators indicate the great difficulties, the great liability to slight errors which beset any one who uses the geometric method, the geometric intuition — even never so slightly — for attempting to lay down a logically complete and independent system of axioms in Euclidean geometry. The number of the axioms renders demonstrations of their completeness and independence, such as have of late frequently been given in cases

1) Bd. 56, Heft 3, pp. 381—422, October 1902.

2) 1902 p. 234.

3) Leipzig, B. G. Teubner 1899. Paris, Gauthier-Villars 1900 (trans. by Mr. Laugel). Chicago, The Open Court Pub. Co. 1902 (trans. by Mr. Townsend).

4) Mathematische Annalen Bd. 55, p. 265 et seq.

5) Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 3 pp. 142 seq.

where the number of axioms is much fewer[1]), very tedious even if possible.

It is no surprise therefore to see the illustrious author seeking a new method of attack in which the number of axioms is far fewer. In his recent memoir Mr. Hilbert proceeds from the ideas of *manifoldnesses* (Mannigfaltigkeiten) introduced into geometry by Grassmann in the *Ausdehnungslehre* and Riemann in his *Habilitationsschrift* and from the ideas of *groups* introduced by Lie. The method of treatment, however, differs fundamentally from that of Lie; still more from that of his predecessors Riemann and Helmholtz. For whereas Lie[2]) carried on his analysis by means of a coördinate-system x, y in the plane, x, y, z in space, and so on for higher dimensions; Mr. Hilbert uses the newer, and perhaps more difficult and subtile theory of manifoldnesses as developed by Mr. G. Cantor without any especial reference to a system of coördinates in a geometric space.

Mr. Hilbert confines himself to the plane, i. e. to a two dimensional manifoldness. His particular instrument of investigation is the famous theorem of Mr. Jordan[3]) to the effect that any curve C which is continuous, closed, and possesses no double-point, divides the plane into two distinct regions, an inner and an outer, such that it is impossible to pass from the one to the other by a continuous path Γ without crossing the curve C. Any curve continuous including its extremities and without double-points is called a Jordan-curve. Any region enclosed by a closed Jordan-curve is called a Jordan-region.

This method of procedure is not at all natural from the geometric standpoint and no enthusiast will be led so far as to claim for it a place in elementary instruction. Moreover the transcendent clearness which was so conspicuous in the *Festschrift* is not present in this later memoir. There are also possibilities, conceivable logically, which are overlooked and, if not filled in, lead to misunderstanding, perhaps even to error. The object of the present writer is first to render clearer some parts of Mr. Hilbert's memoir, second to fill in an omission, third to say a few words in comment upon what has been and what has not been accomplished by this new work. In order to carry out this program it will be necessary to quote considerably from Mr. Hilbert.

---

1) Axioms defining arithmetic and the conception of a finite group. See especially papers by Messrs. Dickson, Huntington, and others in current numbers of the Bulletin of the American Mathematical Society and the Transactions of the American Mathematical Society.

2) Theorie der Transformationsgruppen, Abschnitt 3, 1893.

3) Cours d'Analyse, 2 ed., 1893, pp. 90—100.

2. — As has been said the author treats plane geometry only, although he expresses the opinion that a similar treatment may be given to geometry in higher dimensions. He has, however, two different planes, two different circles, two different points, and so forth. These are in correspondence, to be sure, in a manner mutually one to one. By the word *mutually* we mean that the correspondence is one to one in passing whether from the first set of objects to the second or from the second to the first. This correspondence makes Mr. Hilbert's use of the same name and the same letter for corresponding objects not less confusing, but rather more so. For a great difficulty is experienced in distinguishing between the related objects and thus the meaning and the value of a theorem or definition is misjudged. One first duty is to clear up this matter.

The *fundamental* plane — that in terms of which the other is defined — is the *number-plane* (Zahlenebene), which is said to be *the ordinary plane with a rectangular system of coordinates x and y.*[1]) This is very confusing. It is in reality sheer nonsense. For what it seems to state is that we are already in possession of a plane, of right angles and of a method of measuring which enables us to plot points x, y by means of rectilinear constructions. If this were so, we already have our geometry fullgrown and the author's elaborate foundations upon which he builds his definition of a straight line, his whole memoir in fact become comparatively trivial. It is perfectly clear in view of later developments that what Mr. Hilbert meant to say was that his number-plane is a two dimensional manifoldness of numbers. It is the manifoldness of all pairs of real, rational or irrational, positive or negative, numbers which we may symbolize by (x, y) and which we might plot if only we had the means of plotting — which we have not. Moreover the plotting is unessential. In ordinary work it aids our intuition. In this case, however, we are trying to rid ourselves of geometric intuition and the geometric manner of speaking becomes confusing instead of illuminating.

The fundamental field of operation is the doubly infinite manifoldness of pairs of real numbers (x, y). Within this field there is the Jordan-curve, which is a continuous one-dimensional manifoldness of the values (x, y) in which no pair of values figures twice. Mr. Jordan, like Mr. Hilbert, in the demonstration in his Cours d'Analyse speaks in geometric terms. That is unnecessary though, in

1) p. 382. Wir verstehen unter der Zahlenebene die gewöhnliche Ebene mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y.

his case, convenient. Here it is both unnecessary and inconvenient — still we shall keep to it, in order that our treatment shall not differ too much from that we are criticizing. Later in his memoir, Mr. Hilbert speaks of a number-circle in the number-plane. This is a method of naming the manifoldness of numbers which satisfy the numerical relation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2, \qquad a,\ b,\ k \text{ are real},$$

in such a manner that x und y are both real.

Second to the number-plane and dependent upon it is the plane of our geometry, which may be called the geometric plane. This plane is defined at length as follows (the italics and the words in the parentheses are my own)[1]):

"The (geometric) plane is a system of *points* mappable, in a manner mutually one to one, upon the *finite* points of the number-plane or upon a certain part of them.

"To each point A of our (geometric) plane there are Jordan-regions (of the number-plane) in which the map of A lies and of which each point corresponds to a point of our (geometric) plane. These Jordan-regions are called the *neighbourhoods* of A. Every Jordan-region which is contained in a neighbourhood of A and which contains A is likewise a neighbourhood of A. If B is any point in the neighbourhood of A, then this neighbourhood is also a neighbourhood of B.

"If A and B are any two points of our plane, there is always a neighbourhood which is at once a neighbourhood of A and a neighbourhood of B."

---

1) To avoid all danger arising from a mistranslation I shall here and in some other places quote the German in foot-notes. Definition der Ebene. Die Ebene ist ein System von Punkten, die sich umkehrbar eindeutig auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein gewisses Teilsystem derselben abbilden lassen.

Zu jedem Punkte A unserer Ebene gibt es Jordansche Gebiete, in welchen der Bildpunkt von A liegt und deren sämtliche Punkte ebenfalls Punkte unserer Ebene darstellen Diese Jordanschen Gebiete heißen Umgebungen des Punktes A. Jedes in einer Umgebung von A enthaltene Jordansche Gebiet, welches den Punkt A einschließt, ist wiederum eine Umgebung von A. Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Ebene sind, so gibt es stets eine Umgebung, die zugleich eine Umgebung von A und eine Umgebung von B ist. p. 383.

What a *point* may be is not told us. But as the author in his earlier *Festschrift* looked upon a point as merely a *thing* to be set into relation with other things like it or unlike it, we may assume here that the point is merely an element of operation which is set in correspondence with the pair of numbers (x, y). The use of the same word *point* and especially of the same notation for points in the number-plane and in the geometric plane is a little confusing. Let us examine the definition of *neighbourhood*. This definition also is arithmetic. Two geometric points A and B are said to be neighbouring where their corresponding number-points $(x, y)_A$ and $(x, y)_B$ are neighbours in the number-plane. In as much as it is nowhere stated that the correspondence between the points of the two planes shall be continuous, there can be no reason to suppose that two neighbouring geometric points A, B shall be near each other when plotted in a geometric plane. The idea of neighbourhood, as indeed the idea of the geometric point, is merely an arithmetic idea founded on the theory of the manifoldness (x, y). More of this, later.

At present all we can see is that the number-plane with its points and the geometric plane with its points are merely two different names for two two-dimensional manifoldnesses which can scarcely ever be regarded as different because one is defined by means of the other and no essential quantitative or qualitative difference is brought to light. The remarks which are made apropos of neighbourhood do show, however, that the geometric plane must be mappable upon a single region of the number-plane. The "certain part", the "gewisses Teilsystem" cannot be two distinct separated regions or it would be possible to find two points A and B which had no common neighbourhood, because they might be mapped in different regions of the number plane. This matter is not mentioned by Mr. Hilbert.

3. — The definition of a motion, like the definition of neighbourhood, depends upon the number-plane and is consequently not "geometric" or intuitive. It is as follows[1]):

"A motion is a mutually one to one continuous transformation of the points in the number-plane into themselves in such a manner that the sense of a closed Jordan-curve remains unaltered.

1) Definition der Bewegung. Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Bildpunkte der Zahlenebene in sich von der Art, daß dabei der Umlaufssinn einer geschlossenen Jordanschen Kurve stets derselbe bleibt.

Eine Bewegung, bei welcher der Punkt M ungeändert bleibt, heißt eine Drehung um den Punkt M. p. 383.

"A motion which leaves a point M fixed is called a rotation about the point M."

The axioms, three in number, follow.[1])

"Axiom I. The motions form a group.

"Axiom II. If A and M are arbitrary non-coincident points of the (geometric?) plane, the point A may be carried by a rotation about M into an infinity of different positions.

"Axiom III. If there is a motion by means of which three points *infinitely near* to three given points ABC can be carried into three points infinitely near to three given points $A'B'C'$ then there exists a motion by means of which the three points ABC may be carried *exactly* into the three points $A'B'C'$."

As a name for the infinitely great number of positions spoken of in Axiom II Mr. Hilbert introduces the term *wahrer Kreis* which shall be translated by *geometric circle*, in contrast to the number-circle of which we have spoken earlier. Later further correspondences between the two circles are deduced.

By the use of these axioms and definitions and well known theorems in the theory of manifoldnesses or ensembles the author, after some thirty-five pages of close reasoning, succeeds in defining what he calls a *wahre Gerade*, which shall be translated *geometric line*, and in showing, as he says, that: A plane geometry, in which the axioms I—III hold, is either the Euclidean or the Bolyai-Lobatschefskyan plane geometry.

There are a number of questions which arise in connection with these definitions and axioms. In the first place we are told what a motion is and that the motions must form a group, and so forth. But we are not told how many of the motions we shall consider. We may well assume that we shall consider *all* motions which obey

1) Axiom I. Werden zwei Bewegungen hintereinander ausgeführt, so ist die dann entstehende Transformation unserer Ebene in sich wiederum eine Bewegung. Oder kürzer: Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

Axiom II. Wenn A und M beliebige von einander verschiedene Punkte der Ebene sind, so kann man den Punkt A durch Drehung um M stets in unendlich viele verschiedene Lagen bringen. Oder kürzer: Jeder wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten.

Axiom III. Wenn es Bewegungen gibt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so gibt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktetripel ABC genau in das Punktetripel $A'B'C'$ übergeht. Oder kürzer: Die Bewegungen bilden im Endlichen ein abgeschlossenes System. p. 384—385.

our axioms and our definition. From this it will immediately follow that to any given motion S there corresponds an inverse S^{-1}. This fact is assumed by Mr. Hilbert in § 3, p. 389. But if we should assume that, among the motions considered, there are lacking some which might obey our axioms and our definition, we should have no right to assume that the inverse transformation exists. This is illustrated by the group of translations through positive distances along the axis of x. In a similar manner we shall naturally be forced to assume that among the rotations about a fixed point M, there may be found every rotation which obeys our axioms and our definition. This is merely a special case of our former assumption.

Another question is this. What is meant by a point being infinitely near to another point, as is implied in axiom III? Geometrically this can mean nothing: for as yet we have no geometry. Here is another case in which talking in geometric terms introduces confusion. We suppose we shall have to assume that two points A, B in the geometric plane are infinitely near to each other when and only when the value of some continuous function F of the corresponding numbers $(x, y)_A$ and $(x, y)_B$ can be made indefinitely near to zero — it being further assumed that this function F vanishes when and only when the pairs of values $(x, y)_A$ and $(x, y)_B$ are identical. Such a function is

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) \equiv (X_B - X_A)^2 - (Y_B - Y_A)^2$$

or

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) \equiv |X_B - X_A| + |Y_B - Y_A|.$$

This infinite nearness is therefore not at all a property of the geometric points except in so far as it exhibits a relation between the corresponding values in the manifoldness of pairs of numbers.

4. — Thus far we have merely been striving to clear up Mr. Hilbert's meaning, that we might better understand his paper. We now come to a much more serious matter. In § 13, on p. 400, the author starts the investigation of the group of all motions, that is of all rotations about a fixed point M, which carry a given geometric circle (see axiom II) into itself. It has previously been proved that the points of a geometric circle can be put into a mutually one to one correspondence with the points upon a unit number-circle. Let t be the parameter defining the points upon the number-circle and hence those upon the geometric circle. By a rotation about M which carries the geometric circle into itself, the parameters t and t' of a point before and after rotation are connected by a relation

$$t' = \Delta(t)$$

where $\varDelta(t)$ is a continuous real function of the real variable t, increasing as t increases, and taking on an additive constant 2π when the parameter t increases by 2π.

It is precisely at this point that the author overlooks a possibility, which until it is removed, renders all his later work valueless. There is no à priori reason why $\varDelta(t)$ shall be a sole function. There may be an infinity of functions $\varDelta(t)$ defining an infinity of different sorts of rotation about the point M. Let us illustrate by an example. Suppose we consider the portion of the number-plane included by the unit-circle

$$x^2 + y^2 = 1,$$

Suppose we consider a point M, interior to this circle. Let us draw through M the ∞^1 circular arcs which cut the unit-circle orthogonally. Let us further draw about M the ∞^1 circles which cut these circular arcs orthogonally. These circles form a linear family, as is well known, of which the unit-circle is one circle and the point M the limiting point of the family. Let us define the following motion which is perhaps a rotation about M, because M is fixed. First the circular arcs which cut the unit-circle orthogonally shall be carried over one into another in such a manner that a constant angle is added to the angle which the tangent to each arc at the point M makes with the axis of x. Second points which lie upon the circles cutting these arcs orthogonally shall remain upon those circles. We have thus a species of rotation about M. Each point is carried over into a perfectly definite point. The definition of a rotation is satisfied. We shall not write the analytic equations of the motion, nor shall we stop to ascertain whether it satisfies the axiom III. Our only object is to show the conceivableness of two different kinds of rotation about the point M.

For the second kind of rotation we proceed as follows. Let us assume as before the unit-circle and an interior point M. Draw through M all the ∞^1 straight lines — the chords of the circle. Next draw as before the ∞^1 circles which form the system of which the unit-circle is one circle and the point M one limiting point. Define a rotation about M as a transformation in which the ∞^1 chords are carried into themselves in such a manner that a constant angle is added to the angle they make with the axis of x. Further let points originally upon the circle remain upon them. Like the foregoing this transformation satisfies the definition of a motion although, to be sure, it may not satisfy axiom III.

Still these two examples are sufficiently valid to show that it is perfectly possible to have two distinct kinds of rotation defined by two distinct functions:

first $$t' = \Delta_1(t),$$

second $$t' = \Delta_2(t).$$

In this case, since the transformations form a group, we must consider all possible combinations of the two. More generally it is conceivable that there should be an infinity of functions Δ and that the group of all rotations about the point M should consist of all possible combinations of the different species of rotations. Finally, this supposition must be ruled out as impossible, before the theorem (p. 402) „the group of all rotations about M is holoedrically isomorphic with the group of ordinary rotations of the number-circle into itself" can be proved in any manner that is without logical exception.

The matter is not difficult to remedy. Two functions Δ_1 and Δ_2 are to be regarded as different when they carry some one point $t = a$ into the same point $t' = b$, but do not carry every point $t = c$ into the same point $t' = d_1 = d_2$.

Let
$$\Delta_1(a) = b, \qquad \Delta_2(a) = b.$$
$$\Delta_1(c) = d_1, \qquad \Delta_2(c) = d_2.$$

Consider the transformation $\Delta_2^{-1}\Delta_1 = \Delta$.

$$\Delta(a) = \Delta_2^{-1}\Delta_1(a) = \Delta_2^{-1}(b) = a.$$

Now Mr. Hilbert shows that if any rotation Δ leaves one point $t = a$ fixed, it leaves every point fixed. Hence

$$\Delta(c) = c = \Delta_2^{-1}\Delta_1(c) = \Delta_2^{-1}(d_1).$$

But $$\Delta_2^{-1}(d_2) = c.$$

Hence $$\Delta_2^{-1}(d_2) = \Delta_2^{-1}(d_1).$$

Inasmuch as the transformation Δ_2, and consequently Δ_2^{-1}, is single-valued

$$d_2 = d_1.$$

Hence Δ_1 and Δ_2 are identical.

In this manner it appears that there cannot coexist simultaneously two different sorts of rotations about a fixed point and the author's work may stand without further modification. But it should be noticed that we have not been able to prove that two different sorts of rota-

tions about a fixed point, do not exist. We have only shown that they cannot exist in the same group of motions satisfying our definition and axiom.

There may perhaps be an infinite number of different rotations existing separately, and each giving rise to a different group of motions, and each defining a different element as a straight line. For Mr. Hilbert's definition of a straight line is obtained by considering a set of points generated by rotations which have the parameter π, that is, which when repeated produce the identical transformation. We cannot here go into details as to how, starting from two points M and A, the straight line is generated by these involutory rotations. Sufficient is it to note that in the rotations defined above (granting that they do not contradict our axiom) the straight line would be in the first case a circular arc cutting the unit-circle orthogonally and in the second case a chord of the unit-circle.

5. — Let us next pass to the consideration of some geometries which satisfy Mr. Hilbert's conditions. We shall assume the ordinary point with its ordinary representation, in the plane or space, by rectangular coördinates. There can be no objection to assuming a coördinate-system by way of reference for the sake of illustration, although we pointed out in § 2 an objection to Mr. Hilbert's use of the word in defining his number-plane. Inasmuch as the correspondence between the points of the geometric plane and number-plane need not, according to previous assumptions, be continuous our first illustrations will be in what we might call discontinuous geometries.

Let ξ, η be rectangular coördinates in the geometric plane. Consider the following relations between ξ, η and x, y.

$$\begin{cases} \xi = ex \\ \eta = e'y \end{cases} \quad e = \pm 1 \text{ if } x \text{ is } \begin{matrix}\text{irrational;} \\ \text{rational;}\end{matrix} \quad e' = \pm 1 \text{ if } y \text{ is } \begin{matrix}\text{irrational.} \\ \text{rational.}\end{matrix}$$

It will be seen that in passing from one plane to the other, irrational points (by which is meant points both of whose coordinates are irrational) are left unchanged; rational (both coördinates rational) are so changed as to be situated symmetrically with regard to the origin; semi-rational points (one coördinate rational) are so changed as to be situated symmetrically with regard to the axis corresponding to the irrational coördinate.

If a and b are two rational positive numbers and if r is less than either, the equation

$$(C) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

is represented in the number-plane by a circle lying entirely within the first quadrant. In the geometric plane the corresponding locus, the so-called geometric circle, consists of four parts one in each quadrant. In the first quadrant there lie the points both of whose coördinates are irrational. This locus is an ensemble of points having the power of a continuum. In the second and fourth quadrants lie loci of points which are semi-rational. These loci are ensembles which have the power of the ensemble of integers. They are enumerable. In the third quadrant is situated an infinite number of points because the equation

$$u^2 + v^2 = 1$$

can be satisfied by an infinite number of pairs of rational numbers u, v. Hence the equation (C) may be satisfied by an infinite number of rational values of x and y. The centre of the geometric circle lies in this third quadrant.

There is no difficulty in seeing that in general any locus in the number-plane will be represented in the geometric plane by four pieces. The theorems concerning intersections of loci, and so forth, hold, however, word for word: because the relation between the two planes is mutually one to one. Yet the customary ideas of propinquity of points and of continuity of motion must be abandoned in the geometric plane. For example a "continuous" rotation through ninety degrees would keep one jumping from quadrant to quadrant in a startling manner.

No difficulty is encountered in arriving at even more surprising results. One of the best known theorems in the theory of ensembles is that any two continuums have the same power and, if continuity be disregarded, may be put into a correspondence which is mutually one to one. Thus a plane geometry is, in Mr. Hilbert's sense, quite indistinguishable from a space geometry — or indeed from a geometry in any number of dimensions.

The particular method we shall employ to map the number-plane upon the geometric space of three dimensions depends upon the following manner of putting the positive and negative integers in one to one correspondence with the squares of unit length into which we may divide the number-plane. Take the infinite straight line, upon which the positive and negative integers are marked at unit-intervals, and apply the zero to the origin of the plane. Lay the positive part of the line down alone the positive X-axis as far as the point $1/2$. At this point turn through a right-angle up into the first quadrant and proceed to the middle of the unit-square into which you have entered.

At this point the integer 1 will be reached. Turn again through a positive right-angle and advance into the second quadrant. At the middle of the first square the integer 2 will be reached. At the middle of the second square the integer 3 will be reached. Then turn again through a right-angle down into the third quadrant and lay down the integers at the mid-point of each square as you advance for two squares. Then turn another right-angle toward the fourth quadrant and advance for four squares. Etc. In the meantime suppose that the negative part of the line has also been winding about the origin in such a manner that the square which contains $-n$ is situated symmetrically with respect to the origin to the square containing $+n$. Thus there are two spiral-like series of lines winding about the origin. In the centre of each square there is an integer. The squares in the plane have been put into one to one correspondence with the integers, positive and negative.

To put the squares of the plane into one to one correspondence with the cubes in space is the next object. It has been seen that if x and y are the coördinates of the centres of the unit-squares

$$x = f_1(n), \qquad y = f_2(n).$$

Let x', y', z' be the coördinates of the centre of the unit-cubes in space. Set the squares into correspondence with the cubes by means of

$$x' = f_1(n), \quad y' = f_2(n), \quad z' = y.$$

A mechanical idea of this correspondence may be obtained easily. Rule the xy-plane into strips of unit-breadth parallel to the axis of x. Rule the xy-plane into squares of unit-length by lines parallel to the axis of y and bend the plane along these later rulings. Apply the axis of x to the plane of x' and y', as the line of integers was formerly applied to the xy-plane. Let the axis of y coincide with the axis of z'. In this manner we obtain a surface, made up of plane strips, winding in two sheets spiral-like about the axis of z'. To each integral value n of x corresponds a square in the plane of x' and y'. In this square we shall make the points correspond in a one to one manner with the points of the segment of the x-axis comprised between the adjacent integers $n-1$ and n. The correspondence, of course, cannot be continuous. For further particulars reference may be made to works by Mr. Cantor[1]), Mr. Borel[2]),

1) Various memoirs printed for the most part in the Mathematische Annalen, the Acta Mathematica, or the Journal für Mathematik.

2) Leçons sur la Théorie des Fonctions, Paris, Gauthier-Villars, 1898.

Mr. Schoenflies[1]), and others. Thus to each value of x is associated one pair of values x' and y'. To each value of y is associated a single value of z' equal to y.

By means of this discontinuous correspondence between the points of the number-plane of x and y and the points of the geometric space x', y' z', the plane geometry of Mr. Hilbert becomes a species of space geometry.

6. — It is not uninteresting to see what takes place when the distances between the rulings of the number-plane are made very small — smaller than could be detected by the most refined methods of observation. For the examination of this case it will be found more convenient to revise our method of associating the points in a line with the points in the squares of the plane. Doubtless it has been noticed that to the points in the ring (which has the form of a hollow square) situated between the squares whose sides are $2n$ and $2(n+1)$ and whose centres coincide with the origin in the plane, there correspond the points (on the line) between $2n^2$ and $2(n+1)^2$ and between $-2n^2$ and $-2(n+1)^2$. It would be better to have the points in this ring correspond to the points between n and $n+1$ and between $-n$ and $-(n+1)$. This is easily accomplished by subdividing the intervals between the integers so as to obtain the following correspondence, which is supposed to hold for the negative integers also,

$$\Gamma\begin{cases} 0-1 \text{ ——————— } 2 \text{ ——————— } 3 \text{ ——————— } 4 \text{ —— } \dots \; n \dots \\ 0-1, 2, 3 \dots 6, 7, 8, 9, 10 \dots 17, 18, 19 \dots 31, 32, 33 \dots 2n^2 \dots \end{cases}$$

When this correspondence is used the points which lie upon the x-axis of the number-plane in the neighbourhood of the values $\pm K$ are found in the plane of x' and y' scattered about in the neighbourhood of the sides of the square which extends from $x' = +K$ to $x' = -\text{K}$ and from $y' = +K$ to $y' = -K$. In like manner the points, in the plane of x and y, which lie upon elements of straight lines drawn parallel to the axis of x and situated above or below the points $x = \pm K$ at a distance $+y$ or $-y$ as the case may be, are transplanted into the space x', y', z' in such a manner as to lie scattered about at a distance $z' = +y$ or $z' = -y$, as the case may be, above or below the plane $z' = 0$, but always situated around the sides of a prism bounded by the planes drawn parallel to the axis of z' and through the contour of the square referred to before.

---

1) Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Ber. d. Deut. Math. Ver. 8 (1899), Leipzig, B. G. Teubner, 1900.

Assume that ε is the smallest observable quantity. Use $^1/_4\,\varepsilon$ as the unit by which to divide the space x', y', z' into cubes. The greatest distance between two points in two adjacent cubes is $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\varepsilon$ and is consequently unobservable. These cubes correspond to regions in the plane x, y. The regions are no longer squares owing to the correspondence Γ which has recently been introduced. There are rectangles of which the side parallel to the x-axis is of length $\frac{1}{4}\,\varepsilon$, but of which the side parallel to the x-axis is of length given by the correspondence Γ and never greater than $\frac{1}{4}\,\varepsilon$. In fact if x be allowed to vary continuously by the amount $\frac{1}{4}\,\varepsilon$ the points in space vary and take positions all about the edge of a square. Yet as far as observation can go, this change of position is not discontinuous; for the consecutive positions of the point cannot differ by as much as ε. It is to be noticed also that, as one recedes from the origin, cubes containing negative and positive values of x succeed each other. Between two sheets of cubes containing positive values of x there is a sheet containing negative values. Yet as the distance from one sheet to the other is less than ε that difference or discontinuity between the sheets is unobservable.

To what does a locus in the number-plane correspond? Evidently when x alone varies continuously the corresponding configuration which is the contour of a square varies with what may be called a physical continuity — physical, because it cannot be distinguished by observation from continuity. When y alone varies the corresponding configuration is a point which varies in a line parallel to the axis of z' in exactly the same manner in which y varies. Thus to a straight line $x = c$ corresponds a straight line in space. To a straight line $y = c$ corresponds a "physical" plane $z' = c$. To a straight line $y = mx$ corresponds a "physical" quadrangular pyramid of which sections parallel to the plane $z' = 0$ are squares whose sides are parallel to $x' = 0$ and $y' = 0$ and whose centre is upon the axis of z'. This pyramid is "physically" indistinguishable from the pyramid which represents $y = -mx$, in view of the fact that the sheets of the positive values of x are so closely interwoven with the sheets of the negative values. In general any straight line would be represented by just such a pyramid. To the two independent constants which determine the straight line correspond two independent constants of the pyramid. These may be, for instance, the length of the side of the square which the pyramid cuts out on the plane $z' = 0$ and the tangent of the angle which the sides of the pyramid make with the plane $z' = 0$.

It is to be noticed that the only kind of figures which we can have in our space, provided they are to be represented by continuous functions in the number-plane, are figures such that sections taken parallel to the plane of $z' = 0$ are squares concentric with the origin and having their sides parallel to the axes. A sphere concentric with the origin would be represented in the number-plane, not by all the points within a certain region, but by points sprinkled around over the region so as to appear physically everywhere dense.

Let some might think that this state of a seeming continuity amid on actual discontinuity is merely an artifice and has no analogy in the physical world we shall point out a case where very much the same thing occurs. Suppose we have in a vase a liquid, or rather two liquids which are alike in every respect save that one is colourless and the other is, say, red. Let them be incompressible. Consider a definite point in the red liquid and keep the attention fixed upon this point while the whole mass of liquid is violently stirred about. It is impossible that the density of the red liquid about the (moving) point considered should change: for the liquid is incompressible. In like manner the density of the white liquid about any point of it remains unchanged. Yet to all appearances the liquids are becoming mixed so that at each point the density, though unchanged as a whole, consists partly in red liquid, partly in white. The mathematical fact is that each liquid has been strung out into such thin strings so closely interwoven that an apparent mixing has taken place. This is by no means unlike the geometric results we have been considering. For a more elaborate account of this illustration and for other phenomena which are of the same sort we may refer to the recent Elementary Principles in Statistical Mechanics by Mr. J. Willard Gibbs.[1])

Had we proceeded in the opposite manner and mapped the number-plane upon a straight line instead of on a space of three dimensions, all geometry would have become illusory as far as observation goes. We should have merely an ensemble of points scattered along the line as the elements corresponding to any configuration in the number-plane. To pursue this geometry further would probably be quite uninteresting even if the analytic theory of the correspondences between two continuums of different dimensions were more fully developed than they are at present. We therefore abandon it here.

7. — What may take place in the case of a discontinuous correspondence between the number-plane and geometric plane (as

1) New York, Charles Scribner's Sons, 1902. Cf. especially Chap. XII.

Mr. Hilbert calls it although it may as easily be something which corresponds more nearly to the intuitive concept of a space of higher or lower dimensions than two) has been seen. Things not so strange though still somewhat interesting may happen even in the case of a continuous correspondence. For when it is remembered that the author is talking only of real points and real numbers and when it is further recollected that the number of continuous one to one correspondences between two sets of real variables is unlimited (although of course there is only a perfectly definite system of one to one correspondences of two sets of complex variables) it will be imagined uncommon geometries may be arranged for.

Let ξ, η be the ordinary rectangular point-coördinates in the plane that we shall call geometric. Let x, y be corresponding coördinates in the number-plane. Set up the following correspondence

$$x = \xi e^{\varrho - 1}, \qquad y = \eta e^{\varrho - 1}$$

where

$$\varrho = + \sqrt{\xi + \eta^2}.$$

This is seen to be an uneven distortion of the plane ξ, η. The unit circle is unchanged. Inside that circle, circles concentric with the origin in the xy-plane are expanded in a ratio varying from 1 to $1/e$ when undergoing a change to the $\xi\eta$-plane. Outside that circle, circles concentric with the origin in the xy-plane are shrunk in a ratio varying from 1 to ∞ when undergoing the change to the $\xi\eta$-plane. Straight lines passing through the origin are unchanged as a whole: but the points upon them are shifted toward the unit circle.

Let us look at what corresponds to translation and rotation in the plane of ξ and η. Consider the number-plane. A translation may be represented best by a net-work of lines — the path-curves and the system orthogonal to them. In this method of representation there is a system of parallel lines which as a whole are left invariant. The points slide along them. There is also a system of parallel lines perpendicular to these in which each line moves up into the position of one ahead of it. To visualize the corresponding "translation" in the geometric plane, it is only necessary to transfer this net-work of lines. The fixed lines

$$y = mx + b, \quad m \text{ fixed, } b \text{ variable}$$

become

$$\eta e^{\varrho - 1} = m \xi e^{\varrho - 1} + b$$

or

$$\eta = m\xi + b e^{1 - \varrho}.$$

These are a system of transcendental curves lying symmetrically upon each side of the line $y = mx$ and approaching that line as an asymptote. During the "translation" the points move alone these lines. The other system of lines is

$$y = -mx + b, \; m \text{ fixed, } b \text{ variable}$$

and becomes

$$\eta = -m\xi + be^{1-\varrho}.$$

This is a system like the first turned through ninety degrees. By the "translation" these curves are changed one into another by the addition of a constant to the value of the parameter b. In a similar manner "rotation" may be discussed. These amorphic "translations" and "rotations" in the geometric plane form a group because the corresponding rotations and translations in the number-plane to which they are related in a one to one manner, indeed in terms of which they are defined, form a group. A curve of the form

$$\eta = m\xi + be^{1-\varrho}$$

is always transformed by this group into a curve of the same type. In like manner a curve

$$(\xi e^{\varrho-1} - a)^2 + (\eta e^{\varrho-1} - b)^2 = c^2$$

which corresponds to a circle is always carried into a curve of the same type.

The choice of an arbitrary example like the above shows that, even if the continuity of the transformation be insisted upon, the geometry obtained is not necessarily intuitively similar to the ordinary geometry. A certain transformation analogous to rotation, a certain configuration with properties like those of a circle is the result. We may even put the points in the real Lobatschefskyan plane into one to one correspondence with the points in the real Euclidean plane. A circle will be transformed into some sort of oval curve. A straight line will appear as some sort of curve. The planes are not different. It is only the geometries within them that differ owing to different choices of the transformation known as rotation. This brings to light very clearly the contention of Mr. Poincaré[1]) that what lies at the bottom of our geometry is purely a matter of *convention* and that any one of the many geometries may, as far as logic or experience

1) In various essays, now easiest accessible under the title, La Science et l'Hypothèse, Paris, E. Flammarion, 1902. Cf. especially Chaps. III—V.

goes, be taken as fundamental. Then in terms of it the other geometries may be expressed.

8. — After these preliminary illustrations nothing need hinder us longer from passing to our closing remarks upon the foundations of geometry. And it may be best to state our thesis at the outset in its baldest form. It is that: *No system of logic, never mind how flawless, founded solely upon a system of numbers or upon a one to one correspondence with a manifoldness of numbers of any dimension can in any way establish a geometry.* Such a correspondence may serve a passing end in establishing by arithmetic means the axioms which lie at the bottom of a geometry. No one would deny that. This use of numbers was brought into vogue by Mr. Hilbert in his *Festschrift.* Recently it has further been used by Mr. Kagan.[1]) It is very useful. It probably will remain in vogue for a long time. But Mr. Hilbert in his present memoir defines his geometry by means of his manifoldness of numbers and by that alone. We hold that he has no geometry in the true sense of the word and we cite our illustrations as evidence.

There are in geometry certain elements which do not appear in a one to one correspondence. Among these elements are *continuity* and *isotropy.* Qualities, perhaps, rather than quantities, nevertheless they are indissolubly connected with a geometric geometry. They are recognized by Mr. Poincaré in the work cited above. They are recognized by Mr. Russell in his famous essay.[2]) Lie, too, with that truly geometric insight which characterized his whole work said that under the restrictions he had laid down the groups (and consequently the geometries) which he found were *six-parametered* (sechsgliedrig) and *similar* (ähnlich) by means of a real point-transformation either to the Euclidean or to the Lobatschefskyan group of motions. Lie was speaking of space of three dimensions. For the plane the word three-parametered must be substituted for six-parametered. With Mr. Hilbert, however, there is no mention of the number of parameters, no mention of *similarity.* For him similarity seems not to exist — probably because it is a quality rather than a quantity.

There was a time, as Mr. E. Mach points out in his *Mechanics,* when mathematicians indulged themselves in a mania for demonstration.

---

1) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 11 pp. 403 et seq.

2) Essay on the Foundations of Geometry, Cambridge. Also available in a French translation (Paris) by Mr. Cadenat.

They made elaborate "proofs" of the law of the lever, of the parallelogram of forces. Even the greatest men fell ill of the disease. That period developed after Euclid. It is passed some time since. To-day we are afflicted with a mania for logic. Not that logic is useless. On the contrary it is extremely useful, indispensable. But we are believing that everything is logic, and behind logic nothing. This mania for logic is coupled with a mania for arithmetization. Everything must be expressed in terms of numbers and of numbers alone. These manias are of recent development. We are in the midst of them. It is difficult to see into the future, but one runs little risk in predicting that these manias like the other will sometimes have passed by.

Not long ago a memoir like this of Mr. Hilbert's would have been entitled: Geometric Analogies in Ensembles. To-day it is the Foundations of Geometry. We believe that the former title is a better and a truer description of the contents and value of the memoir until some further restrictions, some restrictions like those Lie had in mind when he used the word *similar* instead of *identical*, are laid upon the fundamental correspondence. This restriction is a restriction of quality which will compel the points of our geometry to behave as we intuitively feel they must. Before we can have a geometry or a mechanics or a physics or even an arithmetic which may be applicable to life we must add one fundamental postulate or restriction which is not of a wholly mathematical nature, a postulate which Mr. Poincaré might call a postulate of convention, which a metaphysician might call a postulate of reality, which some one else with his particular theories might call a postulate of something else, but at any rate a postulate which demands that the objects under consideration shall be sufficiently restricted *qualitatively* as well as quantitatively to correspond, nearly enough for practical uses, to the objects of experience which it is their purpose to explain or to coördinate. A mere one to one correspondence will not do.

Paris, à l'École Normale Supérieure,
January, 20th, 1903.

Desarguesscher Satz und Zentralkollineation.

Von Gerhard Hessenberg in Charlottenburg.

„Perspektiv gelegen" heißen zwei aufeinander bezogene Dreiecke, wenn sich die Verbindungsgeraden homologer Ecken in einem Punkte schneiden. Von ihnen gilt der Desarguessche Satz:

(D.) *In perspektiv gelegenen Dreiecken liegen die Schnittpunkte homologer Seiten auf einer Geraden.*

Herr Hilbert verwendet in den „Grundlagen der Geometrie" ausschließlich folgende Spezialisierung des genannten Satzes:

(D_1.) *Sind in perspektiv gelegenen Dreiecken zwei Seiten des einen den homologen des andern parallel, so sind auch die dritten Seiten einander parallel.*

Mit Hilfe dieses Satzes und einer darauf aufzubauenden Streckenrechnung hat Herr Hilbert gezeigt, daß jede *ebene* Geometrie, in der die Axiome der ebenen Verknüpfung, der Anordnung, das Parallelenaxiom und Satz (D_1) gelten, als Teil einer räumlichen Geometrie aufgefaßt werden kann, in der außer den genannten drei Axiomgruppen auch die räumlichen Verknüpfungsaxiome gelten. — Daraus folgt unmittelbar die Gültigkeit des Satzes (D). Beachtet man, daß die Anordnungsaxiome bei den Beweisen des Herrn Hilbert eine durchaus sekundäre Rolle spielen, daß ferner der allgemeine Satz (D) die Existenz der Desarguesschen Konfiguration (10_3, 10_3) aussagt, so läßt sich folgendes Resultat aussprechen:

I. *Aus der Existenz derjenigen Desarguesschen Konfigurationen, die die unendlich ferne Gerade enthalten, folgt mit alleiniger Hilfe der ebenen Verknüpfungsaxiome und des Parallelenaxioms die Existenz aller Desarguesschen Konfigurationen.*

Führt man auf Grund des Parallelenaxioms ideale (unendlich ferne) Elemente ein — was ohne Anwendung der Anordnungsaxiome möglich ist, — so kann man die ebenen Verknüpfungsaxiome allgemeiner so aussprechen:

a) *Durch zwei Punkte geht stets eine und nur eine Gerade.*

b) *Zwei Gerade schneiden sich stets in einem und nur einem Punkt.*

Nennt man diese — übrigens nicht unabhängigen — Sätze die *„idealen ebenen Verknüpfungsaxiome"*, so kann Satz I so verallgemeinert werden:

II. *Aus der Existenz aller Desarguesschen Konfigurationen, die eine bestimmte Gerade enthalten, kann die Existenz aller Desarguesschen Konfigurationen überhaupt mit alleiniger Hilfe der idealen ebenen Verknüpfungsaxiome gefolgert werden.*

Dieser Satz soll nunmehr als Spezialfall eines allgemeineren unter Umgehung der Streckenrechnung rein geometrisch hergeleitet werden.

1. — Es sei in einer Ebene gegeben ein Punkt C und eine durch ihn gehende Gerade s, ein nicht auf s gelegener Punkt S und drei durch ihn, aber nicht durch C gehende Gerade s_1, s_2, c. s schneide s_1 und s_2 beziehungsweise in S_1 und S_2.

Sodann denken wir uns die Ebene mit ihren Geraden und Punkten doppelt. Der Index 1 oder 2 möge andeuten, ob ein Punkt oder eine Gerade zur ersten oder zweiten Ebene zu rechnen ist. i, k sei eine Permutation von 1, 2.

Zu einem Punkt P_i konstruieren wir einen „entsprechenden“ P_k folgendermaßen: Wir ziehen $S_i P_i = p_i$, $CP_i = p$. Schneidet p_i die c in P, so trifft $S_k P = p_k$ die p in P_k.

Zu einer Geraden r_i konstruieren wir eine „entsprechende“ r_k folgendermaßen: r_i schneide s_i in R_i, c in R. Wir ziehen $CR_i = r$. Trifft r die s_k in R_k, so ist $r_k = RR_k$ die entsprechende Gerade.

Beide Konstruktionen kehren sich bei Vertauschung von i mit k um, sind also ein-eindeutig, sofern bekannt ist, welchen Ebenen die gegebenen Elemente angehören sollen. Sie versagen für Punkte auf s und Gerade durch S. Diese mögen daher vorläufig ausgeschlossen bleiben.

Die Möglichkeit dieser Konstruktionen erfordert lediglich die Gültigkeit der idealen ebenen Verknüpfungsaxiome.

2. — Wir fragen nun: *Wann entsprechen koinzidierenden Elementen wieder koinzidierende?*

Liegt gleichzeitig P_1 auf r_1 und P_2 auf r_2, so bilden die 10 Punkte $C, S, P, R, S_1, P_1, R_1, S_2, P_2, R_2$ mit den 10 Geraden $c, s, p, r, s_1, p_1, r_1, s_2, p_2, r_2$ eine Desarguessche Konfiguration, und umgekehrt. Das heißt:

III. *Notwendig und hinreichend für die Existenz einer ebenen Zentralkollineation mit der Achse c, dem Zentrum C und den beiden entsprechenden Geraden s_1, s_2 ist die Existenz derjenigen Desarguesschen Konfigurationen, die S, C, c, s_1, s_2 und eine feste, durch C gehende Gerade s, sowie deren Schnittpunkte S_1, S_2 mit s_1, s_2 enthalten.*

Nunmehr ergibt sich auch für die bisher ausgeschlossenen Elemente ein eindeutiges Entsprechen, wenn man das Prinzip „koinzidierenden Elementen entsprechen koinzidierende“ allgemein gültig macht. Dies gelingt *ohne Anwendung des Desarguesschen Satzes* folgendermaßen:

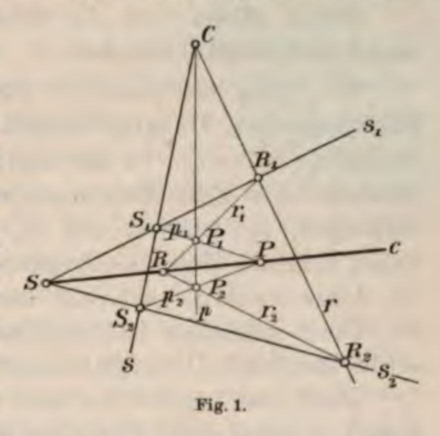


Fig. 1.

Nach dem bisher Gesagten entspricht dem Schnittpunkt W_i zweier Geraden u_i, v_i, wenn er nicht auf s liegt, ein Punkt W_k, der auf CW_i, also auch nicht auf s liegt. Zieht man daher durch einen Punkt Q_1 auf s beliebige Gerade, so gehen deren entsprechende durch einen zweiten Punkt Q_2 auf s, der als der Q_1 entsprechende definiert wird. Analog verfährt man mit den Geraden durch S.

3. — Existiert umgekehrt eine Zentralkollineation mit dem Zentrum C, der Achse c, in der sich die Geraden s_1, s_2 entsprechen, so ergibt sich in bekannter Weise das in § 1 entwickelte Konstruktionsverfahren. Zugleich aber bildet jedes Dreieck $A_1 B_1 C_1$ mit seinem homologen $A_2 B_2 C_2$ und mit C, c eine Desarguessche Konfiguration, von der wir sagen wollen, *sie gehöre zu der gegebenen Zentralkollineation.* Eine solche Konfiguration gehört nur dann zu den in Satz III genannten, wenn eine Ecke des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ und eine durch sie gehende Seite mit S_1 bezw. s_1 identisch sind. Es ergibt sich also:

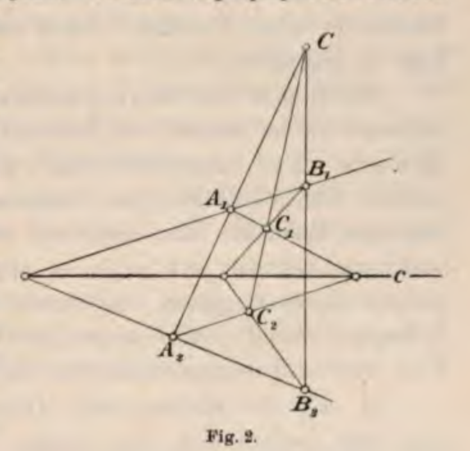


Fig. 2.

IV. *Alle zu einer und derselben Zentralkollineation gehörigen Desarguesschen Konfigurationen können aus denjenigen unter ihnen hergeleitet werden, die eine bestimmte nicht selbstentsprechende Gerade* (s_1) *und einen bestimmten in ihr gelegenen, nicht selbstentsprechenden Punkt* (S_1) *enthalten.*

Es ergibt sich nebenbei das folgende Resultat, das, in der Literatur anscheinend noch nicht genannt, dennoch allgemeiner bekannt sein dürfte.

V. *Die nicht-metrischen Eigenschaften der ebenen Zentralkollineation können aus dem Desarguesschen Satz allein — also ohne den projektiven Fundamentalsatz — hergeleitet werden.*

Hierzu zählen auch die harmonischen Eigenschaften der involutorischen Zentralkollineation.

4. — Aus den Sätzen III und IV folgern wir: Aus der Existenz aller derjenigen Desarguesschen Konfigurationen, welche eine feste Gerade s_1 und einen in ihr liegenden Punkt S_1 enthalten, kann die Existenz aller Zentralkollineationen abgeleitet werden, ausschließlich derjenigen, in denen s_1 und S_1 selbstentsprechende Elemente sind. Damit sind alle Zentralkollineationen ausgeschlossen, in denen entweder die Achse durch S_1 geht oder das Zentrum auf s_1 liegt.

Diese Ausnahme ist belanglos für die weitere Folgerung: „Man erhält damit alle Desarguesschen Konfigurationen überhaupt."

Greift man nämlich aus einer solchen Konfiguration einen Punkt A heraus, so gehen durch diesen drei Gerade, deren jede zwei weitere Punkte der Konfiguration enthält. Von den übrigbleibenden drei Punkten ist keiner durch eine Gerade der Konfiguration mit A verbunden. Wir wollen sagen, daß diese drei Punkte dem Punkt A gegenüberliegen. Auf Grund des Desarguesschen Satzes liegen die drei gegenüberliegenden Punkte in einer Geraden. Auch von dieser soll gesagt werden: Sie liegt A gegenüber.

Gehört nun eine Desarguessche Konfiguration zu einer Zentralkollineation, so enthält sie Zentrum und Achse als gegenüberliegende Elemente. Und umgekehrt gehört jede Desarguessche Konfiguration zu zehn Zentralkollineationen, entsprechend den zehn Paaren gegenüberliegender Elemente, aus denen sie besteht. Unter diesen Zentralkollineationen befinden sich aber im allgemeinen höchstens drei[1]), deren Achsen durch S_1 gehen, und ebenso höchstens drei[1]), deren Zentra auf s_1 liegen. Somit gehört sicher jede Desarguessche Konfiguration zu einer der *nicht* auszuschließenden Kollineationen. D. h.

VI. *Aus der Existenz aller Desarguesschen Konfigurationen, die eine feste Gerade und einen festen, in ihr gelegenen Punkt enthalten, folgt die allgemeine Gültigkeit des Desarguesschen Satzes.*

Dies ist bereits eine Verallgemeinerung des Satzes II. Wir wollen aber noch weiter gehen. —

5. — In Satz III denken wir die beiden Elemente s_2 und S_2 beweglich. Aus der Existenz aller Konfigurationen, die die als fest

1) In speziellen Fällen 4, niemals mehr, falls nicht die Konfiguration degeneriert, d. h. zu ihrer Existenz keines besonderen Satzes bedarf.

übrigbleibenden Elemente C, c, S, s, S_1 und s_1 enthalten, folgt also die aller Zentralkollineationen mit C als Zentrum und c als Achse, also auch die aller Konfigurationen, in denen C und c gegenüberliegende Elemente sind.

Denken wir weiter c beweglich, so wird auch S willkürlich (unter der Bedingung, daß es auf s_1 liegt). Wir folgern damit aus der Existenz aller Desarguesschen Konfigurationen, die C, s, S_1, s_1 enthalten, die Existenz aller Zentralkollineationen, in denen C Zentrum ist und in denen die Achse nicht durch S_1 geht (weil S_1 sich nicht selbst entsprechen darf). Hieraus weiter die Existenz *aller* Desarguesschen Konfigurationen, in denen C enthalten ist, während die C gegenüberliegende Gerade weder durch S_1 noch durch C geht.

Diese Beschränkung der C gegenüberliegenden Geraden wird durch folgende Betrachtung sofort beseitigt: Von einer C enthaltenden Konfiguration denke man sich zunächst die drei durch C gehenden Geraden mit den auf ihnen liegenden perspektiven Dreiecken gewählt, woraus sich die drei C gegenüberliegenden Punkte P, Q, R ergeben. Geht nun eine der drei Geraden PQ, QR, RP nicht durch S_1 oder C, so ist die Beschränkung erfüllt, und der dritte Punkt liegt auf ihr. Eine Ausnahme tritt also nur ein, wenn jede der drei Geraden entweder durch C oder S_1 geht. Dann gehen mindestens zwei von ihnen zugleich entweder durch C oder S_1, woraus wiederum folgt, daß P, Q, R in gerader Linie liegen. Mithin kann die Beschränkung fallen, und zugleich ergibt sich auf Grund des zuletzt bewiesenen Satzes VI die Existenz aller Desarguesschen Konfigurationen.

Beachten wir, daß C, s, S_1, s_1 vier aufeinanderfolgende Stücke eines Dreiecks (etwa CS_1S) sind, so können wir das Schlußresultat folgendermaßen aussprechen:

VII. *Die Existenz aller Desarguesschen Konfigurationen, die vier bestimmte aufeinanderfolgende Stücke eines festen Dreiecks enthalten, zieht die aller Desarguesschen Konfigurationen überhaupt nach sich.*

In etwas anderer Form:

Ist der Desarguessche Satz gültig unter der beschränkenden Voraussetzung, daß in seiner Figur vier bestimmte aufeinanderfolgende Stücke eines festen Dreiecks vorkommen, so kann aus den idealen ebenen Verknüpfungsaxiomen allein seine allgemeine Gültigkeit gefolgert werden.

Frankfurt a. M., im August 1901.

Die Potenzen der Cotangente und der Cosecante.[1]

Von L. Saalschütz in Königsberg.

Wir setzen

$$\cot x = \frac{1}{x} - b_1 x - b_3 x^3 - b_5 x^5 - \cdots \tag{1}$$

$$\operatorname{cosec}(2x) = \frac{1}{2x} + c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots, \tag{2}$$

sodaß, wenn die Bernoullischen Zahlen mit fortlaufenden Indices bezeichnet werden:

$$b_{2k-1} = \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_k, \quad c_{2k-1} = \frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_k \tag{3}$$

ist. Ferner verstehen wir unter μ eine positive ganze Zahl und setzen

$$\cot^\mu x = \sum_{m=-\mu}^{\infty} \overset{\mu}{\gamma}_m x^m, \tag{4}$$

worin aber m nur ungerade oder nur gerade Werte annehmen darf, je nachdem μ ungerade oder gerade ist. Durch Differentiation von (1) ergibt sich:

$$\overset{2}{\gamma}_{-2} = 1, \quad \overset{2}{\gamma}_0 = -\tfrac{2}{3}, \quad \overset{2}{\gamma}_{2k} = (2k+1)\frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!} B_{k+1}, \qquad k \geqq 1, \tag{5}$$

und mittels Differentiation von (4) findet man leicht die Beziehung zwischen den Koeffizienten:

$$-\overset{\mu}{\gamma}_m = \frac{m+1}{\mu-1} \overset{\mu-1}{\gamma}_{m+1} + \overset{\mu-2}{\gamma}_m. \tag{6}$$

Dieselbe gibt Beziehungen zwischen den Koeffizienten der nicht-negativen Potenzen und Beziehungen zwischen den Koeffizienten der negativen Potenzen, wir müssen also diese beiden Gruppen von Koeffizienten gesondert betrachten und wenden uns zuerst den Koeffizienten der negativen Potenzen zu.

Setzen wir in (6) $-m$ statt m, so entsteht

$$\overset{\mu}{\gamma}_{-m} = \frac{m-1}{\mu-1} \overset{\mu-1}{\gamma}_{1-m} - \overset{\mu-2}{\gamma}_{-m}. \tag{7}$$

---

1) Vorliegende Arbeit ist ein Auszug eines Teiles einer umfangreicheren, unter ähnlichem Titel in den Schriften der Physikalisch-Ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. erscheinenden Abhandlung; die Resultate eines anderen Teiles derselben werden im Journal für Math. veröffentlicht.

Substituieren wir hierin $m = 1$ und μ successive $= 3, 5, 7, \cdots, \mu$, so folgt durch Multiplikation

(8) $$\overset{\mu}{\gamma}_{-1} = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \qquad \mu \text{ ungerade.}$$

Setzen wir in (7) $m = 2$ und μ successive $= 4, 6, 8, \cdots, \mu$, so folgt leicht

(9) $$\overset{\mu}{\gamma}_{-2} = (-1)^{\frac{\mu-2}{2}} \left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{\mu - 1}\right) \qquad \mu \text{ gerade.}$$

Wir bestimmen nun eine Funktion $\psi(a, k, n)$ in folgender Art: wir verstehen unter a, k, n positive ganze Zahlen, so aber, daß $n - (a + k - 1)$ Null oder eine positive gerade Zahl ist, bilden die Faktoriellen

$$a(a+1)\cdots(a+k-1) \text{ und } (n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n$$

und schieben dazwischen alle möglichen Produkte mit gleichviel Faktoren ein, sodaß in jedem derselben die Faktoren von links nach rechts wachsen, und daß der $h$te Faktor irgend eines Produkts sich vom $h$ten Faktor des ersten Produkts um Null oder eine positive gerade Zahl unterscheidet. Die Summe der reziproken Werte dieser Produkte ist $\psi(a, k, n)$. Z. B. ist $\psi(2, 3, 8)$ die Summe der reziproken Werte der Produkte: $2 \cdot 3 \cdot 4$, $2 \cdot 3 \cdot 6$, $2 \cdot 3 \cdot 8$, $2 \cdot 5 \cdot 6$, $2 \cdot 5 \cdot 8$, $2 \cdot 7 \cdot 8$, $4 \cdot 5 \cdot 6$, $4 \cdot 5 \cdot 8$, $4 \cdot 7 \cdot 8$, $6 \cdot 7 \cdot 8$.

Für diese Funktion gelten die beiden charakteristischen Gleichungen

(10) $$\psi(a, k, n) = \psi(a, k, n-2) + \frac{1}{n}\psi(a, k-1, n-1),$$

(10*) $$\psi(a, k, n) = \psi(a+2, k, n) + \frac{1}{a}\psi(a+1, k-1, n).$$

Ferner ist der Erklärung gemäß

(11) $$\psi(a, k, n) = \frac{1}{a(a+1)\cdots n} \qquad \text{für } n+1-a-k=0$$

und daher nach (10)

(12) $$\psi(a, k, n) = 0 \qquad \text{für } n+1-a-k<0.$$

Auch ist

(13) $$\psi(a, 1, n) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

also nach (10)

(14) $$\psi(a, 0, n) = 1$$

und sodann wieder nach (10)

(15) $$\psi(a, -k, n) = 0 \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

Endlich folgt noch aus (10) mit $k = 0$, n ...

$$\psi(a, 0, 0) = 1. \tag{16}$$

Mittels dieses Funktionszeichens läßt sich (9) auf die Form

$$\overset{\mu}{\gamma}_{-2} = (-1)^{\frac{\mu-2}{2}} \psi(1, 1, \mu - 1)$$

bringen, und nun läßt sich mittels (10) und (6) beweisen, daß überhaupt der Koeffizient $\overset{\mu}{\gamma}_{-m}$ den Wert

$$\overset{\mu}{\gamma}_{-m} = (-1)^{\frac{\mu-m}{2}} (m-1)!\, \psi(1, m-1, \mu-1) \tag{17}$$

hat.

Die Ableitung der Koeffizienten der *positiven* Potenzen führt z... folgendem Resultat:

Der Koeffizient $\overset{\mu}{\gamma}_m$ ist $2^m : m!$ mal einer linearen Funktion vo... $\frac{1}{2}(\mu+1)$, bez. $\frac{1}{2}\mu$ auf einander folgenden Bernoullischen Zahle... deren jede durch ihren Index dividiert ist, und deren Koeffizienten un... abhängig von m sind, also zu Anfang der Rechnung hergestellt werde... können, in Formel:

$$(-1)^\mu \overset{\mu}{\gamma}_m = \frac{2^m}{m!} \sum_{h=0}^{\nu} (-1)^h 2^{\mu-2h-1} \psi(1, \mu-2h-1, \mu-1) \frac{B_{\frac{m+\mu}{2}-\ldots}}{\frac{m+\mu}{2}-\ldots} \tag{18}$$

$$\nu = \begin{cases} \frac{\mu-1}{2} \ldots \text{für ungerades } \mu \\ \frac{\mu-2}{2} \ldots \text{für gerades } \mu. \end{cases}$$

Beweis: Sucht man in $\overset{\mu}{\gamma}_m$, $\overset{\mu-1}{\gamma}_{m-1}$, $\overset{\mu-2}{\gamma}_m$ den Koeffizienten vo... $\dfrac{B_{\frac{m+\mu}{2}-r}}{\frac{m+\mu}{2}-r}$ auf, benutzt (6) und läßt die gleichen Faktoren fort, so erhä... man die Gleichung:

$$\psi(1, \mu-2r-1, \mu-1) = \frac{1}{\mu-1}\psi(1, \mu-2r-2, \mu-2) + \psi(1, \mu-2r-1, \mu-3),$$

dieselbe ist aber richtig, da sie aus (10) sich vermöge der Substitut...

$$a = 1, \quad k = \mu - 2r - 1, \quad n = \mu - 1$$

ergibt. Da nun noch die aus (3) und (5) folgenden Koeffizien... und $\overset{2}{\gamma}_m$ sich mit Rücksicht auf (16) und (13) in die Form

$$-\overset{1}{\gamma}_m = \frac{2^m}{m!}\psi(1, 0, 0)\frac{B_{\frac{m+1}{2}}}{\frac{m+1}{2}}, \quad \overset{2}{\gamma}_m = \frac{2^m}{m!} 2\psi(1, 1, 1) \frac{B_{\frac{m+\ldots}{2}}}{\frac{m+\ldots}{2}} \tag{19}$$

setzen lassen, welche mit (18) in Übereinstimmung steht, so ist (18) allgemein bewiesen.[1]) — Für $m = 0$ ist in (18) rechts der Summand $(-1)^{\frac{\mu}{2}}$ hinzuzufügen.

Die Koeffizienten $\overset{\mu}{\gamma}_m$ lassen sich, und zwar ohne Rücksicht darauf, ob m positiv oder Null oder negativ ist, noch in anderer Art finden. Wie leicht zu erkennen, ist nämlich:

$$\text{(20)} \qquad \frac{d \cot^{\mu} x}{dx} = -2\mu \cot^{\mu} x \operatorname{cosec}(2x),$$

also, wenn man (4) und (2) benutzt und beiderseits den Koeffizienten von $x^{2k-\mu}$ ins Auge faßt:

$$\text{)} \quad k\overset{\mu}{\gamma}_{2k-\mu} + \mu(c_1\overset{\mu}{\gamma}_{2k-\mu-2} + c_3\overset{\mu}{\gamma}_{2k-\mu-4} + c_5\overset{\mu}{\gamma}_{2k-\mu-6} + \cdots + c_{2k-3}\overset{\mu}{\gamma}_{2-\mu} + c_{2k-1}) = 0.$$

Diese Gleichung, aus welcher successive (mit $k = 1, 2, \cdots$) $\overset{\mu}{\gamma}_{2-\mu}$, $\overset{\mu}{\gamma}_{4-\mu}$, $\overset{\mu}{\gamma}_{6-\mu}$ etc. durch die c_k, also durch die Bernoullischen Zahlen gefunden werden können, läßt noch eine besondere Deutung zu. Setzen wir nämlich

$$\text{(22)} \qquad \overset{\mu}{\gamma}_{2k-\mu} = C_k, \quad c_{2k-1} = \frac{s_k}{\mu},$$

so wird sie

$$\text{(23)} \qquad s_k + C_1 s_{k-1} + C_2 s_{k-2} + \cdots + C_{k-1} s_1 + k C_k = 0;$$

dies ist aber die bekannte *Newtonsche Identität* zwischen den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung und den Potenzsummen ihrer Wurzeln. Man kann also μc_1, μc_3, μc_5 etc. als Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung

$$x^n + \overset{\mu}{\gamma}_{2-\mu} x^{n-1} + \overset{\mu}{\gamma}_{4-\mu} x^{n-2} + \cdots + \overset{\mu}{\gamma}_{2n-\mu} = 0$$

ansehen. Die Gl. (23) ist von Waring für die s_k, von Serret (?)[2]) für die C_k aufgelöst. Zum Beispiel ist

$$\text{(24)} \qquad C_1 = -s_1, \quad C_2 = \tfrac{1}{2}s_1^2 - \tfrac{1}{2}s_2 \text{ etc.}$$

---

1) Da nach (17)

$$(-1)^h \psi(1, \mu - 2h - 1, \mu - 1) = \frac{\overset{\mu}{\gamma}_{2h-}}{(\mu - 2h - 1)!}, \qquad h = 0, 1, \ldots \nu$$

so kann man die Koeffizienten der positiven Potenzen mit Hilfe derer der negativen Potenzen berechnen, also in dem Falle, daß die letzteren in anderer Art gefunden sind, die Funktionen $\psi(a, k, n)$ ganz entbehren.

2) Siehe Serret Algèbre supér. I, § 201.

und hieraus mittels (22) und (3):

$$
(25)\quad \begin{cases}
\overset{\mu}{\gamma}_{2-\mu} = -\frac{\mu}{3}, \\
\overset{\mu}{\gamma}_{4-\mu} = \frac{\mu}{3^2}\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{7}{10}\right), \\
\overset{\mu}{\gamma}_{6-\mu} = -\frac{\mu}{3^3}\left(\frac{1}{6}\mu^2 - \frac{7}{10}\mu + \frac{62}{105}\right), \\
\overset{\mu}{\gamma}_{8-\mu} = \frac{\mu}{3^4}\left(\frac{1}{24}\mu^3 - \frac{7}{20}\mu^2 + \frac{3509}{4200}\mu - \frac{381}{700}\right),
\end{cases}
$$

etc.

Die Entwickelungen bei der Cosecante sind analog denen bei de[r] Cotangente, und wir wollen uns dabei auf die Angabe der Resultat[e] beschränken. Wir setzen:

$$\operatorname{cosec}^{\mu} x = x^{-\mu} + \overset{\mu}{\zeta}_{2-\mu} x^{-\mu+2} + \overset{\mu}{\zeta}_{4-\mu} x^{-\mu+4} + \cdots,$$

für $\mu = 1$ und 2 ist bei Einführung der Abkürzung B_k

$$\overset{1}{\zeta}_{2k-1} = \frac{2(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_k = \frac{\mathsf{B}_k}{(2k)!},$$

$$\overset{2}{\zeta}_{-2} = 1, \quad \overset{2}{\zeta}_0 = \tfrac{1}{3}, \quad \overset{2}{\zeta}_{2k} = \overset{2}{\gamma}_{2k} = (2k+1)\frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!} B_{k+1} \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

Durch zweimalige Differentiation folgt die Gleichung

$$\mu(\mu+1)\operatorname{cosec}^{\mu+2} x = \mu^2 \operatorname{cosec}^{\mu} x + \frac{d^2 \operatorname{cosec}^{\mu} x}{dx^2}$$

und daraus die Beziehung zwischen den Koeffizienten:

$$\overset{\mu+2}{\zeta}_m = \frac{\mu}{\mu+1}\overset{\mu}{\zeta}_m + \frac{(m+1)(m+2)}{\mu(\mu+1)}\overset{\mu}{\zeta}_{m+2}.$$

Verstehen wir unter $\Psi_k(a, n)$ die Summe der Kombinationen $k$ter Kl[asse] der Elemente

$$\frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{(a+2)^2}, \quad \frac{1}{(a+4)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n^2},$$

so ist

$$\overset{\mu}{\zeta}_{-m} = (m-1)!\,\frac{1\cdot 3\cdots(\mu-2)}{2\cdot 4\cdots(\mu-1)}\,\Psi_{\frac{m-1}{2}}(1, \mu-2) \qquad \mu \text{ und } m \text{ u[ngerade]}$$

$$\overset{\mu}{\zeta}_{-m} = (m-1)!\,\frac{2\cdot 4\cdots(\mu-2)}{1\cdot 3\cdots(\mu-1)}\,\Psi_{\frac{m-2}{2}}(2, \mu-2) \qquad \mu \text{ und } m$$

und

$$\overset{\mu}{\xi}_m = \frac{1 \cdot 3 \cdots (\mu - 2)}{2 \cdot 4 \cdots (\mu - 1)} \cdot \frac{1}{2\,(m)!} \sum_{h=0}^{\frac{\mu-1}{2}} \Psi_h(1, \mu - 2) \frac{B_{\frac{m+1}{2}+h}}{\frac{m+1}{2}+h} \qquad \mu \text{ und } m \text{ ungerade,}$$

$$\overset{\mu}{\xi}_m = \frac{2 \cdot 4 \cdots (\mu - 2)}{1 \cdot 3 \cdots (\mu - 1)} \cdot \frac{2^m}{(m)!} \sum_{h=0}^{\frac{\mu-2}{2}} 2^{2h+1} \Psi_h(2, \mu - 2) \frac{B_{\frac{m+2}{2}+h}}{\frac{m+2}{2}+h} \qquad \mu \text{ und } m \text{ gerade.}$$

An Stelle von (21) tritt

$$2k \overset{\mu}{\xi}_{2k-\mu} - \mu (b_1 \overset{\mu}{\xi}_{2k-\mu-2} + b_3 \overset{\mu}{\xi}_{2k-\mu-4} + \cdots + b_{2k-3} \overset{\mu}{\xi}_{2-\mu} + b_{2k-1}) = 0,$$

woraus sich die analogen Folgerungen wie dort ziehen lassen.

Königsberg, Dezember 1902.

Beiträge zur Geometrographie II.

Von R. GÜNTSCHE in Berlin.

Bald nachdem Teil I der „Beiträge u. s. w.“[1]) der Redaktion eingereicht war, erschien das kleine Werk über Geometrographie[2]), auf das Herr Lemoine schon in seiner dort erwähnten Abhandlung[3]) im Archiv hinweist, und das an einer anderen Stelle dieser Zeitschrift zur Besprechung gelangt ist.[4]) Zu den Konstruktionen, die in Scientia enthalten sind, möchte ich im vorliegenden und den folgenden Abschnitten der „Beitr.“ einige Vereinfachungen und Ergänzungen angeben; sie sind im Verlauf einer regen Korrespondenz mit Herrn C. Moreau in Poitiers entstanden; eine Anzahl derselben, auf die ich im Text an den betreffenden Stellen hinweise, rührt von Herrn Moreau her, welcher mir deren Veröffentlichung freundlichst gestattet hat. Die in den „Beitr. I“ mitgeteilten Konstruktionen werden der Übersicht halber in der Numerierung der Scientia erwähnt. Zugleich möchte ich

1) Arch. d. Math. u. Phys. (3), 3, S. 191—194, 1902. (Wird mit „Beitr. I“ citiert.)

2) É. Lemoine: Géométrographie ou art des Constructions géométriques, Collection Scientia, Phys.-Math. Nr. 18, Paris, 1902. (Wird mit „Scientia“ citiert.)

3) É. Lemoine: Principes de la Géométrographie etc., Arch. (3), 1, 1901, p. 99 ff. (Wird mit „Arch.“ citiert.)

4) Arch. (3) 4, 336 ff., 1903.

auf zwei kleine Artikel über Geometrographie hinweisen, deren Veröffentlichung bevorsteht.[1])

X^c. *Einen Winkel von 45^0 (oder von 135^0) zu zeichnen.*

Geometrographische Konstruktion, s. Unt.-Bl. a. a. O., Art. „Zur G." — Diese Konstruktion, welche die Einfachheit 11 hat, tritt an die Stelle der in Scientia enthaltenen, die den Einfachheitskoeffizienten 13 besitzt.[2])

XII.[3]) *Geometrographische Konstruktion*, s. Beiträge I, V^a, S. 194.

XIII. *Geometrographische Konstruktion*, s. Beiträge I, IV^a, S. 194.

XV. *Durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden BC eine Gerade AC zu ziehen, die mit BC einen Winkel ACB bildet, der einem gegebenen Winkel N gleich ist.*

Zweite geometrographische Konstruktion (Fig. 5). — Man nehme einen beliebigen, aber von N hinreichend entfernten Punkt O an und beschreibe $O(ON)$ $(C_1 + C_3)$, der die Schenkel des gegebenen Winkels in P und Q schneidet, ziehe $A(ON)$ $(C_1 + C_3)$, beschreibe $A(PQ)$ $(3C_1 + C_3)$, der D auf CB festlegt, nehme, ohne die Zirkelspitze von A aufzuheben, die Länge des Radius von $A(ON)$ in den Zirkel (C_2), beschreibe $D(ON)$ $(C_1 + C_3)$, der $A(ON)$ in E trifft, zeichne $E(ON)$ $(C_1 + C_3)$, der CB in C trifft, und ziehe CA $(2R_1 + R_2)$; diese Gerade ist die verlangte, denn da $\angle ACD = \frac{1}{2}AED$, also $= \frac{1}{2}POQ$ ist, ist $\angle ACD = PNQ$; Op.: $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + C_2 + 5C_3)$; S.: 16; E.: 10; 1 Gerade, 5 Kreise.[4])

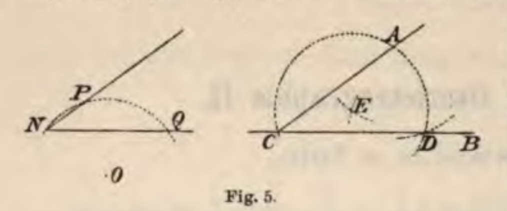


Fig. 5.

Der Radius des Kreises $O(ON)$ muß lang genug genommen werden, damit PQ größer als der Abstand des Punktes A von BC wird.

Diese zweite geometrographische Konstruktion ist der ersten im allgemeinen vorzuziehen, wenn es sich nur darum handelt, den Punkt

---

1) R. Güntsche: Über Geometrographie, Unt.-Bl. f. Math. u. Naturw. **8**, 1902, Nr. 3, und Zur Geometrographie, ebda, Nr. 4. (Sind inzwischen erschienen.)

2) Herr G. Tarry hat dieselbe Konstruktion, sowie eine zweite geometrographische gefunden. (Zusatz September 1902.)

3) Die in Scientia beschriebene Konstruktion ist nach Herrn Lemoines Angabe (Ass. Fr. p. l'Av. des Sc. **23**, 1894, 100) im Prinzip von Herrn J. S. Mackay mitgeteilt worden.

4) Herr G. Tarry hat die Einfachheit der Aufgabe XV auf 15 reduziert; doch verliert die obige Konstruktion aus dem angegebenen Grunde nicht an Interesse. (Zusatz September 1902.)

C zu finden und nicht die Gerade AC. Eine Anwendung hiervon wird unten (XXXVI^b) gegeben.

XXX. *Ein Dreieck zu konstruieren, von dem man eine Seite BC, den gegenüberliegenden Winkel A und einen der beiden anderen Winkel B kennt.*

Die klassische Konstruktion liefert, nach der üblichen Vorschrift ausgeführt, die Einfachheit 43; bei ökonomischer Behandlung gestaltet sie sich an Stelle der in Scientia angegebenen, welche die Einfachheit 28 besitzt, zur geometrographischen.

Geometrographische Konstruktion. — Man bezeichne die gegebenen Größen mit a, $\delta\alpha\varepsilon$ und $\zeta\beta\eta$; es soll $BC = a$, $\angle A = \alpha$ und $\angle B = \beta$ werden. Man stelle $BC = a$ her $(R_2 + 2C_1 + C_2 + C_3)$, beschreibe $C(a)$, sowie $\alpha(a)$ und $\beta(a)$ $(3C_1 + 3C_3)$, wodurch δ und ε, sowie ζ und η auf den Schenkeln der gegebenen Winkel und ι auf der Verlängerung von $\delta\alpha$ festgelegt werden, beschreibe $\varepsilon(\zeta\eta)$, der $\alpha(a)$ in ϑ nach ι zu trifft, und $C(\zeta\eta)$, der $B(a)$ in D trifft $(4C_1 + 2C_3)$, zeichne $B(\iota\vartheta)$ $(3C_1 + C_3)$, der $C(a)$ in E auf derselben Seite von BC trifft, auf der D liegt, und ziehe BD und CE $(4R_1 + 2R_2)$, die sich in A treffen; Op.: $(4R_1 + 3R_2 + 12C_1 + C_2 + 7C_3)$; S.: 27; E.: 17; 3 Gerade, 7 Kreise.[1]

XXXV 3) und 4). *Eine Strecke AB und zwei Strecken p und q sind gegeben; es soll AB in C derart geteilt werden, daß*

$$3)\ \frac{AC}{AB} = \frac{p}{q}, \quad 4)\ \frac{AC}{BA} = \frac{p}{q}$$

ist.

a) Entweder 3) oder 4).

Geometrographische Konstruktion. — An der in Scientia beschriebenen Konstruktion läßt sich eine geringe Vereinfachung anbringen. Wenn man erst p auf der gegebenen Strecke q abträgt $(3C_1 + C_3)$, so kann man die darauf folgende Konstruktion 1) $\frac{AC}{CB} = \frac{p}{q-p}$ bezw. 2) $\frac{AC}{BC} = \frac{p}{p+q}$, nämlich Teilung einer Strecke nach einem gegebenen Verhältnis, schon fortsetzen; diese vermindert sich hierdurch um $2C_1$. Zu dem Symbol von 1) und 2) kommt mithin nur $(C_1 + C_3)$ hinzu; man erhält: Op.: $(2R_1 + R_2 + 9C_1 + 5C_3)$; S.: 17; E.: 11; 1 Gerade, 5 Kreise.[2]

Partikuläre Konstruktion, anwendbar, falls $q > \frac{1}{2}AB$. — Man ziehe $A(q)$ und $B(q)$ $(4C_1 + 2C_3)$, die sich in β schneiden, verbinde A mit

---

1) Herr G. Tarry löst die Aufgabe XXX (ebenso wie XXIX) mit 24 Elementaroperationen. (Zusatz Oktober 1902.)

2) Eine zweite geometrographische Konstruktion wird in einem späteren Teil der Beitr. beschrieben werden.

β $(2R_1 + R_2)$, beschreibe $A(p)$, der AB in γ (und γ') trifft, und $\gamma(p)$ $(4C_1 + 2C_3)$, der AB in C schneidet; Op.: $(2R_1 + R_2 + 8C_1 + 4C_3)$; S.: 15; E.: 10; 1 Gerade, 4 Kreise.

b) 3) und 4) zugleich.

Zweite geometrographische Konstruktion. — Hat man 3) oder 4) mit S.: 17 erhalten (s. oben), so ergibt sich der andere Teilpunkt mit $(2C_1 + C_3)$.

Erste partikuläre Konstruktion, anwendbar im Falle $q > \frac{1}{2}AB$. — Die vorhergehende partikuläre Konstruktion wird dahin ergänzt, daß man noch $\gamma'(p)$ $(C_1 + C_3)$ beschreibt; BA wird hierdurch im gesuchten zweiten Teilpunkte C' getroffen; Op.: $(2R_1 + R_2 + 9C_1 + 5C_3)$; S.: 17; E.: 11; 1 Gerade, 5 Kreise.

Zweite und dritte partikuläre Konstruktion. — Falls $q > \frac{1}{2}p$ und zugleich $q > \frac{1}{2}AB$, so läßt sich die erste partikuläre Konstruktion der vierten Proportionale (Scientia XXXVIII Remarque), falls dagegen $q > \frac{1}{2}p$ oder $q > \frac{1}{2}AB$, die zweite partikuläre Konstruktion derselben Aufgabe (Beiträge I, XVIII[a]) anwenden. Trägt man die erhaltene vierte Proportionale von A aus auf AB oder auf der Verlängerung ab $(3C_1 + C_3)$, so gelangt man zu folgenden Symbolen: $q > \frac{1}{2}p$ und $q > \frac{1}{2}AB$; Anw. der ersten part. Konstr. Op.: $(11C_1 + C_2 + 5C_3)$; S.: 17; E.: 12; 5 Kreise. $q > \frac{1}{2}p$ oder $q > \frac{1}{2}AB$; Anw. der zweiten part. Konstr. Op.: $(2R_1 + R_2 + 10C_1 + 4C_3)$; S.: 17; E.: 12; 1 Gerade, 4 Kreise. Bei allen drei partikulären Konstruktionen ist also die Einfachheit um 3 Einheiten kleiner als bei der allgemeinen, der geometrographischen.

XXXVI (Arch. XIV). *Über einer gegebenen Strecke AB als Sehne das Kreissegment zu beschreiben, das einen gegebenen Winkel $\varepsilon\gamma\alpha$ als Peripheriewinkel faßt.*

Für diese Aufgabe sind zwei klassische Lösungen in Gebrauch; eine dritte Lösung ist Beitr. I, XIV[a] gegeben.

a) Bei der ersten klassischen Lösung wird an AB in A der Komplementwinkel zu γ angetragen; der freie Schenkel schneidet die Mittelsenkrechte von AB in dem Mittelpunkte des Kreises, zu dem das Segment gehört. Herrn G. Tarrys Konstruktion (s. Scientia) hat die Einfachheit 21.

b) Als zweite klassische Lösung ist folgende üblich: man sucht durch A eine Gerade zu legen, die mit der Mittelsenkrechten von AB einen Winkel von der Größe des gegebenen Winkels $\varepsilon\gamma\alpha$ einschließt. Führt man diese Konstruktion nach der gewöhnlichen Vorschrift aus, so findet man: Op.: $(6R_1 + 3R_2 + 11C_1 + C_2 + 9C_3)$; S.: 30; E.: 18; 3 Gerade, 9 Kreise. Wählt man eine nicht geometrographische Konstruktion der Parallelen, so erhöht sich der Einfachheitsgrad noch um

2 bis 4 Einheiten. Verwendet man dagegen die oben beschriebene zweite geometrographische Konstruktion der Aufgabe Scientia XV, so ergibt sich eine erhebliche Vereinfachung:

Konstruktion (Fig. 6). — Um einen beliebigen Punkt μ, der von γ hinreichend entfernt ist, beschreibe man $\mu(\mu\gamma)$ $(C_1 + C_3)$, der auf den Schenkeln des gegebenen Winkels α und ε festlegt; man ziehe $A(\mu\gamma)$ und $B(\mu\gamma)$ $(2C_1 + 2C_3)$, die sich in D und D' schneiden, verbinde D mit $D'(2R_1 + R_2)$, beschreibe $A(\alpha\varepsilon)$ $(3C_1 + C_3)$, der DD' in E trifft; ohne die Zirkelspitze von A abzuheben, nehme man den Radius von $A(\mu\gamma)$ in den Zirkel; hierauf zeichne man $E(\mu\gamma)$ $(C_1 + C_2 + C_3)$, der $A(\mu\gamma)$ in M trifft, sowie $M(\mu\gamma)$ $(C_1 + C_3)$, der DD' in O schneidet, und beschreibe $O(OA)$ $(2C_1 + C_3)$; dies ist der Kreis, dem das gesuchte Segment angehört; Op.: $(2R_1 + R_2 + 10C_1 + C_2 + 7C_3)$; S.: 21; E.: 13; 1 Gerade, 7 Kreise.

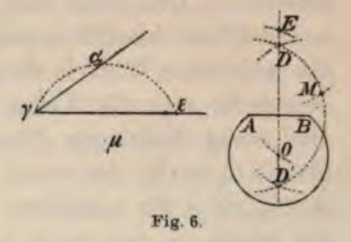


Fig. 6.

Diese Konstruktion gewährt noch ein gewisses Interesse dadurch, daß sie leicht in eine einfache Mascheronische Konstruktion, d. h. in eine Konstruktion mittelst des Zirkels allein, umgewandelt werden kann[1]); man hat nur die Mittelsenkrechte von AB wegzulassen und dafür durch Paare von Kreisbogen, die zu ihr symmetrisch liegen, E, M nebst seinem Spiegelbild M' und O zu bestimmen. Die Konstruktion besitzt, wenn die Schenkel des Winkels γ durch ihren Linienzug gegeben sind, das Symbol Op.: $(12C_1 + C_2 + 9C_3)$; S.: 22; E.: 13; 9 Kreise. Ist dagegen der Winkel $\alpha\gamma\varepsilon$ nur durch den Scheitel γ und je einen Punkt α und ε der Schenkel, die Strecke AB durch ihre Endpunkte A und B gegeben, so findet man Op.: $(18C_1 + C_2 + 13C_3)$; S.: 32; E.: 19; 13 Kreise.

c) Ein drittes Lösungsprinzip ist Beitr. I, XIV^a, S. 193, eingeführt worden; es lassen sich unter Zugrundelegung desselben verschiedene Konstruktionen mit der Einfachheit 22 auffinden, vor allem aber liefert es die geometrographische Konstruktion mit der Einfachheit 20 (s. ebda). Es ist dabei die vierte Proportionale zu $\alpha\varepsilon$, $\omega\varepsilon$ und AB zu konstruieren; hierfür ist die a. a. O. S. 192 mitgeteilte partikuläre Konstruktion XVIII^a benutzt worden. Herr Moreau macht mich darauf

---

1) L. Mascheroni: La geometria del compasso, Pavia 1797, Neudruck Palermo 1901; L. Mascheroni: Gebrauch des Zirkels, übersetzt von J. P. Grüson, Berlin 1825; J. Frischauf: Die geometrischen Konstruktionen von L. Mascheroni und J. Steiner, Graz 1869; Ed. Hutt: Die Mascheronischen Konstruktionen, Progr. Brandenburg a. H. 1873; 2. Aufl., Halle 1880.

aufmerksam, daß man statt dessen die Konstruktion von Mascheroni, die ebenfalls partikulär ist und derselben Einschränkung unterliegt, verwenden kann, und daß man dann die folgende besonders einfache allgemeine Mascheronische Konstruktion erhält.

Konstruktion mit dem Zirkel allein. —

Erster Fall: der Winkel γ ist durch den Linienzug seiner Schenkel gegeben. — Um einen beliebigen, von γ hinreichend entfernten Punkt ω der Ebene beschreibe man den Kreis $\omega(\omega\gamma)$, der auf den Schenkeln des gegebenen Winkels die Punkte α und ε festlegt $(C_1 + C_3)$; alsdann beschreibe man die Kreise $\alpha(\omega\gamma)$ $(C_1 + C_3)$ und $\alpha(\alpha\varepsilon)$ $(C_1 + C_3)$. (*) Um einen beliebigen Punkt λ von $\alpha(\alpha\varepsilon)$ beschreibe man $\lambda(AB)$ $(2C_1 + C_2 + C_3)$, der $\alpha(\alpha\varepsilon)$ in μ trifft, und mit dem beliebigen Radius ϱ' $\lambda(\varrho')$ (C_3), der $\alpha(\omega\gamma)$ in σ schneidet, ferner zeichne man $\mu(\varrho')$ $(C_1 + C_3)$, der $\alpha(\omega\gamma)$ in dem zu μ in Bezug auf $\alpha\lambda$ und $\alpha\sigma$ homologen Punkte τ trifft; $\sigma\tau$ ist die vierte Proportionale zu $\alpha\varepsilon$, $\omega\varepsilon$ und AB; nun zeichne man $A(\sigma\tau)$ und $B(\sigma\tau)$, die sich in O schneiden, und $O(\sigma\tau)$ $(5C_1 + 3C_3)$; dieser Kreis bestimmt das gesuchte Segment; Op.: $(11C_1 + C_2 + 9C_3)$; S.: 21; E.: 12; 9 Kreise.

Zweiter Fall: Der Winkel γ ist durch seinen Scheitel γ und die Punkte α und ε seiner Schenkel, die Strecke AB durch ihre Endpunkte A und B gegeben (Fig. 7). — Mit einem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ beschreibe man die Kreise $\gamma(\varrho)$ und $\alpha(\varrho)$, die sich in ω schneiden, sowie den Kreis $\omega(\varrho)$ $(3C_1 + 3C_3)$; man zeichne $\varepsilon(\varepsilon\omega)$, der $\gamma(\varrho)$ in ω' trifft, $\omega'(\omega'\gamma)$ $(4C_1 + 2C_3)$, der $\omega(\varrho)$ in ε_0 schneidet, und $\alpha(\alpha\varepsilon_0)$ $(2C_1 + C_3)$; im übrigen ist die Konstruktion dieselbe wie im ersten Falle vom Zeichen (*) ab, nur daß ε_0 an die Stelle von ε tritt $(8C_1 + C_2 + 6C_3)$; Op.: $(17C_1 + C_2 + 12C_3)$; S.: 30; E.: 18; 12 Kreise.

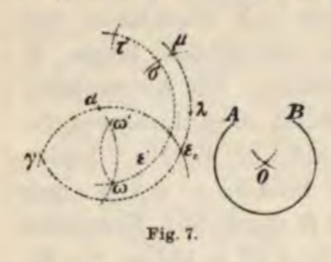


Fig. 7.

Falls $\varrho < 3\alpha\varepsilon$ (im zweiten Falle $\varrho < 3\alpha\varepsilon_0$), d. h. $\sin\gamma > \frac{1}{6}$ oder $\gamma >$ ca. 10^0, kann man es einrichten, daß der Kreis $\lambda(\varrho')$ mit $\lambda(AB)$ zusammenfällt; man spart dann ein C_3 und gelangt zu den Einfachheitsgraden 20 bezw. 29.

XXXVII (Arch. XVII). *Die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise O und O' von den Radien R und R' zu konstruieren.*

Dieses wichtige Problem ist in Arch. (3), **1**, 1901, p. 106 ff. sowohl, wie in Scientia 1902 eingehend behandelt worden.

a) Die im Archiv a. a. O. für den Fall, daß die Kreise sich nicht schneiden, mitgeteilte Konstruktion, die von Herrn Moreau

herrührt, ist von ihm selbst auf den Einfachheitsgrad 35 gebracht worden (Scientia p. 43). Eine von Herrn Tarry angegebene Konstruktion (Scientia p. 42) von derselben Einfachheit hat Herr Moreau auf 34 reduziert (Scientia p. 87 Appendice).

b) Für den Fall, daß die Kreise sich schneiden, wo also zwei Tangenten wegfallen, ist in Scientia eine auf einem anderen Prinzip beruhende geometrographische Konstruktion, die Herr Moreau gefunden hat, dargelegt; sie besitzt die Einfachheit 26. Herrn Tarrys Konstruktion würde in diesem Falle nach der von Herrn Moreau angegebenen Modifikation 27 ergeben, also nicht geometrographisch sein. Man kann aber auf Herrn Tarrys Konstruktion einen ähnlichen Kunstgriff anwenden; man hat nur zu beachten, daß, wenn die beiden Kreise $O(R)$ und $O'(R')$, wobei $R > R'$ ist, sich schneiden, die Kreise $O(R)$ und $O'(R)$ sich sicher auch schneiden. Die Bezeichnung schließt sich im folgenden an Scientia Fig. 12, S. 39, an.

Zweite geometrographische Konstruktion für den Fall, daß die beiden Kreise sich schneiden (Fig. 8). — Man ziehe OO' $(2R_1 + R_2)$, die $O'(R')$ in D' schneidet; man beschreibe $O'(R)$ $(2C_1 + C_2 + C_3)$, der $O(R)$ in E und E' und OO' in J' trifft, wobei die Punkte O, O', D', J' in der angegebenen Reihenfolge liegen. Man ziehe $EE'(2R_1 + R_2)$, die ω auf OO' festlegt, sowie $D'(\omega O')$ und $J'(\omega O')$ $(4C_1 + 2C_3)$, die sich in H' treffen. Man beschreibe $\omega(O'H')$ $(3C_1 + C_3)$, der auf $O(R)$ C_1 und C, sowie auf $O'(R')$ C' und C_1' festlegt; man ziehe C_1C' und $CC_1'(4R_1 + 2R_2)$; dies sind die verlangten beiden Tangenten; Op.: $(8R_1 + 4R_2 + 9C_1 + C_2 + 4C_3)$; S.: 26; E.: 18; 4 Gerade, 4 Kreise.

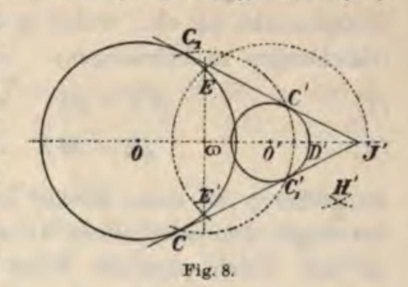


Fig. 8.

XXXVIII (Arch. XVIII). *Zu drei gegebenen Strecken M, N und P die vierte Proportionale zu konstruieren*; $X = \frac{NP}{M}$ $(N > P)$.[1]

Für diese Aufgabe besteht bis jetzt eine geometrographische Konstruktion mit dem Einfachheitskoeffizienten 21 (Scientia S. 44).

Eine partikuläre Konstruktion (im folgenden als *Konstruktion* A bezeichnet), die Herr Moreau zuerst in der Geometrographie verwendet

1) Herrn Moreau ist es (August 1902) gelungen, den Einfachheitsgrad dieser wichtigen Aufgabe auf die Zahl 19 zu reduzieren. Eine zweite Konstruktion von derselben Einfachheit wird in einem späteren Teil der „Beiträge" beschrieben werden. (Zusatz Oktober 1902.)

hat (s. oben XXXVIc), ist die von L. Mascheroni (a. a. O., Übersetzung von Grüson, § 93, S. 69 ff; Frischauf, a. a. O., S. 9; Hutt, a. a. O., S. 19); sie erfordert die Erfüllung der Bedingung $2M > P$, bedarf nur des Zirkels, und besitzt das Symbol Op.: $(8C_1 + C_2 + 5C_3)$; S.: 14; E.: 9; 5 Kreise; ist außerdem $M < N + P$ und zugleich $M > N - P$, so spart man noch $1C_3$.

Herr E. Lemoine beschreibt ferner (Scientia S. 45)[1]) eine partikuläre Konstruktion mit dem Zirkel allein, die unter der Bedingung $2M > N$ anwendbar ist (*Konstruktion* **B**); sie hat den Einfachheitskoeffizienten 13.

Eine dritte partikuläre Konstruktion, die auf einem Theorem von A. F. Möbius beruht, ist im Teil I der „Beiträge u. s. w.“ a. a. O. XVIII[a], S. 192, mitgeteilt worden (*Konstruktion* **C**). Ihr Einfachheitsgrad ist ebenfalls 13, aber sie ist, wie die Konstruktion **A**, anwendbar, wenn nur die Bedingung $2M > P$ erfüllt ist.

Diese drei partikulären Konstruktionen lassen sich nun paarweise kombinieren, so daß sechs neue allgemein gültige Konstruktionen entstehen:

Auflösung. — Schaltet man in der Gleichung $NP = MX$ ein Hilfsprodukt $\varrho\xi$ ein, wobei ϱ beliebig ist, so sind folgende beiden Gleichungen zu befriedigen:

$$(1) \qquad NP = \varrho\xi \quad \text{oder} \quad \varrho : N = P : \xi,$$

$$(2) \qquad \varrho\xi = MX \quad \text{oder} \quad M : \varrho = \xi : X.$$

Je größer ϱ ist, desto kleiner ist ξ, die Bedingung der Anwendbarkeit der obigen drei partikulären Konstruktionen auf diese beiden Gleichungen ist also durch passende Wahl von ϱ stets zu erfüllen, wenn nicht gerade die Konstruktion **B** auf die Gleichung (2) angewandt wird. Beachtet man dies, so erhält man 6 Paare von Konstruktionen. Von diesen liefert das Paar **AA** den Einfachheitskoeffizienten 22. Dagegen besitzen die übrigen fünf alle die Einfachheit 21, darunter die Konstruktion **CC** in doppelter Form; diese sind also, da sie dieselbe Einfachheit haben, wie die bisher bekannte geometrographische Konstruktion, ebenfalls geometrographisch. Die Konstruktionen ordnen sich folgendermaßen:

1) **AA** (Konstruktion mit dem Zirkel allein); S.: 22.
2) **BA** (Konstruktion mit dem Zirkel allein); zweite
3) **CA** . . . . dritte
4) **AC** . . . . vierte
5) **BC** . . . . fünfte
6) **CC***a* . . . . sechste
7) **CC***b* . . . . siebente

(2)–(7): geometrographische Konstruktion, S.: 21.

1) Nach Journal de Vuibert, S. 58, 1881—1882; Mathesis S. 158, 1892.

Zweite geometrographische Konstruktion (**BA** *Konstruktion mit dem Zirkel allein*, Fig. 9). — Man beschreibe um den beliebigen Punkt O den Kreis $O(M)(2C_1 + C_3)$ und mit dem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ den Kreis $O(\varrho)(C_3)$, nehme auf der Peripherie von $O(\varrho)$ C beliebig an und zeichne $C(N)(2C_1 + C_2 + C_3)$, der $O(\varrho)$ in A schneidet, $A(P)(3C_1 + C_3)$, der $O(\varrho)$ in zwei Punkten trifft, von denen irgend einer B sei, und $B(P)$ $(C_1 + C_3)$, der $C(N)$ in A' schneidet (AA' ist die vierte Proportionale ξ zu ϱ, N und P). Um V_1, einen beliebigen Punkt von $O(M)$, beschreibe man $V_1(AA')(2C_1 + C_2 + C_3)$, der $O(M)$ in V_2 schneidet, und mit einem beliebigen Radius ϱ' $V_1(\varrho')(C_3)$, der $O(\varrho)$ in W_1 trifft; schließlich zeichne man $V_2(\varrho')(C_1 + C_3)$, der $O(\varrho)$ in W_2 schneidet; W_1W_2 ist die vierte Proportionale zu M, ϱ und ξ, also die gesuchte zu M, N und P; Op.: $(11C_1 + 2C_2 + 8C_3)$; S.: 21; E.: 13; 8 Kreise.

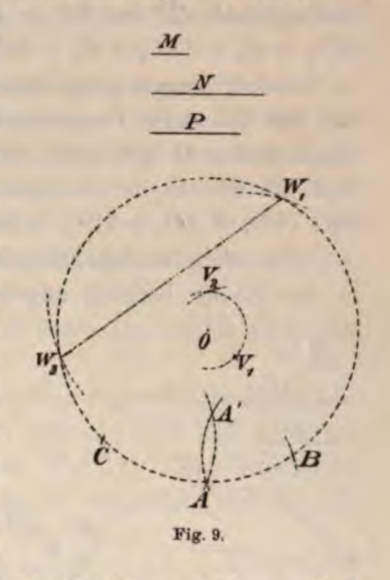


Fig. 9.

Dritte geometrographische Konstruktion (**CA**). — Wie die vorige, nur daß die vierte Proportionale zu ϱ, N und P nicht nach der Konstruktion **B**, sondern nach der Konstruktion **C** (Beitr. I, XVIII[a], S. 192) ausgeführt wird; Op.: $(2R_1 + R_2 + 10C_1 + C_2 + 7C_3)$; S.: 21; E.: 13; 1 Gerade, 7 Kreise.

Vierte geometrographische Konstruktion (**AC**). — Man beschreibe um den beliebigen Punkt O $O(N)(2C_1 + C_3)$ und mit einem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ $O(\varrho)(C_3)$; dann nehme man auf $O(\varrho)$ irgend einen Punkt F_1 an, beschreibe $F_1(P)(2C_1 + C_2 + C_3)$, der $O(\varrho)$ in F_2 trifft, und zeichne mit einem beliebigen Radius $F_1(\varrho')(C_3)$, der $O(N)$ in G_1 schneidet, sowie $F_2(\varrho')(C_1 + C_3)$, der $O(N)$ in dem zu G_1 in Bezug auf OF_1 und OF_2 homologen Punkte G_2 trifft. Nun beschreibe man um den beliebigen Punkt O'' $O''(M)(2C_1 + C_3)$, der $O(\varrho)$ in H und H' trifft, zeichne $H(G_1G_2)(3C_1 + C_3)$, der $O''(M)$ in J schneidet, und ziehe $JH'(2R_1 + R_2)$, die $O(\varrho)$ in K trifft; KH ist die verlangte vierte Proportionale zu M, N und P; das Symbol ist wie bei der vorigen Konstruktion.

Fünfte geometrographische Konstruktion (**BC**). — Man wähle ϱ hinreichend groß und konstruiere nach Scientia XXXVIII Remarque die

vierte Proportionale ξ zu ϱ, N und $P(6C_1 + C_2 + 4C_3)$, sowie unter Benutzung des Kreises $O(\varrho)$ nach Beitr. I, S. 192, XVIII[a], die vierte Proportionale X zu M, ϱ und ξ $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 2C_3)$; Op.: $(2R_1 + R_2 + 11C_1 + C_2 + 6C_3)$; S.: 21; E.: 14; 1 Gerade, 6 Kreise.

Sechste geometrographische Konstruktion (**CC***a*). — Wie die vorige, nur daß die vierte Proportionale ξ zu ϱ, N und P ebenfalls nach der Konstruktion **C** gefunden wird $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$; der zweite Teil ist wie in der vorigen Konstruktion $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 2C_3)$; Op.: $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 5C_3)$; S.: 21; E.: 14; 2 Gerade, 5 Kreise.

Siebente geometrographische Konstruktion (**CC***b*, Fig. 10). — Um die in der Ebene beliebig angenommenen Punkte O' und O'' beschreibe man die Kreise $O'(N)$ und $O''(M)$ $(4C_1 + 2C_3)$, die sich in S schneiden, ferner um den beliebigen von S hinreichend entfernten Punkt O den Kreis $O(OS)$ $(C_1 + C_3)$, der $O'(N)$ in S' und $O''(M)$ in S'' trifft; dann zeichne man $S(P)$ $(3C_1 + C_3)$, der $O(OS)$ in T trifft, und ziehe $S'T(2R_1 + R_2)$, die $O'(N)$ in U schneidet; man beschreibe sodann $S(SU)$ $(2C_1 + C_3)$, der $O''(M)$ in W trifft, und ziehe $WS''(2R_1 + R_2)$, die $O(OS)$ in Z schneidet; ZS ist die verlangte Strecke; Op.: $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 5C_3)$; S.: 21; E.: 14; 2 Gerade, 5 Kreise.

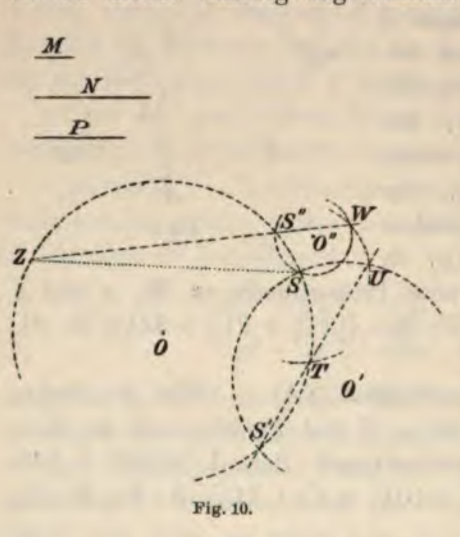


Fig. 10.

XXXIX (Arch. XIX). *Die dritte Proportionale X zu zwei gegebenen Strecken N und M zu finden;* $X = \frac{N^2}{M}$.

Die geometrographische Konstruktion dieser Aufgabe, aus der ersten geometrographischen der vierten Proportionale durch Spezialisierung erhalten, hat die Einfachheit 15 (Scientia S. 45); die beiden einfachsten partikulären Konstruktionen unterliegen der Bedingung $2M > N$ und haben die Einfachheit 10 (Scientia S. 46 und Beitr. I, Konstruktion XIX[a], S. 192; letztere ist durch Spezialisierung aus der Konstruktion **C** der vierten Proportionale abgeleitet); außerdem existieren noch partikuläre Konstruktionen von höherem Einfachheitskoeffizienten und derselben Anwendbarkeitsbedingung, die man durch Spezialisierung der übrigen partikulären Konstruktionen der vierten Proportionale erhält,

z. B. aus der Konstruktion **B** (Scientia S. 46, Einfachheit 11) und aus der Konstruktion **A** (Einfachheit 12 oder, wenn außer der obigen Bedingung $2N > M$ ist, 11); beide werden mit dem Zirkel allein ausgeführt.[1])

Die oben mitgeteilte zweite bis siebente geometrographische Konstruktion der vierten Proportionale liefern zwar Konstruktionen der dritten Proportionale, doch ist wegen des höheren Einfachheitsgrades keine von ihnen geometrographisch. Die aus der zweiten (**BA**) abgeleitete ist *mit dem Zirkel allein* ausführbar und hat das Symbol Op.: $(9C_1 + 2C_2 + 8C_3)$; S.: 19; E.: 11; 8 Kreise. **AA** erfordert dagegen wieder im allgemeinen $1C_3$ mehr.

XLIII (Arch. XXI). *Eine Strecke AB innen und außen nach dem goldenen Schnitt zu teilen.*

Von dieser Aufgabe waren bisher drei geometrographische Konstruktionen von der Einfachheit 13 bekannt; die folgende reiht sich ihnen an.

Vierte geometrographische Konstruktion (Fig. 11). Man beschreibe den Kreis $A(AB)(2C_1 + C_3)$, der BA in B' schneidet, und $B(AB)$ $(C_1 + C_3)$, der AB in A' und $A(AB)$ in G trifft; man ziehe $B'(B'G)$ und $A(B'G)(3C_1 + 2C_3)$, die sich in K schneiden; während die Spitze des Zirkels in A bleibt, nehme man AA' in den Zirkel (C_1); schließlich ziehe man $K(AA')(C_1 + C_3)$, der AB in X zwischen A und B, sowie in X' trifft; X und X' sind die beiden verlangten Punkte; Op.: $(8C_1 + 5C_3)$; S.: 13; E.: 8; 5 Kreise.

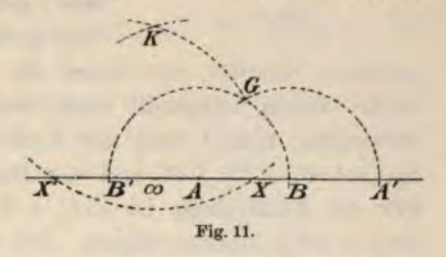


Fig. 11.

Zum Beweise bezeichne man die Mitte von AB' mit ω; man hat $B'K = AB\sqrt{3}$, also $\omega K = \frac{1}{2}AB\sqrt{11}$, mithin $\omega X = \omega X' = \frac{1}{2}AB\sqrt{5}$, d. h. $\left.\begin{matrix} AX \\ AX' \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}AB(\mp 1 + \sqrt{5})\cdot$

---

1) Ist $M < 2N$, also u. a. dann, wenn die genannten partikulären Konstruktionen versagen, kann man folgende partikuläre Konstruktion anwenden: Es sei $AB = M$, $CD = N$. Man beschreibe $A(N)$ und $B(N)(4C_1 + 2C_3)$, die sich in E schneiden, und $E(N)(C_1 + C_3)$, der $A(N)$ in S und S' trifft; $SS'(2R_1 + R_2)$ begrenzt auf AB die Länge der gesuchten Strecke AT. Um sich zum Schluß in Bezug auf die Lage der gesuchten Strecke von den gegebenen Stücken frei zu machen, kann man ein Verfahren einschlagen, analog dem, das von Herrn Moreau bei einer anderen Konstruktion in Anwendung gebracht worden ist: Um irgend einen Punkt O der Ebene beschreibe man $O(AT)(2C_1 + C_3)$; der Radius dieses Kreises stellt die gesuchte Strecke dar. Op.: $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_3)$; S.: 14; E.: 9; 1 Gerade, 4 Kreise. (Zusatz Mai 1903.)

Herrn Moreau verdanke ich den Hinweis, daß die Mascheronische Konstruktion des inneren und äußeren goldenen Schnitts, die sich aus der vorstehenden ableiten läßt, als die bis jetzt bekannte einfachste zu gelten hat. Hierzu hat man folgendermaßen zu verfahren:

Konstruktion mittelst des Zirkels allein (Fig. 12).[1]) Gegeben sind die Punkte A und B. Man beschreibe $A(AB)(2C_1 + C_3)$ und $B(AB)$ $(C_1 + C_3)$, der $A(AB)$ in G und G' trifft, beschreibe $G(GG')(2C_1 + C_3)$, der $A(AB)$ in B' schneidet, sowie $A(GG')$ und $B'(GG')(2C_1 + 2C_3)$, die sich in K und K' treffen, nehme, ohne die Spitze von B' aufzuheben, $B'B$ in den Zirkel und beschreibe $K(B'B)$ und $K'(B'B)$ $(3C_1 + 2C_3)$, die sich in den gesuchten Punkten X und X' treffen; Op.: $(10C_1 + 7C_3)$; S.: 17; E.: 10; 7 Kreise.

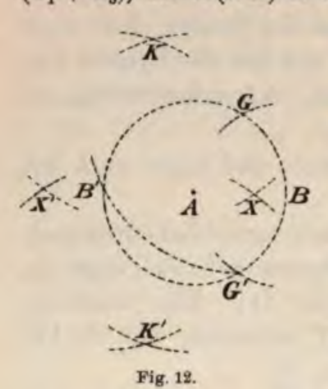


Fig. 12.

Anhang. An die Konstruktion des goldenen Schnitts schließt sich die der *Fünf- und Zehnteilung des Kreises*[2])[3]) an. Die vier geometrographischen Konstruktionen des goldenen Schnitts, von denen die ersten drei in Scientia (S. 50), die vierte soeben mitgeteilt sind, lassen sich ohne Schwierigkeit hierzu verwenden; nimmt man den Kreis $O(r)$ als gegeben an, so fällt vom Symbol $C_1 + C_3$ fort und ein Durchmesser $(R_1 + R_2)$ kommt hinzu. Für die Fünfteilung ist $(3C_1 + 2C_3)$, für die Zehnteilung außerdem $(2C_1 + 2C_3)$ hinzuzurechnen. Die Symbole sind also folgende:

Erste und vierte geometrographische Konstruktion. —

Fünfteilung: Op.: $(R_1 + R_2 + 10C_1 + 6C_3)$; S.: 18; E.: 11; 1 Gerade, 6 Kreise.

Zehnteilung: Op.: $(R_1 + R_2 + 12C_1 + 8C_3)$; S.: 22; E.: 13; 1 Gerade, 8 Kreise.

Zweite und dritte geometrographische Konstruktion. —

Fünfteilung: Op.: $(3R_1 + 2R_2 + 8C_1 + 5C_3)$; S.: 18; E.: 11; 2 Gerade, 5 Kreise.

Zehnteilung: Op.: $(3R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 7C_3)$; S.: 22; E.: 13; 2 Gerade, 7 Kreise.

---

1) Vgl. Arch. (3), **1**, 335, 1901, Aufg. 21, wo Herr Lemoine noch die Zahl 20 als Einfachheitskoeffizienten dieser Aufgabe aufstellt.

2) In Scientia nicht erwähnt.

3) In einem späteren Teil der „Beiträge" wird eine sechste geometrographische Fünf- und Zehnteilung mitgeteilt werden; durch sie kann man die Mascheronische Zehnteilung in 23 Elementaroperationen ausführen. (Zusatz September 1902).

Die vierte gestaltet sich z. B. folgendermaßen:

Vierte geometrographische Konstruktion (Fig. 13). — Man ziehe in dem gegebenen Kreise $O(r)$ einen beliebigen Durchmesser $A_0 O A_5 (R_1 + R_2)$, beschreibe $A_0 (A_0 O)$ $(2 C_1 + C_3)$, der $O(r)$ in G und $A_0 O$ in O' schneidet, zeichne $O'(O' G)$ und $A_0 (O' G)$ $(3 C_1 + 2 C_3)$, die sich in K treffen, und beschreibe $K(A_0 A_5)$ $(2 C_1 + C_3)$, der $A_0 A_5$ in X und X' schneidet; nun ziehe man $A_0 (A_0 X')$ $(2 C_1 + C_3)$, der auf dem gegebenen Kreise A_3 und A_7 festlegt, und $A_0 (A_0 X)$ $(C_1 + C_3)$, der A_1 und A_9 liefert; durch die Punkte A_1, A_3, A_5, A_7, A_9 ist die Fünfteilung vollendet; beschreibt man noch $A_3 (A_0 X)$ und $A_7 (A_0 X)$ $(2 C_1 + 2 C_3)$, so erhält man die außer A_0 zur Zehnteilung noch fehlenden Punkte A_2, A_4, A_6, A_8. Die Symbole sind oben angegeben.

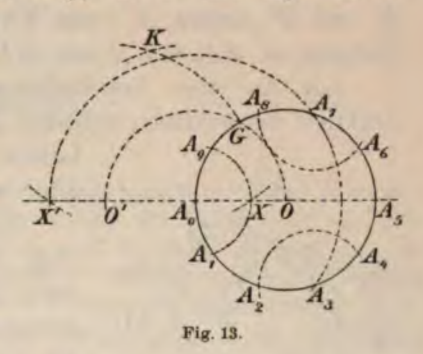


Fig. 13.

Man könnte auch erst mit X und dann mit X' operieren; das Ergebnis ist dasselbe.

Herr Moreau teilt mir ferner folgende fünfte geometrographische Konstruktion der Zehnteilung mit; sie beruht auf einer Konstruktion des goldenen Schnitts, die bei der Einfachheit 13 nur einen der beiden Teilpunkte liefert.

Fünfte geometrographische Konstruktion (Fig. 14). — Man ziehe einen beliebigen Durchmesser $A_0 O A_5 (R_1 + R_2)$, beschreibe $A_0 (A_0 A_5)$ und $O(A_0 A_5)(3 C_1 + 2 C_3)$, die sich in K und K' schneiden, beschreibe $K'(A_0 A_5)$ $(C_1 + C_3)$, der $O(A_0 A_5)$ in H trifft, ziehe $KH (2 R_1 + R_2)$, die $A_0 A_5$ in X trifft $\left(\text{es ist } OX = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right.$ und $\left. KX = r\sqrt{5}\right)$; $A_0 (OX)$ bestimmt A_1 und A_9, $A_0 (A_0 X)$ A_3 und A_7 $(4 C_1 + 2 C_3)$; damit ist die Fünfteilung ausgeführt; Op.: $(3 R_1 + 2 R_2 + 8 C_1 + 5 C_3)$; S.: 18; E.: 11; 2 Gerade, 5 Kreise. $A_1 (A_0 X)$ liefert A_4 und A_8, $A_9 (A_0 X)$ gibt A_2 und A_6 $(2 C_1 + 2 C_3)$; damit ist die Zehnteilung vollzogen; Op.: $(3 R_1 + 2 R_2 + 10 C_1 + 7 C_3)$; S.: 22; E.: 13;

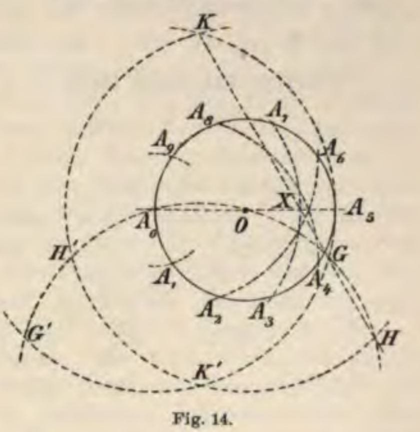


Fig. 14.

2 Gerade, 7 Kreise. Die Symbole sind also dieselben wie bei der zweiten und dritten geometrographischen Konstruktion. KH geht durch den Schnittpunkt G von $A_0(A_0A_5)$ und $K'(A_0A_5)$; man hätte also auch, um X zu finden, G statt H wählen können. Die zweiten Schnittpunkte H' und G' liefern X'; das Verfahren ist in diesem Falle dasselbe. Übrigens ist $XG = XO$ und $XH = XA_0$.

Aus der oben beschriebenen vierten geometrographischen Konstruktion des goldenen Schnitts läßt sich schließlich die zur Zeit einfachste Mascheronische Konstruktion der Fünf- und Zehnteilung des Kreises ableiten.

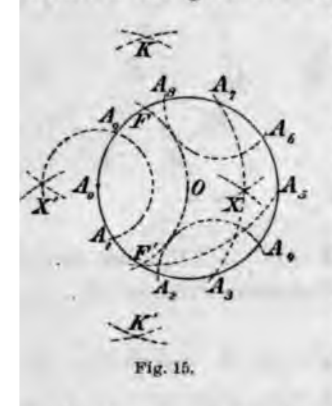


Fig. 15.

Konstruktion mittelst des Zirkels allein (Fig. 15). — Man beschreibe um irgend einen Punkt A_0 auf der Peripherie des gegebenen Kreises $O(r)$ den Kreis $A_0(A_0O)$ $(C_1 + C_2 + C_3)$, der $O(r)$ in F und F' trifft, beschreibe $F(FF')(2C_1 + C_3)$, der $O(r)$ in A_5 trifft, zeichne $O(FF')$ und $A_0(FF')$ $(2C_1 + 2C_3)$, die sich in K und K' schneiden, sowie $K(A_0A_5)$ und $K'(A_0A_5)(3C_1 + 2C_3)$, die sich in X zwischen O und A_5, sowie in X' treffen; $A_0(A_0X)$ und $A_0(A_0X')(3C_1 + 2C_3)$ geben durch die Punkte A_3, A_7, A_1, A_9 nebst A_5 die Fünfteilung; Op.: $(11C_1 + C_2 + 8C_3)$; S.: 20; E.: 12; 8 Kreise; $A_3(A_0X')$ und $A_7(A_0X')(2C_1 + 2C_3)$ vollenden die Zehnteilung; Op.: $(13C_1 + C_2 + 10C_3)$; S.: 24; E.: 14; 10 Kreise.

(Fortsetzung folgt.)

Berlin, 30. Juni 1902.

Rezensionen.

J. Klein. Handbuch der allgemeinen Himmelsbeschreibung nach dem Standpunkte der astronomischen Wissenschaft am Schlusse des 19. Jahrhunderts. Dritte völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage der Anleitung zur Durchmusterung des Himmels. Mit zahlreichen Abbildungen und Tafeln. Braunschweig, Friedrich Vieweg und Sohn. 1901.

Das letzte Jahrzehnt, in dem keine Auflage dieses wertvollen Buches erschienen ist, ist für die Astronomie, die im 19. Jahrhundert mit den andern exakten Wissenschaften soweit vorgeschritten ist, von besonderer Fruchtbarkeit gewesen. Die Spektralanalyse und die Photographie mit ihren fortwährend sich verfeinernden Instrumenten und Methoden sind zu zwei mächtigen Werkzeugen bei der Durchforschung des Himmels geworden, während in günstigen Lagen aufgestellte Riesenteleskope das Himmelsbild ihrerseits vervollständigten. So erscheint es am Ausgange des Jahrhunderts schwierig, sich die Fülle des Stoffes zu so festem Besitze zu bringen, um sie klar und verständlich und in der gehörigen Ordnung einem weiteren Leserkreise mitzuteilen. Doch ist der Verfasser in anerkennenswerter Weise dieser Schwierigkeiten Herr geworden, und die gute Anordnung des Materials verdient besonderes Lob. Die auf dem engen Raume von 600 Seiten dargebotene Stoffmenge ist erstaunlich. Wir können es nur gutheißen, daß in einem ersten Teile die Instrumente der Himmelskunde zu einer kurzen Besprechung gelangen, die freilich manchem Leser unzulänglich erscheinen wird, aber ihn zum Studium ausführlicherer Werke anzuregen geeignet ist. Der Sonne und ihrem System, dem der Verfasser auch die Kometen und Meteorite zugesellt, ist die eine Hälfte des Buches gewidmet. Die meisten Ergebnisse der Sonnenchemie, wie die Entdeckung des Cleveitgases Helium als Ursache der D_3-Linie, die Natur der Protuberanzen, wie sie insbesondere Hale in Chicago mit dem Photoheliographen studierte, und die Forschungen über die verschiedenen strahlenden Energien, die vom Sonnenkörper ausgehen, werden — wenn auch knapp — dargestellt. Schiaparellis Untersuchung der Merkurrotation, wie auch seine und andere Diskussionen der Achsendrehung der Venus, nicht zum wenigsten auch die seinen scharfen Augen insbesondere zu dankenden Ergebnisse der Areographie kommen zur Geltung; auch werden die von andern aufgestellten Hypothesen über die merkwürdigen Gebilde der Marsoberfläche nicht verschwiegen. Mit besonderer Ausführlichkeit wird der Erforschung der Oberfläche des Erdmondes gedacht und den „selenologischen“ Theorien ein kurzer Raum zugewiesen. Auch die vom Bolometer gelieferten lunaren Strahlungsergebnisse finden Erwähnung. Bei den kleineren Planeten, deren

Zahl sich dank der photographischen Methode so gehoben hat, ist der einzige Weltkörper zwischen der Erd- und der Marsbahn, der von Witt entdeckte Planet, übersehen. Obgleich der Verfasser selbst in seiner Vorrede es ablehnt, vollständig sein zu wollen, so ist doch dieses die einzige wichtige Tatsache, die wir vermissen, und das spricht gewiß für das Buch. Dafür geschieht aller alten und neueren Kometen Erwähnung und ihre physikalische Natur, wie die Theorie der periodischen unter ihnen, wird nach Schulhof mit gebührender Ausführlichkeit behandelt, wie auch den Sternschnuppen und Meteoriten, deren kosmische Natur insbesondere die Untersuchungen v. Nießls zur Gewißheit brachten, und deren physikalische Natur vorzüglich durch Brezinas Untersuchungen gefördert wurde, Beachtung zu teil wird. Die Stellarastronomie ist die Überschrift des dritten Teiles. Die Helligkeitsverhältnisse der Fixsterne, ihre Farben und ihre spektroskopische Untersuchung, die insbesondere durch die auf der Harvardsternwarte und in Potsdam ausgebildete spektrophotographische Methode wesentlich gefördert ward, durch welche auch die Untersuchungen über die veränderlichen und die neuen Sterne einen neuen Anstoß erhielten, bilden die eine Seite der Durchforschung des Fixsternhimmels. Die andere, die Bestimmung der Parallaxen und Eigenbewegungen, nicht weniger interessant und mit der Frage der Verteilung der Fixsterne zu den universellsten Problemen hinleitend, denjenigen über die Fahrt des Sonnensystems und über dessen Lage im galaktischen System, kommt nach den durch die feinsten Messungen gewonnenen Resultaten zu einer ebenso eingehenden Besprechung. Die Doppel- und mehrfachen Sonnen mit den modernen spektroskopischen Doppelsternen, die Sternhaufen und die Nebelflecke, deren Natur und Verbreitung festzustellen wesentlich erst die neuen Methoden im stande waren, machen den Beschluß dieses Teiles. Der vierte endlich geht die in Mitteleuropa sichtbaren Sternbilder durch und zählt alle für Freunde der Himmelskunde interessanten Objekte, die sich in ihnen finden, auf. Ein Sach- und ein Namenregister erleichtern den Gebrauch des Buches, dem die durch die Ausstattung ihrer Werke rühmlichst bekannte Verlagsbuchhandlung einen reichen Schmuck von fast durchgängig neuen Bildern beigegeben hat.

Charlottenburg. H. Samter.

Prof. Dr. R. Börnstein. Schul-Wetterkarten. 12 Wandkarten unter Benutzung der Typen von van Bebber und Teisserenc de Bort für Unterrichtszwecke zusammengestellt. Berlin 1902, Dietrich Reimer.

Der scheinbare Mangel an Gesetzmäßigkeit, der die Erscheinungen des Wetters beherrscht, weicht allmählich unter den Händen geschickter Forscher. Seitdem man insbesondere durch den Vorgang von Buys-Ballot tägliche synoptische Wetterkarten zusammenzustellen anfing, haben sich dieselben als wichtige Grundlagen für die Erforschung der Gesetze der Wettererscheinungen und eine auf diesen begründete wissenschaftliche Prognose des Wetters wenigstens für die den zusammengestellten Beobachtungen folgenden 24 Stunden erwiesen. Die Wichtigkeit dieser Vorhersagen besonders für die Schiffahrt und die Landwirtschaft ist auf der Hand liegend, und der Umstand, daß eine Reihe größerer Tageszeitungen die von der Deutschen Seewarte gesammelten Beobachtungen in solchen Karten täglich

zusammengestellt ihren Lesern darzubieten sich verpflichtet fühlt, spricht dafür, daß weite Kreise daran interessiert sind, in das Verständnis derselben einzudringen. Die Schulen — insbesondere die höheren, die nach den Motiven der Lehrpläne von 1892 auf die Bedürfnisse des praktischen Lebens weitestgehende Rücksicht zu nehmen angewiesen sind, und denen gerade in den mittleren Klassen im physikalischen Unterricht die Pflege dieser Interessen auferlegt ist, können sich unmöglich dem entziehen, ihren Schülern hier in ein paar Stunden eine Anleitung zum Lesen der Karten zu bieten und dieselben darauf hinzuweisen, wie die Prognosen zu stande kommen.

Mancher Lehrer wird sich bisher — wie auch der Referent — dadurch geholfen haben, daß er eine Kartenskizze an der Wandtafel entwarf und die einem ausgeprägten Wettertypus entsprechenden Isobaren und Windrichtungen darauf verzeichnete. Die Schulwetterkarten ersparen ihm diese Mühe. Dieselben geben nach der vorliegenden Nr. 1 für einen bestimmten Wettertypus die Beobachtungen etwa in dem Umfange wie die Seewarte sie in ihren täglichen Karten morgens zusammenstellt, jedoch der Deutlichkeit halber in drei Farben und in so großem Maßstabe, daß sie auch für große Klassen brauchbar erscheinen. Die vorliegende Karte für den 8. Juli 1900 (einen kalten und regnerischen Sonntag) soll als Beispiel für van Bebbers Typus I gelten.

In Nebenkarten ist die Witterung des vorhergehenden Abends und des folgenden Mittags angegeben, so daß die Verfolgung der Änderungen möglich ist. Die Angabe der Prognose erleichtert es dem Lehrer, die Folgerungen zusammenzustellen, die sich aus dem Wetterbilde ergaben. Wir können die Anschaffung wenigstens *einer* Karte für den Unterricht warm empfehlen.

Charlottenburg. H. Samter.

H. Poincaré. Electricité et optique. 2e édit. Paris 1901, Carré et Naud.

Vor uns liegt die zweite Auflage der Vorlesungen, welche der Verf. in den Jahren 1888 und 1890 an der Sorbonne über das Licht und die Elektrizität gehalten hat. In ihr ist alles, was sich auf die Hertzschen Versuche bezieht, mit Rücksicht auf das Werk: Les Oscillations Electriques desselben Verfassers fortgelassen worden. Hinzugekommen sind die Vorlesungen aus dem Jahr 1899, wo die verschiedenen elektrodynamischen Theorien von Hertz, Lorentz und Larmor mit einander verglichen werden. Der Verfasser kommt zu dem Ergebnis, daß die Lorentzsche Theorie sich den Tatsachen am besten anzubequemen scheine.

Die Herausgabe haben die Herren J. Blondin und E. Néculcéa besorgt.

Berlin. E. Jahnke.

E. Mach. Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. Vierte Auflage. Leipzig 1901, F. A. Brockhaus.

Von dem bedeutenden Werk des geistvollen Wiener Naturforschers ist die vierte Auflage erschienen. Neue den Gegenstand betreffende Arbeiten, sowie vorgebrachte Einwürfe wurden in besonderen zum Teil umfangreichen Einschaltungen berücksichtigt.

Wie ein roter Faden zieht sich durch das Werk die Vorstellung von der Ökonomie in der Wissenschaft, von der Ökonomie des Denkens. Gerade der Mathematiker wird diesem Gedanken lebhaft zustimmen. Geht doch die moderne Entwicklung der Mathematik darauf aus, Übertragungsprinzipien, Verwandschaftsprinzipien aufzufinden, welche gestatten den unerschöpflichen Reichtum an Gleichungen und Beziehungen in wenige Formeln zu kondensieren. Ähnliche Gedanken waren es auch, welche Hermann Graßmann den gewaltigen Plan fassen ließen, eine die exakten Wissenschaften umfassende Ausdehnungslehre zu schaffen: Eine und dieselbe Graßmannsche Formel führt, je nachdem sie durch die Brille der Geometrie, der Kinematik, der Dynamik, der Elastizität, der Optik, der Elektrizität u. s. w. betrachtet wird, zu Sätzen und Beziehungen der Zweigwissenschaften.

Interessant ist es auch an der Hand der vorliegenden Darstellung zu beobachten, wie die Mechanik in ihren Anfängen durchaus den Namen einer *technischen Mechanik* verdient, wie sie sich aber allmählich unter dem Einflusse von Newton und Lagrange in eine *astronomische* umwandelt, eine Beobachtung, die um so interessanter ist, als die augenblickliche Entwicklung voraussichtlich wieder zu einer Betonung der technischen Seite führen dürfte.

Berlin. E. Jahnke.

A. Föppl. Die Mechanik im neunzehnten Jahrhundert. München 1902, E. Reinhardt.

In einem akademischen Festvortrag schildert der Redner in kurzen Zügen die Fortschritte, welche die Entwicklung der Mechanik im neunzehnten Jahrhundert aufzuweisen hat. Er weist darauf hin, daß sich die Mechanik eines Erfolges ersten Ranges nicht rühmen kann. „Was bei ihr geleistet wurde, verdankt man nicht glücklichen Funden und glanzvollen Entdeckungen, sondern einer unermüdlichen wissenschaftlichen Kleinarbeit, die einerseits auf eine bessere Begründung und Befestigung des von früher her übernommenen Lehrgebäudes, andererseits auf den stetigen weiteren Ausbau und auf die Nutzbarmachung dieses Besitzes gerichtet war". Insbesondere mußte der rein *astronomische* Charakter, welchen die Mechanik während des achtzehnten Jahrhunderts angenommen hatte, einer mehr *technischen* Richtung Platz machen.

Zum Schluß erörtert der Redner den Einfluß, welchen die Mechanik auf alle anderen Naturwissenschaften und selbst die Philosophie ausgeübt hat.

Berlin. E. Jahnke

Bernhard Sellenthin. Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. Auf Veranlassung der Kaiserl. Inspektion des Bildungswesens der Marine. Leipzig 1902, B. G. Teubner. XI u. 450 S.

Der Verfasser hat in geschickter Weise die Aufgabe, in die Mathematik und zugleich in die elementare Schiffahrtskunde einzuführen, dadurch gelöst, daß er den abgeleiteten mathematischen Sätzen sofort nautische Übungen folgen läßt. Man gelangt so unmerklich zur Kenntnis einer großen Zahl von Begriffen, die in der Schiffahrtskunde eine Rolle spielen. Bei dem

heutigen Bestreben, auch die Nautik in den Kreis des Unterrichts zu ziehen, wird mancher Lehrer das Buch mit großem Interesse lesen. Man kann aus ihm vielen Übungsstoff schöpfen. Behandelt werden in den fünf Abschnitten: Algebra, Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie, sphärische Trigonometrie, und zwar das Mathematische in der gewöhnlichen Weise. Die beiden letzten Abschnitte enthalten in ihren Anwendungen die Grundbegriffe der Astronomie. Auch die Merkatorprojektion wird besprochen. Hierbei muß ich auf einen Fehler eingehen, der sich S. 329 befindet. Der Verf. projiziert die Kugeloberfläche vom Mittelpunkt auf den Cylinder, der den Äquator berührt. Das Bild auf dem Cylinder ist nicht konform; es ist zu sehr auseinandergezerrt in Richtung der Achse, deshalb muß man die Abstände zum Äquator zu verkleinern. Im Buch steht vergrößern. Die Mängel, die ich sonst noch gefunden habe, sind geringfügig und nur äußerlicher Natur, sie lassen sich auch bei der zweiten Auflage sicher vermeiden. Der Verf. erläutert z. B. die Addition und Subtraktion, indem er die Zahlen als Strecken darstellt. Das führt ihn bei der Multiplikation nur zu dem einen Fall: daß eine Strecke a mal genommen wird. Nachher gibt er aber an, aus dem von ihm aufgestellten Begriff der Multiplikation folge die Regel $ab = ba$. Es kommen auch wiederholt schiefe und ungewöhnliche Ausdrücke vor, z. B. durch einander dividieren, durch mehrere Zahlen dividieren, b/a gelesen als b in a, algebraische Zahl statt relative Zahl u. s. w. Ferner rechnet der Verf. in der sphärischen Trigonometrie noch durchweg mit sec und cosec, während doch die meisten Lehrbücher der Mathematik und auch das Buch von Bolte [Nautik] diese beiden Funktionen längst über Bord geworfen haben. Auch könnte manches kürzer gefaßt werden, z. B. der Satz vom Nebenwinkel. — Doch, wie gesagt, diese Ausstellungen beeinträchtigen nicht den Wert des Buches, und wenn der Verf. eine Reihe der neueren Lehrbücher mit seinem Buch in Bezug auf Ausdruck und Bezeichnung verglichen haben wird, wird er später die gerügten Mängel vermeiden.

Dortmund. H. Kühne.

G. Mahler. Physikalische Formelsammlung. Leipzig, Göschen 1901. (Sammlung Göschen No. 136) 202 S. 80 Pf.

In dem kleinen Werke sind nicht nur die Formeln der Physik ungefähr in dem Umfange, wie sie auf dem Gymnasium durchgenommen zu werden pflegen, aufgestellt, sondern die meisten sind auch und zwar in klarer, leicht verständlicher Weise abgeleitet. Bei einigen wenigen, z. B. dem Minimum der Ablenkung eines Lichtstrahles durch das Prisma, würde der Referent bei einer zweiten Auflage die Ableitung noch hinzugefügt wünschen. Bei den einzelnen Größen ist stets die Dimension derselben angegeben, bez. abgeleitet. Für Repetitionen ist das Buch recht zu empfehlen.

Chemnitz. H. Willgrod.

G. Rost. Theorie der Riemannschen Thetafunktion. Leipzig 1901, B. G. Teubner. IV u. 66 S. 4°.

Die in der Überschrift genannte, mit Fachkenntnis geschriebene Monographie stellt sich eine doppelte Aufgabe. Erstens sollen die fundamentalen

Sätze über die Riemannschen Thetafunktionen im Vereine mit den entsprechenden Sätzen aus der Theorie der algebraischen Funktionen im Zusammenhang dargestellt werden, wobei es nicht umgangen werden kann, schon Bekanntes, wenn auch teilweise in neuer Form, wieder abzuleiten. Zweitens, und das ist als die Hauptaufgabe zu bezeichnen, welche die erste als naturgemäße Konsequenz mit sich führt, sollen einige Lücken ausgefüllt werden, die sich in den bisherigen Arbeiten finden. Diese Lücken beziehen sich auf die Betrachtung spezieller Punktsysteme e und zwar auf solche, für welche:

$$\vartheta\left(\!\left(u^{(z)}+e\right)\!\right)$$

in der Fläche T' durchweg mit Null zusammenfällt. Dabei ist unter T' diejenige einfach zusammenhängende Fläche verstanden, die aus der entsprechenden Riemannschen Fläche T mit Hilfe passend gewählter Querschnittssysteme entstanden ist. Es werden vor allem die Darstellungen dieser Konstantensysteme durch u-Summen von beliebiger Gliederzahl untersucht.

Dresden. M. Krause.

Hermann Schubert. Niedere Analysis. Erster Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. (Sammlung Schubert V.) Leipzig 1902, Göschen.

Das Buch gibt von den im Titel genannten Disziplinen eine klare, leichtverständliche Darstellung. Es ist für Primaner höherer Lehranstalten bestimmt, bietet aber mehr (in der Wahrscheinlichkeitsrechnung z. B. „Force majeure-Probleme“, „Ursachen-Probleme“, „Glaubwürdigkeits-Probleme“, unter den diophantischen Gleichungen auch solche zweiten Grades, die einer mehr elementaren Behandlung zugänglich sind), als in der Prima im allgemeinen durchgearbeitet zu werden pflegt. Während der vorliegende Teil es im wesentlichen mit rationalen Zahlen zu tun hat, sollen im angekündigten zweiten Teile das Irrationale und im Zusammenhang damit das Veränderliche die Hauptrolle spielen.

Berlin. C. Färber.

O. Dziobek. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweiter Teil. Analytische Geometrie des Raumes. 314 S. 8⁰. Braunschweig 1902. Mk. 6.

Der erste Teil dieses Lehrbuches hat vielfache Anerkennung gefunden, und seine Vorzüge sind auch in dieser Zeitschrift (Bd. 2, S. 205) gewürdigt worden. Im vorliegenden zweiten Teile sind die Gesichtspunkte und die Darstellung des Verfassers dieselben geblieben. Recht erfreulich ist wiederum die breite Ausführung der Grundlagen (die Figuren könnten freilich gerade hier plastischer sein) und die übersichtliche Anordnung der vom Studierenden häufiger gebrauchten Methoden und Formeln. Die Geometrie der geraden Linie umfaßt allein 48 Seiten; außer den allgemein üblichen Entwicklungen werden hier nämlich die Plückerschen Koordinaten und die Komplexe ersten Grades (Nullsystem) im engen Anschluß an die Mechanik vorgetragen. Die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades wird durch ein numerisches Beispiel illustriert und durch eine gute Übersicht der möglichen Fälle erleichtert. Die Frage nach den berührenden geraden Kreiskegeln leitet eine

ausgedehnte Behandlung der konfokalen Flächen ein. Den Schluß bildet eine kurze Übersicht über die projektiven Erzeugungsweisen der Flächen und Raumkurven.

Referent möchte freilich glauben, daß ein so weites Gebiet ein umfangreicheres Buch erfordert hätte. Darauf mußte der Verfasser wohl aus äußeren Rücksichten verzichten, und man kann sich daher nicht wundern, daß häufig flüchtige und dem Studierenden vielleicht wenigsagende Andeutungen an die Stelle der Ausführung treten mußten, und daß manche Theorie da abgebrochen werden mußte, wo die schönsten Früchte noch zu ernten sind. Möchte das Buch viele Leser finden, die nachher zu höheren Quellen aufsteigen.

Berlin. Richard Müller.

Siegmund Günther. Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im neunzehnten Jahrhundert. Berlin 1901, Georg Bondi.

Wenn die rührige Verlagsbuchhandlung, die das Bild des neunzehnten Jahrhunderts in Einzeldarstellungen von einer Reihe namhafter Schriftsteller zeichnen läßt, die Geschichte der Wissenschaften, die dem Jahrhundert seinen Namen gegeben haben, der Naturwissenschaften und insbesondere der nicht biologischen unter ihnen, einen einzigen Gelehrten zu schreiben beauftragen mußte, so konnte keiner gefunden werden, der, wie der Verfasser, auf so vielen Gebieten sich zu Hause fühlt, so viel Einzelkenntnisse gesammelt hat. Dennoch möchten wir nach eingehender Lektüre desselben fast glauben, daß gerade die Summe der Einzelheiten, die in diesem Buche aufgehäuft ist, der Klarheit des Gesamtbildes nicht gerade förderlich gewesen ist. Das Buch soll doch wohl den Laien, die sich über den Entwickelungsgang einer der gewaltigen Entdeckungen des Jahrhunderts unterrichten wollen, die Möglichkeit geben, dies auch ohne eingehendes Vorstudium zu erfahren. Wir fürchten indessen, daß dieselben, erschreckt von der Fülle des auf einer Seite des Buches zusammengedrängten Materials und der Menge der Forschernamen, die ihnen begegnen, sehr bald von diesem Versuche abstehen werden. Es sind auf den 943 Seiten, welche das Buch umfaßt, nicht weniger als 3400 Namen citiert, wie das Register ausweist, und davon kommen einige gegen 40 Male vor. Dennoch wird für denjenigen, der auf dem Gebiete der exakten Wissenschaften kein Fremdling ist, das Buch sich als Nachschlagebuch ausgezeichnet bewähren. Hoffentlich ist dieser Leserkreis groß genug, um dem Buche die Verbreitung zu sichern, die wir ihm wünschen. Für die Leser des Archivs ist das 3. Kapitel, welches die „Mathematik im 19. Jahrhundert" als das Instrument der Naturwissenschaften behandelt, trotz seiner im Hinblicke auf den Gegenstand des Buches verständlichen Kürze nicht ohne Wert. Freilich unterschätzt der Verfasser die Bedeutung einzelner Zweige der Mathematik für die Naturwissenschaften. Dahin rechnet er die Untersuchungen über den Geltungsbereich der unendlichen Reihen, während er doch selber sechs Seiten später die Behauptung aufstellt, daß die Integration der Differentialgleichungen sich „i m m e r mit einer die Bedürfnisse des Fragestellers deckenden Genauigkeit durch eine Reihenentwickelung erzwingen läßt". Wenn dies richtig wäre, wie es z. B. für das Dreikörperproblem leider noch lange nicht gilt, so wüßte man sicher den Geltungsbereich dieser Reihen festzustellen, um aus ihnen Schlüsse zu ziehen. Die

Wichtigkeit solcher Präliminarien erhellt aus den Untersuchungen von Poincaré über eben jenes Problem. Deshalb sind auch die Untersuchungen über die Stabilität des Planetensystems und insbesondere diejenigen über die Konstanz der großen Achsen (S. 100) noch keineswegs zu einem befriedigenden Ende geführt, worauf schon Jacobi aufmerksam gemacht hat. Bei der Aufzählung der Mathematiker am Anfange des Jahrhunderts ist J. F. Pfaff, der wohlverdiente Lehrer eines Gauß, ausgelassen. Im übrigen wird die Darstellung den großen mathematischen Entdeckungen dieses Jahrhunderts — Lagranges Mechanik (1. Aufl. 1788) gehört hier freilich nicht mehr her — durchaus gerecht, soweit dieselben auf die Naturwissenschaften von Einfluß gewesen sind.

Charlottenburg. H. Samter.

Krisch. Astronomisches Lexikon. Auf Grundlage der neuesten Forschungen besonders der Ergebnisse der Spektralanalyse und der Himmelsphotographie. VI u. 629 S. Mit 327 Abbildungen. Wien 1902, A. Hartleben. Preis 10 Mk.

Will man die Fortschritte, die das Wissen vom Himmel in den letzten Jahrzehnten gemacht hat, sich handgreiflich machen, so kann man nichts Besseres tun, als dieses Buch mit einem ähnlichen vor 1850 erschienenen Werke vergleichen. Der Referent holte also aus der verstaubtesten Ecke seines Bücherbrettes Nürnbergers populäres astronomisches Handwörterbuch hervor, ein für seine Zeit recht gutes, etwas geschwätziges Buch von 1800 Seiten. Damals war die Himmelskunde im wesentlichen Astrometrie. Die physikalische Natur der Himmelskörper war, obgleich Fraunhofersche Fernröhre eine Reihe feiner Details auf ihnen gezeigt hatten, ein Buch mit sieben Siegeln. Erst seit der Erfindung der Spektralanalyse und der Verfeinerung der photographischen Technik (die erste Sonnenfinsternisaufnahme wurde 1851 gemacht) wurde die Astrophysik als neue Provinz an die Astronomie angegliedert. Welche Ausdehnung das annektierte Gebiet inzwischen angenommen hat, zeigt das vorliegende Buch fast auf jeder Seite. Außer einer zusammenfassenden Darstellung der Photographie des Himmels und der Spektralforschung, die durch viele schöne Abbildungen erläutert werden, finden wir bei den einzelnen Objekten, insbesondere der Sonne, den neuesten Standpunkt der Wissenschaft durch die Tatsachen und durch Bilder erläutert. Dabei kommen die Zweige der älteren Astronomie keineswegs zu kurz und werden in einer für Laien, für die doch das Buch bestimmt ist, recht eingehenden Weise besprochen. So sind die astronomischen Instrumente und die Art ihrer Benutzung ausführlich behandelt. Um recht wenig bei den Lesern vorauszusetzen, hat der Verfasser sogar einen Abriß der ebenen und der sphärischen Trigonometrie und zur Kontrolle der durchgeführten Rechnungen eine Tabelle der vierstelligen Werte der Funktionen aufgenommen. Dabei kann man mit Hilfe des Buches ziemlich tief in die rechnende Astronomie des Himmels eindringen: das zeigen z. B. das Keplersche Problem, die Bestimmung der Finsternisse und Newtons Ableitung der Gravitation. Für die Störungen hat der Verfasser die geometrischen Sätze nach Airy zusammengestellt, freilich ohne Beweise, die auch den Umfang des Buches zu sehr vermehrt hätten. Für einige Anhänge, die die Elemente der Planeten und Kometen wiedergeben, werden viele Leser dankbar sein. Irrtümer sind uns

nicht begegnet, außer daß der Verfasser einige verstorbene Astronomen nicht bereits als solche aufführt. Dem Referenten erweist er zu viel Ehre, indem er ihm die Eastonsche Auffassung über die allgemeine Gestalt der Milchstraße zuschreibt.

Charlottenburg. H. Samter.

Galileo Ferraris. Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Leipzig 1901, B. G. Teubner. 358 S. 12 Mk.

Die Vorlesungen des früh verstorbenen Galileo Ferraris, der seinen Namen dauernd mit der wissenschaftlichen Technik verknüpft hat und der in Fachkreisen besonders durch seine grundlegenden Arbeiten über mehrphasige Wechselströme bekannt geworden ist, haben an Herrn Leo Finzi einen liebevollen Bearbeiter gefunden. Die vorliegende deutsche Ausgabe zeugt von musterhafter Sorgfalt in der Darstellung überhaupt, wie in der Klarheit und Bestimmtheit des Ausdruckes, und deutsche Leser werden dafür Dank wissen, daß ihnen die Vorlesungen des hochgeschätzten Elektrikers in so würdiger Form geboten werden.

Zweck und Ziel des Werkes sind durch den Titel hinreichend gekennzeichnet. Es will die physikalischen Grundlagen zu rationeller Arbeit in der Elektrotechnik bieten, ähnlich wie das vor einigen Jahren erschienene Buch von Benischke; es ist aber beträchtlich umfangreicher als dieses, holt weiter aus und kann auch näher auf manche Einzelheiten eingehen, die dem praktischen Bedürfnisse zunächst noch ferner liegen. Wie dankenswert und nützlich immer die einheitliche geschlossene Behandlung eines größeren Gebietes durch einen bedeutenden Fachmann sein wird, und zwar nicht nur für Lernende, braucht hier nicht erörtert zu werden. Die Elektrotechnik im besondern hat nach ihrer stürmischen Entwicklung allen Anlaß, solche abgeklärten Darstellungen willkommen zu heißen. Nicht überflüssig aber erscheint es, einige Worte über die zum Studium des Buches erforderlichen Vorkenntnisse zu sagen. Es macht von der höheren Analysis nur einen bescheidenen, nicht über das Bedürfnis hinausgehenden Gebrauch; um so mehr aber muß betont werden, daß eine lebendige Einsicht in die physikalischen Erscheinungen, die hier nach Zahl und Maß behandelt werden, vorausgesetzt werden muß, wenn der Leser einen rechten Nutzen von der schönen Darstellung haben soll. Es würde einen Mißbrauch bedeuten, wenn man das Buch zur ersten Einführung in die Elektrizitätslehre benutzen wollte. Für solche sehr eleganten, sehr einfachen, aber auch abstrakten Entwicklungen, wie sie beispielsweise das erste Kapitel bringt, hat nur *der* Leser Verständnis, der aus der Kenntnis der wesentlichen konkreten Fälle eine abstrakte Darstellung als die höhere und umfassendere zu empfinden vermag.

Vielleicht wird der Standpunkt des Buches durch Gegenüberstellung verschiedener Behandlungsweisen desselben Gegenstandes am besten erläutert. Es wird wohl nicht bestritten werden, daß gerade die wichtigsten Gesetze zunächst zweckmäßig möglichst unmittelbar und möglichst einfach abgeleitet werden sollten. Denn erst das Bewußtsein, das Gesetz auf kürzestem Wege auf Grunderscheinungen zurückführen zu können, gibt das Empfinden gesicherten Besitzes. Nun läßt sich beispielsweise das Gesetz der Feldstärke langer Solenoide ebenso einfach wie anschaulich unmittelbar aus dem Biot-Savartschen Gesetze gewinnen. Ausgehend von einem kurzen Solenoide

kann man zeigen, zweckmäßig unter Benutzung der Kraftlinienvorstellung, daß mit wachsender Länge die gesamte Kraftwirkung des Solenoides mehr und mehr in sein Inneres verlegt wird, daß gleichzeitig die Feldstärke in den Querschnittsteilen immer gleichmäßiger wird. Für ein genügend langes Solenoid ergibt dann der Arbeitsbegriff in Bezug auf den Einheitspol die bekannte Formel, ohne alle Rechnung. Ist auf diese Art das Gefühl für die physikalische Bedeutung der Formel geweckt, dann erst gewinnt solche Ableitung, wie sie der Verfasser gibt, ihren wirklichen Wert. Er geht nämlich in bekannter Weise aus von der Äquivalenz magnetischer Schalen mit elementaren Kreisströmen und gelangt durch die übliche Vorstellung der Schichtung vieler Schalen zu der gesuchten Formel. Auf der zweiten Stufe der Erkenntnis ist nunmehr allerdings die Wahrnehmung des Zusammenhanges der von verschiedenen Grundlagen ausgehenden Begriffe besonders wertvoll. Beiläufig sei übrigens bemerkt, daß die zweite Art der Ableitung nicht etwa durch größere Strenge grundsätzlich überlegen ist. Vielmehr bereitet der überzeugende Nachweis der Äquivalenz ausgedehnter Kreisströme mit magnetischen Schalen Schwierigkeiten, die nicht immer genügend gewürdigt werden.

Gleicherweise mit Rücksicht auf die zahlreichen Studierenden, die zu dem Werke Ferraris' greifen werden, wie ihnen auch nicht genug empfohlen werden kann, möge hier eine Bemerkung eingeschoben sein über die Rolle der Vektorenrechnung, deren Grundbegriffe das erste Kapitel einleiten. Diese Grundbegriffe sind ja in der Elektrizitätslehre auch kaum mehr zu entbehren, und die Vektorenrechnung wird zur quantitativen Behandlung der komplizierteren Erscheinungen naturgemäß mehr und mehr Eingang finden. Nur muß gesagt werden, daß weder diese noch sonst eine formale Behandlungsmethode unmittelbar eine neue Einsicht in das physikalische Wesen der Erscheinungen geben kann, damit nicht der noch Unkundige versäume, sich zunächst über die einfachsten Erscheinungen gründlich klar zu werden.

In der Einteilung des Stoffes folgt das Buch dem üblichen Gange, indem zunächst die Elektrostatik, der elektrische Strom, Magnetismus und Elektromagnetismus behandelt sind, darauf die periodisch veränderlichen Ströme, endlich die elektromagnetischen Schwingungen.

Im ersten Kapitel werden nach der schon erwähnten Einleitung in die Vektormethode die rein mechanischen Begriffe Kraftfluß, Potential, die Sätze von Stokes, Green, Gauß u. s. w. erläutert. Die Mitteilungen aus der Elektrostatik im folgenden Kapitel sind im wesentlichen bestimmt durch das Ziel des Buches und gipfeln deshalb in der Behandlung der Kondensatoren. Der Abschnitt vom elektrischen Strom bringt wie üblich das Ohmsche Gesetz, die Stromverzweigung, elektrische Arbeit, und gibt am Schlusse einiges aus der Elektrolyse.

Daß die Abschnitte über Magnetismus und Elektromagnetismus den verhältnismäßig größten Raum des Buches einnehmen, erklärt sich ebenso aus seiner Bestimmung. Bei dem immerhin beschränkten Umfange des ganzen Buches (350 Seiten) können natürlich keine Sonderfälle behandelt werden, wie sie die physikalische und technische Praxis bietet. Dafür sind aber, wie in allen Teilen des Buches, die Grundlagen mit großer Sorgfalt entwickelt und mit ebenso großer Klarheit dargestellt. Die Behandlungsweise könnte übrigens wieder die Frage anregen, woher es wohl komme,

ıß die Faraday-Maxwellsche Kraftlinienmethode mehr bei den germa-
ischen Völkern, wie es scheint, als bei den romanischen in Aufnahme ge-
ommen ist. Der Autor benutzt diese Methode wohl, aber doch eigentlich
ır als einleitendes Mittel zur Veranschaulichung, während sie bei uns und
sonders in England doch schon den Charakter einer quantitativen Methode
ıgenommen hat. Die Sache selbst gewinnt natürlich durch verschieden-
tige Behandlung, und der einseitigen Herrschaft einer Methode soll gewiß
cht das Wort geredet werden. Aber für die praktischen Sonderfälle er-
eist sich doch die Kraftlinienmethode so zweckmäßig, daß man gerade in
m vorliegenden Buche einen Beitrag zu ihrem weiteren quantitativen
usbau, dessen sie noch sehr bedürftig ist, gewünscht hätte. Der vor-
iegend analytischen Behandlungsweise wie auch der ganzen Anlage des
uches entsprechend, werden auch Analogien zur Erläuterung nur selten
erangezogen, und deshalb sei zu den einheitlichen und durchsichtigen Ent-
icklungen über veränderliche Ströme nochmals bemerkt, daß zu ihrem
irklichen Verständnis und zu ihrer verdienten Würdigung eine anschauliche
orstellung der physikalischen Tatsachen vorher gewonnen sein muß.

Das letzte Kapitel über elektromagnetische Schwingungen enthält die
Maxwellsche Lichttheorie, die Hertzschen Versuche und die Wanderung
ler Energie nach der Auffassung von Poynting. Ein großer Teil des
ier Mitgeteilten hat ja nun auch schon praktische Bedeutung erlangt, und
wegen der noch nicht häufigen übersichtlichen Behandlung dieser Gebiete
nöchte von manchem der letzte Teil des Buches am meisten geschätzt
erden, selbst wenn er nicht unbedingt den Ansichten des Autors bei-
flichten kann. Namentlich das Verhältnis der Modelle und Analogien zu
n Gleichungen von Maxwell und Hertz wird nicht allgemein im Sinne
s Autors aufgefaßt werden, und sein Ausspruch „eine Theorie ist um so
hrscheinlicher, je abstrakter sie ist“ wird in dieser Form wohl berechtigten
iderspruch finden.

Berlin. A. Rotth.

Föppl. Graphische Statik. (Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. II.) Leipzig 1900, B. G. Teubner. 8°. 452 S. 166 Figuren im Text.

„Mit diesem Bande gelangt das ganze Werk, das vor drei Jahren mit
r Veröffentlichung des dritten Bandes begonnnen wurde, zum Abschlusse . . .
an darf bei der Beurteilung des Werkes nach dieser Richtung hin [Auswahl
s Stoffes und Darstellungsweise] nicht vergessen, daß es sich um Vor-
ungen über technische Mechanik handelt, die nur in etwas erweiterter
rm veröffentlicht wurden. Weitergehende Ausführungen . . . darf man
Vorlesungen, die für Studierende der ersten vier Semester gehalten
rden, nicht erwarten.“ (Aus der Vorrede zu dem vorliegenden Bande.)

Erster Abschnitt. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte am
teriellen Punkt und in der Ebene.

Nachdem in § 1 und 2 Zusammensetzung und Zerlegung der an
nem Punkte angreifenden Kräfte zugleich für Ebene und Raum behandelt
nd, geht der Verfasser in § 3 unmittelbar zum Cremonaschen Kräfte-
lan über. Diese Anordnung ist für ein Lehrbuch aus didaktischen
ücksichten als eine sehr glückliche zu betrachten. Der Kräfteplan führt
en Lernenden unmittelbar in mediam rem und gibt ihm eine Vorahnung

von der umfassenden Tragweite des graphischen Verfahrens; durch die Behandlung reizvoller praktischer Beispiele wird das Interesse geweckt, zugleich schärft sich das Verständnis für die geometrische Summierung der Kräfte, die trotz ihrer prinzipiellen Einfachheit dem Hörer vielfach nicht geläufig ist und gleich zu Anfang nicht gründlich genug betrieben und geübt werden kann. Auch vom mathematischen Gesichtspunkte aus ist die rein algebraische Kräftezerlegung und Zusammensetzung einfacher als die graphischen Integrationsverfahren, die sich als wichtige Anwendungen unmittelbar an die Theorie des Seilpolygons anzuschließen pflegen.

Die Behandlung des Kräfteplanes ist relativ ausführlich, aber nach Ansicht des Referenten zu theoretisch. Die Kriterien für Zug und Druckspannung, die erfahrungsgemäß dem Anfänger große Schwierigkeiten machen, ferner der Umfahrungssinn an Knotenpunkten und Gurtungen (um die richtige Anordnung der Stabspannungen und äußeren Kräfte zu finden) sind viel zu knapp oder gar nicht erörtert, während der ausführliche Existenzbeweis des reziproken Planes an dieser Stelle noch kaum verstanden werden dürfte.

§ 7 bringt die Zusammensetzung von Kräften in der Ebene ohne Seilpolygon, § 8 Zerlegung einer Kraft nach drei Richtungen nach Culmanns Verfahren und der Ritterschen Momentenmethode. Im Interesse der Selbständigkeit des Werkes dürfte es liegen, den Begriff des statischen Momentes zu erläutern und die Momentensätze, die hier benutzt werden, graphisch herzuleiten, statt auf die anderen Bände zu verweisen.

In § 9 finden wir die Rittersche Methode auf Fachwerke mit Grundfigur, speziell den Polonceau-Dachstuhl, angewandt. Unter den Aufgaben wird ein ähnliches Beispiel durch Zergliederung des Fachwerks in einzelne Scheiben gelöst. Dieses letztere Verfahren hätte vielleicht besser im Text Aufnahme gefunden.

Der zweite Abschnitt ist dem Seileck gewidmet und beginnt mit der Zusammensetzung von zwei Kräften (§ 10). Über den Fall von n Kräften wird unseres Erachtens zu flüchtig hinweggegangen; allerdings findet der Lernende in den Beispielen genügend Gelegenheit, sich auch diesen klar zu machen. Die Gerade, auf der sich zwei Seilpolygone schneiden, kommt in § 11, wieder nur für den Fall zweier Kräfte, zur Betrachtung. An dem Beweis ist folgendes auszusetzen: Er stützt sich, wie üblich, auf den Satz: „*Laufen in zwei vollständigen Vierecken fünf Paar Seiten parallel, so trifft dies auch für das letzte Paar zu.*“ Die Fassung dieses Satzes ist unvollständig, wie die nebenstehende Figur zeigt. Eine präzise Formulierung verlangt ausführlichere Betrachtung derartiger Vierecke. Will man dieselbe vermeiden, so kann man den Satz über die Achse zweier Seilecke graphostatisch herleiten. Das wäre hier jedenfalls das natürlichste; denn Herr Föppl hat den beanstandeten Viereckssatz durch eine statische Betrachtung bewiesen, kann ihn also direkt ausschalten. Eine Schwierigkeit würde sich dabei herausstellen: Der rein graphostatische Beweis für den Satz von der Achse zweier Seilecke wird nämlich dann am elegantesten, wenn man in jedem Seilstrahl zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte sieht. Dies tut aber Herr Föppl nur mit dem ersten Seilstrahl, während er die analoge Auffassung für die andern Seilstrahlen ausdrücklich verwirft. Meines Wissens ist die Auffassung des Seilecks als eines wirklichen Gelenkpolygons so allgemein

gangbar, daß sie nicht ignoriert werden darf, selbst wenn der Verfasser ihr eine andere vorzieht.

Es folgen: § 12, Zerlegung paralleler Kräfte nach zwei Richtungslinien, § 13—15 Seilkurven, ihre Differentialgleichung und die Kettenlinie. Die Gelegenheit, an der Kettenlinie die ganze Eleganz der geometrischen Betrachtungsweise zu zeigen, hat sich der Verfasser entgehen lassen.

§ 16f, die Momentenfläche (in eleganter und präziser Darstellung) § 18—20 Ermittelung von Trägheitsmomenten, elastischen Linien und Flächeninhalten durch Seilpolygone. Es folgen 10 Aufgaben. Bei Aufgabe 15 ist die zweite Lösung nicht angenähert, sondern falsch. Sie darf nur zur Ermittelung des Durchhanges angewandt, die Spannung des Seiles dagegen nicht unter Vernachlässigung des Eigengewichtes bestimmt werden. Aufgabe 16 ist nur eine Wiederholung des Textes. Es könnte zum mindesten die Kurve untersucht werden, durch die in diesem einfachen Fall die Momentenfläche begrenzt wird.

Der dritte Abschnitt behandelt die Kräfte im Raum, und zwar das Kraftkreuz und das Kräftepaar in § 21—23. Die Auffassung des Kräftepaares als einer unendlich kleinen unendlich fernen Kraft bliebe besser ganz weg. Verfasser bespricht sie ohnehin sehr flüchtig.

Bei der Zusammensetzung von Kräftepaaren wird ein Parallelogramm in ein inhaltsgleiches verwandelt. Die hierbei angewandte planimetrische Konstruktion wird im Beweis gar nicht benutzt, ist also überflüssig. Der Verfasser hätte sie aber graphostatisch deuten und dadurch den Beweis eleganter gestalten können.

Als einer der besten Abschnitte darf § 24 gelten, der an der Hand der Kräftezerlegung die Eigenschaften des Nullsystems mit einer Durchsichtigkeit und dabei so elementar behandelt, wie es die synthetische Geometrie nicht vermag. Es folgen in § 25 Praktische Ausführung und spezielle Fälle der Zusammensetzung, z. B. bei hyperboloidischer Lage, in § 26 das Kraftkreuztetraeder, in § 27 die Zentralachse eines Kräftesystems, in § 28 analytische Behandlung.

Zu erwähnen ist, daß von allen diesen theoretischen Erörterungen in dem ganzen Werke keine Anwendung gemacht wird. Auf die Schursche Methode, den Kräfteplan mittelst eines Nullsystems zu konstruieren, wird zwar hingewiesen, aber mit dem Zusatz: „Für die praktische Anwendung, die auch ohne solche, theoretisch interessante, in der Ausführung aber schwerer zu übersehende Hülfsmittel leicht zum Ziel gelangt, wird aber damit nicht viel gewonnen.“ (S. 154.)

Man erwartet eine Anwendung der ganzen Betrachtungen auf die Zerlegung einer Kraft nach sechs Aktionslinien. Aber der hierauf bezügliche § 29 ist von einer erstaunlichen Lückenhaftigkeit und einer geradezu gefährlichen Unklarheit der Darstellung. Nachdem die analytische Lösung der Aufgabe skizziert und die notwendige und hinreichende Bedingung für das Unmöglichwerden der Zerlegung angeführt ist, heißt es: „Aus dieser analytischen Bedingung lassen sich alle möglichen Ausnahmefälle ableiten. Anstattdessen wollen wir uns auf einfacherem Wege Rechenschaft darüber geben, welche besonderen Fälle bei Annahme der sechs gegebenen Richtungslinien unter allen Umständen (!) vermieden werden müssen.“ (S. 169.) Hiernach erwartet der Leser zweifellos eine erschöpfende geometrische

Erledigung. Statt dessen aber bespricht der Verfasser drei banale Spezialfälle in ausführlicher Breite und schließt mit den Worten: „Überhaupt wird man aus dem weiter Folgenden erkennen, daß die wesentliche (!) Bedingung für den Ausnahmefall immer (!) darin besteht, daß man eine Gerade ziehen kann, die alle sechs Richtungslinien trifft.“ (S. 171.)

Wenn der Verfasser nicht auf graphostatischem Gebiet den Ruf einer Autorität genösse, müßte man nach diesem Passus annehmen, daß ihm die wesentliche Bedingung des Ausnahmefalles bei der Abfassung nicht gegenwärtig war, zumal sie ja mit den vorher entwickelten Hilfsmitteln in weniger Worten auszusprechen ist, als die hier angeführte falsche Bedingung.

Auch die Zerlegung selbst wird nur in wenigen, dazu überflüssig vereinfachten Fällen ausgeführt und für die allgemeine Lage ein zeichnerisch wie rechnerisch gleich unpraktisches Verfahren skizziert, bei dem unnötige und möglicherweise imaginäre Irrationalitäten auftreten. Dennoch beginnt der Abschnitt mit den anspruchsvollen Worten: „Wir wollen uns jetzt überlegen, auf welche Weise die Zerlegung, falls sie nach dem Vorhergehenden (!) überhaupt möglich ist, wirklich ausgeführt werden kann.“ (S. 171.)

Eine gründliche Umarbeitung des § 29 ist bei einer Neuauflage des Werkes unbedingt erforderlich.

Nach § 29 bringt der Verfasser in § 30 und in 5 Aufgaben spezielle Fälle zur Besprechung.

Abschnitt IV. (Das ebene Fachwerk) ist wieder von großer Vollständigkeit und Gleichmäßigkeit der Bearbeitung. § 31—33 bringen die Einleitungen über die notwendige Stabzahl, die Grundfigur und die Bildungsweisen des Fachwerks. Zur Berechnung der Grundfigur bringt § 34 das Stabvertauschungsverfahren, § 36 die Methode der senkrechten Geschwindigkeiten und als Beispiel das Sechseck mit Hauptdiagonalen. Dasselbe wird in § 35 nach der Methode der imaginären Gelenke behandelt. Von der zweiten möglichen sechsknotigen Grundfigur werden unter den Aufgaben zwei spezielle Fälle durchgeführt, davon einer vermittelst eines drei Stäbe treffenden Schnittes nach Culmanns Methode. § 37 bringt den analytischen Nachweis, daß stabile Fachwerke bei notwendiger Stabzahl statisch bestimmt sind nebst der bekannten Umkehrung, § 38 Fachwerkträger, § 39 Dreigelenkbogen. Folgen 6 Aufgaben. Zu bemerken ist noch, daß das Stabvertauschungsverfahren auffallenderweise als „Methode von Henneberg“ bezeichnet ist. Nach Hennebergs Methode wird ein dreifach angeschlossener Knotenpunkt nebst seinen drei Stäben entfernt; das dadurch beweglich gewordene Fachwerk wird wieder starr gemacht, indem *zwei derjenigen Knotenpunkte verbunden werden, an die der entfernte angeschlossen war.* Diese Methode ist also zwar als Stabvertauschung zu interpretieren, aber nur als eine spezielle.

Der fünfte Abschnitt (Das Fachwerk im Raume) bringt mit naturgemäß gebotener Einschränkung nach den unentbehrlichen allgemeinen Bemerkungen über die Zahl der notwendigen Stäbe und Auflagerbedingungen das Flechtwerk, in spezieller Ausführung als Schwedlerkuppel, Netzwerkkuppel, Tonnenflechtwerkdach, Krahngerüst und Leipziger Kuppel.

Im sechsten Abschnitt finden wir die elastischen Formänderungen statisch bestimmter Fachwerke nach der Methode von Maxwell-Mohr und der de

Verschiebungsplans sowie ihre Anwendung auf Berechnung der unbestimmten und Ausnahmefachwerke.

In Abschnitt VII findet sich ein Überblick über Theorie der Tonnen- und Kuppelgewölbe aus Mauerwerk und eine elegante graphische Behandlung der durchlaufenden Träger auf mehreren Stützen nebst Ableitung der Clapeyronschen Gleichung der 3 Momente aus der Konstruktion.

Nachdem ich die auf einzelne Abschnitte bezüglichen Bemerkungen bereits in die Übersicht des Inhaltes eingeflochten habe, bleibt mir noch einiges Allgemeine zu erwähnen.

Die Aufgaben sind mit Ausnahme der oben erwähnten Nr. 16 geschickt ausgewählt und trotz ihrer Beziehung zur Praxis einfach und schnell zu übersehen. Sie dürften einen Hauptvorzug des Buches bilden. Doch glaube ich, daß die Anfügung einiger größerer, vollständig durchgeführter Beispiele auf Tafeln, eventuell in Buntdruck, wie in Müller-Breslaus Graphischer Statik, angebracht wäre. Nicht für die Studenten, die das Buch an der Hand des im Kolleg Gehörten verfolgen, sondern für die Minderheit derjenigen, die nach dem Föpplschen Werk den Gegenstand selbständig erlernen wollen.

Die breite, ausführliche Schreibweise des Verfassers ist aus den andern Bänden bereits bekannt; für die vier letzten Abschnitte würde ich größerer Kürze den Vorzug geben. Zwar liest sich das Ganze auffallend leicht und klar; aber es liegt die Gefahr vor, daß man, der Mühe des eigenen Nachdenkens allzusehr überhoben, über prinzipielle Schwierigkeiten oberflächlich hinweggleitet. Wie dem auch sei, gerade hier urteilt der persönliche Geschmack souverän, und es ist schlechterdings unmöglich, es allen recht zu machen. Man möge daher die eingangs citierten Worte der Vorrede nicht vergessen, wenn man sich bemüht, den Absichten des Verfassers gerecht zu werden.

Durch seine zahlreichen allgemeinen Zwischenbemerkungen über die Vorzüge und das Wesen der verschiedenen Methoden bringt der Verfasser zwar in die Nüchternheit des Gegenstandes eine wohltuende Anregung, geht aber stellenweise über das Maß des als objektiv Anerkannten hinaus und teilt persönliche Ansichten mit, die — ob nun mehr oder weniger diskutabel — jedenfalls nur vor ein Forum von Fachgenossen gehören, dagegen in den Köpfen von Anfängern vorgefaßte Ansichten und daraus resultierende Vorurteile erzeugen. Hierzu rechne ich z. B. die oben citierte Äußerung über die Schursche Konstruktion des Kräfteplans.

Eine andere derartige Bemerkung, der ich überdies einen Sinn nicht abzugewinnen vermag, steht auf S. 112 f: „Gerade hierin, daß ein beliebig veränderliches Trägheitsmoment [des Balkenquerschnitts bei Ermittelung der elastischen Linie] dem graphischen Verfahren gar keine besonderen Schwierigkeiten macht, liegt gegenüber dem analytischen Verfahren, das in der unmittelbaren Integration der Differentialgleichung [$E\Theta\, d^2y\,/\,dx^2 = -M$] besteht, ein großer Vorzug."

Dies klingt gerade, als ob das graphische Verfahren etwas zu leisten vermöchte, was die Rechnung nicht kann. Tatsächlich aber läuft doch die Integration der Konstruktion völlig parallel, und welche Schwierigkeit ein veränderlicher Querschnitt gegenüber einem konstanten in die Rechnung bringen soll, ist total unerfindlich. Der Ausdruck „*unmittelbare* Integration",

in dem Referent keinen Sinn erkennen kann, ist wie geschaffen, um bei Anfängern weit verbreitete falsche Ansichten über das Wesen der Integration zu bestärken.

Eine besonders charakteristische Belegstelle möchte ich noch aus § 1 citieren. Nachdem der Verfasser die Entwicklung der analytischen Mechanik geschildert hat, fährt er fort: „Wie alle großen Bewegungen in der Wissenschaft schoß auch diese schließlich für längere Zeit über ein verständig gestecktes Ziel hinaus. . . . Zwar vermochte sich auch in jener Zeit wenigstens die Konstruktion des Kräfteparallelogramms zu behaupten. Selten genug mag es freilich wirklich im Maßstabe gezeichnet und zur unmittelbaren Ableitung eines fertigen Resultates gebraucht worden sein. . . . Erst die Techniker, die mit dem 19. Jahrhundert als ein wesentlich mitbestimmendes Element in den Kreis der wissenschaftlich Tätigen einzutreten begannen, haben hierin — wie in so vielen andern Dingen — Wandel geschaffen und sowohl die zeichnerische, wie die geometrische Behandlung der Mechanik wieder zu Ehren gebracht."

Die von Herrn Föppl angeführten Tatsachen lassen sich nun genau ebensogut als Argumente *gegen* seine Behauptung verwenden, daß nämlich die analytische Mechanik über das Ziel hinausgeschossen und für die geometrische Behandlungsweise schädlich gewesen sei: Infolge des Mangels an rein geometrischen Methoden, infolge ungenügender Genauigkeit des graphischen Rechnens für die astronomischen Probleme und infolge der Unmöglichkeit, die großen umfassenden Sätze anders als analytisch abzuleiten und auszusprechen[1]), hatte sich die analytische Methode in der, die Ergebnisse der Forschungen wiederspiegelnden Literatur die Vorherrschaft gesichert. Daß aber die Verwendung geometrischer Anschauung in der Forschung und Geistestätigkeit selbst verschmäht worden sei, dagegen spricht die Tatsache, daß ihr Hauptwerkzeug, das Kräfteparallelogramm, sich im Gebrauch erhielt. Vor allem spricht dagegen, daß die Schaffung neuer geometrischer Methoden (projektive Geometrie), neuer, für graphisches Rechnen geeigneter Probleme[2]) und neuer Arbeitskreise, die in Ermanglung tieferer mathematischer Vorbildung ein Bedürfnis nach geometrischen Methoden mitbrachten, daß diese ein sofortiges Aufleben der geometrischen Mechanik zur Folge hatten, und zwar unter Führung von Männern, deren Kenntnisse noch nach der analytischen Methode erworben waren.

Hiermit wollte ich zeigen, wie unübersichtlich und wenig geklärt die ganze Materie noch ist. Welche von den beiden gegenübergestellten Auffassungen richtig ist, ist hier gar nicht Gegenstand der Diskussion. Es handelt sich darum, daß vor Studierenden der ersten vier Semester solche Fragen überhaupt noch nicht aufgerollt, geschweige denn beantwortet werden sollen. In einer Zeit vollends, in der der angebliche Gegensatz zwischen Technik und Wissenschaft einen guten Teil seiner Nahrung aus Vorurteilen zieht, ist diese Art doppelt gefährlich, persönliche Ansichten über un-

---

1) Graph. Stat., Seite 4: „Für die Ableitung allgemein gültiger Sätze ist die Rechnung gewöhnlich im Vorteil."

2) Das Kräfteparallelogramm im Maßstab zu zeichnen, lag vor dem Auftreten technischer Probleme gar kein Bedürfnis vor, da die Genauigkeit unzureichend war.

abgeschlossene Fragen als historische Wahrheiten denen hinzustellen, die erst zum selbständigen Urteilen herangebildet werden sollen.

Da man absprechende Urteile meist ausführlicher zu begründen pflegt, als zustimmende, weil jene beim Verfasser leichter Widerspruch erwecken als diese, so nehmen die ersteren vielfach den größeren Raum eines Referates ein. So auch hier. Doch hat Referent nicht die Absicht, mit seinen Ausstellungen ein absprechendes Gesamturteil zu begründen; diese betrafen größere und kleinere Einzelheiten, die, ob nun mehr oder weniger leicht abzuändern, jedenfalls auf die Gesamtanlage nach Auswahl, Anordnung und Behandlung des Stoffes und darum auch auf ein abschließendes Urteil über das Werk keinen entscheidenden Einfluß haben. Die Föpplsche „Graphische Statik" ist eines der besten und der Auswahl des Stoffes nach das reichhaltigste unter den einleitenden Werken, die wir über dieses Gebiet zur Zeit besitzen.

Charlottenburg, im September 1902. GERHARD HESSENBERG.

Doehlemann, K. Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 85 Figuren. Leipzig 1901. Sammlung Göschen Nr. 72. 12⁰. 176 S. Preis 80 Pf.

Die Notwendigkeit einer Neuauflage beweist, daß das Büchlein in weiteren Kreisen eine günstige Aufnahme gefunden hat. In der Tat ist es durch eine anschauliche, oft treffende Vergleiche heranziehende Schreibweise, durch die zahlreichen, gut ausgeführten Figuren[1]) und das Absehen von einer strengen, für den Anfänger selten interessanten Darstellung zur ersten Einführung in den Gegenstand sehr geeignet. Für solche freilich, die etwas tiefer in den Gegenstand einzudringen streben, wie Mathematik-Studierende, dürfte der Standpunkt, den der Verfasser eingenommen hat, zu niedrig, die Ausdrucksweise wissenschaftlich zu wenig präzis, die Beweisführung zu wenig streng und der behandelte Stoff zu beschränkt sein.

Zur Orientierung über den Inhalt seien die Überschriften der sieben Abschnitte hergesetzt: 1. Die perspektive Beziehung der Grundgebilde, 2. Harmonische Gebilde, 3. Die projektive Beziehung der einförmigen Grundgebilde, 4. Die projektive Beziehung auf dem gleichen Träger, 5. Die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde erster Stufe, 6. Die Polarentheorie der Kegelschnitte, 7. Die Kegel- und Regelflächen zweiter Ordnung als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde.

Obgleich dem Verfasser jedenfalls nur ein sehr beschränkter Raum zu Gebote stand, so hätte er die metrischen Beziehungen bei Kegelschnitten, insbesondere die Brennpunkteigenschaften vielleicht doch nicht beiseite lassen und auch an früheren Stellen öfter auf den Zusammenhang mit der als bekannt vorauszusetzenden Elementargeometrie eingehen sollen. Gerade hierdurch wird dem Anfänger der Wert der neuen Betrachtungen vor Augen geführt. In der jetzigen Form erscheinen die 92 ersten Seiten fast nur als Vorbereitung für die Lehre von den Kegelschnitten, es tritt zu wenig

---

1) In dem mir vorliegenden Exemplare sind die Figuren 31, 32, 37 durch den Zweifarbendruck verunglückt.

das selbständige Interesse hervor, das diese Betrachtungen und Sätze verdienen. Der Satz z. B., daß die Gegeneckpaare eines vollständigen Vierseits aus einem Punkte durch Strahlenpaare einer Involution projiziert werden, sollte in keinem Buche über projektive Geometrie fehlen, weil aus diesem Fundamentalsatze eine große Menge metrischer Sätze über das Dreieck hervorgehen. Ferner wird der Anfänger die Ableitung der ihm bekannten Kegelschnittsätze aus den vorgetragenen Lehren vermissen.

Unter den angeführten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, welche die projektive Geometrie behandeln, vermisse ich das erste Werk dieser Art von W. Fiedler, unter den Lehrbüchern der projektiven Geometrie das von Em. Weyr.

Auf S. 70 sind einige Kommata durch Punkte, als Zeichen der Multiplikation, zu ersetzen.

Wien, im Dezember 1902. E. Müller.

Haussner, R. Darstellende Geometrie. Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Mit 100 Figuren im Text. Leipzig 1902. Sammlung Göschen Nr. 142. 12°. 192 S. Preis 80 Pf.

Nach dem in der Einleitung (S. 18) ausgesprochenen Plane des Verfassers soll die darstellende Geometrie in drei Bändchen ziemlich vollständig zur Behandlung kommen. Wir haben also in dem vorliegenden Bändchen den ersten Teil eines kurz gefaßten, aber systematischen Lehrbuches der darstellenden Geometrie vor uns, worin die Darstellung von Punkten, Geraden, Ebenen und ebenflächigen Gebilden und die Lösung der wichtigsten Aufgaben über sie (inklusive Durchdringung ebenflächiger Körper) klar besprochen und durch zahlreiche, gut ausgeführte Figuren erläutert werden. Außerdem ist ein Abschnitt der schiefen Projektion gewidmet.

Nach dem Muster von Rohn-Papperitz behandet der Verfasser im ersten Abschnitt die allgemeine Parallelprojektion ebener Gebilde und schließt daran die Eigenschaften ihrer Affinität, die dann zur Ableitung von Ellipsen-Eigenschaften und Konstruktionen Verwendung finden. Über die pädagogische Zweckmäßigkeit dieses Vorganges sind die Meinungen geteilt; daß aber der Verfasser im I. Abschnitte die schiefe Projektion ziemlich ausführlich erläutert und erst im III. Abschnitt (auf S. 62!) zur orthogonalen Projektion übergeht, dürfte wohl nur bei wenigen Zustimmung finden. Der Behandlung des Dreikants scheint mir für dieses Büchlein zu viel Raum (16 S.) gewidmet zu sein.

Von Unkorrektheiten, die mir beim Durchlesen aufgefallen sind, möchte ich anführen:

S. 25. Der Satz am Ende von Nr. 12 gehört noch nicht hierher, da erst in der nächsten Nummer definiert wird, was man unter perspektiv-affinen Systemen derselben Ebene versteht.

S. 51. Daß die Werte $\delta > 180^0$ selten gebraucht werden, ist nicht richtig. Einzelheiten von Gesimsen und Dachstühlen zeichnet man meist in Untersicht.

S. 58. Die auf die Figuren 24a und 24b sich beziehenden Bemerkungen über die wahren Umrisse des geraden Kreiskegels und Kreiscylinders müssen

korrigiert werden. Die Ebene der beiden Umrißerzeugenden steht *nicht* zur Richtung der Projektionsstrahlen senkrecht.

S. 66. Die Fußnote ist überflüssig, da in Fig. 27 der umgelegte Punkt nicht mit $\hat{P}$ bezeichnet ist.

S. 85. Die eingangs von Nr. 54 gemachte Bemerkung, daß man eine Ebene *gewöhnlich* durch ihre Spuren bestimme, paßt nur für die Theorie. Im technischen Zeichnen finden Spuren so gut wie keine Verwendung, worauf übrigens schon Klingenfeld 1851 hingewiesen hat.

Wenn auch das Büchlein wenig Eigenartiges aufweist, sich von anderen in Anlage und Stoffauswahl nur wenig unterscheidet, so muß jedoch hervorgehoben werden, daß es jedem Anfänger zur Einführung in den Gegenstand gute Dienste leisten wird.

Wien, im Dezember 1902. E. Müller.

Holzmüller, G. Elemente der Stereometrie III. Leipzig 1902, G. J. Göschen. 8⁰. XII u. 333 S.

Dieser Band, „der Untersuchung und Konstruktion schwierigerer Raumgebilde" gewidmet, behandelt im ersten Abschnitt die Guldinsche Regel und ihre vielfachen Erweiterungen und Anwendungen. Die folgenden Abschnitte gehören streng genommen nicht mehr zur Stereometrie; in ihnen hat der Verf. die Begriffe der Flächenlehre an Beispielen zum Verständnis zu bringen gesucht. Schraubenregelflächen und Röhrenflächen werden auf Abwickelbarkeit, Biegung und konforme Abbildung untersucht; damit ist eine Betrachtung der Krümmungslinien und isothermen Kurvenscharen verbunden. Auch werden die Gebilde einer Transformation nach reziproken Radien unterzogen. Die vielen beigegebenen Zeichnungen sind gute Beispiele der darstellenden Geometrie und bringen die Darlegungen des Textes geeignet zur Anschauung. — Es ist klar, daß bei einer elementaren Behandlung der Flächenlehre große Vorsicht bei der Begriffsbildung angewendet werden muß. Im allgemeinen sind auch die Schlüsse des Verf. einwandfrei. Nur einen Punkt muß ich erwähnen, der zu Bedenken Anlaß gibt: das sind die Minimalflächen. Auf S. 16 wird die Minimalschraubenregelfläche und auf S. 122 das Katenoid als Minimalfläche so begründet: „Da die Verbindungslinie zwischen Cylinderachse und Schraubenlinie stets eine kürzeste Linie ist, hat die Fläche . . . den Charakter einer Minimalfläche" und „diese Linien bleiben bei der Verbiegung kürzeste Linien, folglich muß die durch Biegung entstehende Fläche eine Minimalfläche bleiben". Danach müßte ja jede Fläche eine Minimalfläche sein! In dem zweiten angeführten Satz ist außerdem ein anderer Fehler enthalten, der S. 201 noch einmal explizite ausgesprochen wird, nämlich: „Minimalflächen bleiben bei der Verbiegung Minimalflächen". Dieser Satz ist falsch. Man vergl. darüber Bianchi § 194—196, wo die allgemeinste Verbiegung von Minimalflächen ermittelt wird, bei der die Fläche beständig Minimalfläche bleibt, und wo über so beschaffene, assoziierte Minimalflächen Sätze abgeleitet werden.

Dortmund. H. Kühne.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. (Begründet von Moritz Cantor.) 15. Heft, mit 76 Abbildungen im Text. **Sauerbeck, Paul,** Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves 1665. Bei B. G. Teubner, Leipzig 1902.

Das 1740 gedruckte Buch „*Usages de l'analyse de Descartes*" von Jean Paul de Gua de Malves war so gut wie in Vergessenheit geraten, als A. von Brill in der ihm angehörenden ersten Hälfte des gemeinsam mit M. Noether bearbeiteten Berichtes über die Theorie der algebraischen Funktionen (1894) neuerdings die Aufmerksamkeit darauf lenkte, indem er ihm 3 Seiten widmete. Referent hat alsdann im III. Bande seiner Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (1898, 2. Auflage 1901) in verschiedenen Kapiteln über das Buch berichtet. H. Sauerbeck ist einen wesentlichen Schritt weitergegangen. Er hat in dem uns heute vorliegenden Bändchen den ganzen Inhalt von Gua de Malves' Untersuchungen, man möchte beinahe sagen, in moderne Sprache übersetzt und dadurch dem Leser nahe gebracht. Ganz richtig wäre die Bezeichnung als Übersetzung indessen doch nicht, da Herr Sauerbeck vielfach über seine unmittelbare Vorlage hinausgehend auch Ergebnisse anderer Schriftsteller mit hinein verwebt hat. So ist sein von ihm selbst gewählter Titel „Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves" zutreffender. Es ist ein Buch, welches sehr gut als Vorschule zu Durèges Ebene Kurven 3. Ordnung und zu Salmon-Fiedlers Höhere ebene Kurven dienen kann, welches aber zugleich geeignet ist, Freude an geschichtlichen Entwicklungen zu wecken. Daß Referent gerade in diesem letzteren Umstande einen besonderen Vorzug des Buches sieht, braucht er nicht zu rechtfertigen.

Heidelberg. M. Cantor.

Hofmann. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Für Gymnasien und Realschulen. Zweiter Teil. Algebraische Aufgaben. (Erste Abteilung.) Zehnte unveränderte Auflage. Bayreuth, Wilhelm Grau 1902. IV u. 336 S. 3 Mk.

Daß dieses Buch sehr reichhaltig ist, wird nicht Wunder nehmen, da es den Umfang der bekannten Bardeyschen Aufgabensammlung hat und doch nur den Stoff bis zu den linearen Gleichungen einschließlich behandelt. Hinzu tritt freilich ein Abschnitt von 5 Seiten über Kettenbrüche und unbestimmte Gleichungen, von dem wir nicht recht wissen, wie er auf dieser Unterrichtsstufe behandelt werden soll. Die Anordnung ist im übrigen übersichtlich, die Stufenfolge vom Leichteren zum Schwierigeren gut eingehalten. Für die Hand des Lehrers, der eine reichere Auswahl von Aufgaben wünscht, wird sich das Buch, dessen zahlreiche Auflagen für seine Verwendbarkeit sprechen, durchaus nützlich erweisen. In Anbetracht dessen, daß es nur für eine kurze Zeit des Schulunterrichtes ausreicht, erscheint sein Preis zu hoch, als daß die Einführung desselben in norddeutschen Schulen sich empfehlen ließe.

Charlottenburg. H. Samter.

Karl Weierstraß. Mathematische Werke. Vierter Band. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. Bearbeitet von G. Hettner und J. Knoblauch. Berlin 1903, Mayer und Müller.

Der vierte Band von Weierstraß' Werken, der die mit Spannung erwarteten Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Funktionen enthält, liegt vor uns. Zunächst sind wir den beiden Herausgebern Hettner und Knoblauch für die mit größter Sorgfalt und Pietät durchgeführte Arbeit der Herausgabe zu Dank verpflichtet, wenn uns jetzt diese große Theorie in authentischer Form vorliegt, von der wir, die wir uns nicht zu Weierstraß' unmittelbaren Schülen rechnen dürfen, uns nur ein unvollständiges Bild machen konnten, besonders nach den Referaten von Brill und Noether in den „Berichten der deutschen Mathematiker-Vereinigung" und von Wirtinger in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften".

Wir erfahren aus der Einleitung, daß Weierstraß, der schon im Jahre 1847 die ersten Grundlagen für die Theorie der allgemeinen hyperelliptischen Funktionen gelegt hat, im Jahre 1857 der Berliner Akademie eine Theorie der allgemeinen Abelschen Funktionen übergeben hat, die bereits zum Druck gegeben war, als Riemanns Arbeit über den gleichen Gegenstand erschien. Dies Zusammentreffen bewog Weierstraß, seine Theorie einstweilen zurückzuziehen und noch mehr als 12 Jahre lang aufs neue zu überdenken und zu überarbeiten, bis er ihr die Gestalt gegeben hat, die er für die definitive hielt, und die er seitdem, wie es scheint mit nur unerheblichen Abweichungen, in seinen Vorlesungen vorgetragen hat. Der vorliegenden Ausgabe liegen die Vorlesungen aus den Jahren 1875—76 zu Grunde.

Was Weierstraß gegen Riemanns Weg geltend gemacht hat, war die Anwendung des „Dirichletschen Prinzips", dessen Beweis eine Lücke aufwies, ähnlich der, die schon früher Dirichlet bei den Steinerschen Untersuchungen über geometrische Maxima und Minima aufgedeckt hat, über die bei anderen Gelegenheiten selbst Cauchy und Gauß mit Stillschweigen hinweggegangen waren, nämlich, daß nicht genügend zwischen *Minimum und unterer Grenze* unterschieden war.

Gibt man das Dirichletsche Prinzip zu, dessen festere Begründung neuere Untersuchungen in der Mathematik anstreben, dann führt der Riemannsche Weg mit einer nicht zu übertreffenden Allgemeinheit und Einfachheit zum Ziele. Gibt man aber mit Beibehaltung der übrigen Gedanken Riemanns dies angefochtene Prinzip preis, so sieht man sich zu gewissen Einschränkungen in der Allgemeinheit der Voraussetzungen gezwungen, die Riemann selbst bereits an einigen Stellen andeutet, und die später von Clebsch und Gordan, Brill, Noether u. a. genauer abgegrenzt worden sind.

Weierstraß benutzt zur Überwindung dieser Schwierigkeit, was ihm überhaupt für die sicherste Grundlage der Funktionentheorie galt, die *Potenzreihe*. Er zeigt, wie man jede algebraische Abhängigkeit zwischen zwei Veränderlichen x, y dadurch darstellen kann, daß man beide Variable in Reihen entwickelt, die nach aufsteigenden Potenzen mit ganzzahligen Exponenten fortschreiten. Diese Potenzreihen konvergieren in einer gewissen „Umgebung" eines Wertepaares a, b von x und y und definieren das, was Weierstraß ein „*Funktionenelement*" nennt.

An einer späteren Stelle wird dann nachgewiesen, daß man den ganzen Wertvorrat der Variablen xy durch eine *endliche Anzahl solcher Funktionselemente* erschöpfen kann, und damit ist die Grundlage für die *stetige Fortsetzung* gewonnen. Natürliche Grenzen, wie sie bei transcendenten Funktionen auftreten, über die hinaus die Funktionen nicht stetig fortsetzbar sind, kommen bei den algebraischen Funktionen nicht vor.

Ein anderer Weg der Erforschung der algebraischen Funktionen, der dem Weierstraßschen an Allgemeinheit und Strenge nicht nachsteht, ihn an Einfachheit der Grundgedanken noch übertrifft, ist der sogenannte *arithmetische Weg*, der nur die der Arithmetik und Algebra eigentümlichen Hilfsmittel, d. h. die rationalen Rechenoperationen benutzt. Freilich hat diese Methode, in voller Reinheit angewandt, ihre Grenze da, wo die Integrale und die Periodizitätsmoduln anfangen eine Rolle zu spielen, und um hier weiter zu kommen, ist neuerdings (von Hensel und Landsberg) die Potenzreihe mit der arithmetischen Methode in Verbindung gebracht worden.

Der geneigte Leser wolle es dem in Riemannschen Anschauungen grau gewordenen Referenten zu gute halten, wenn er es versucht, sich die Weierstraßschen Gedanken in seine Sprache, nämlich in die Riemannsche Ausdrucksweise zu übersetzen, wiewohl Weierstraß selbst jeden Anklang daran, so nahe er bisweilen liegt, geflissentlich zu vermeiden scheint. Vielleicht wird manchem Leser der Zugang zu den vorliegenden Vorlesungen dadurch erleichtert.

Das erste und wichtigste ist die Einführung der charakteristischen Zahl, die Weierstraß den *Rang* der algebraischen Funktion nennt und mit ϱ bezeichnet, die bei Riemann ohne besonderen Namen durchweg mit p bezeichnet wird, und die jetzt vielfach das *Geschlecht* genannt wird. (Nach Clebsch, Crelles Journal **64**, 43.)

Bei Riemann erscheint diese Zahl abgeleitet aus der Ordnung des Zusammenhangs der Fläche, die ihm den Verlauf der algebraischen Funktion darstellt, also aus der Geometrie der Lage, durch die Anschauung, ganz ohne Rechnung. Weierstraß leitet sie ab aus den algebraischen Funktionen selbst, und zwar in folgender Weise.

Man kann sich zunächst — vielleicht durch ein Beispiel — überzeugen, daß eine algebraische Abhängigkeit bei der x und y beide rationale Funktionen einer einzigen Variablen t sind, nur ein spezieller Fall ist, der ein für allemal ausgeschlossen wird. Nennen wir den Inbegriff aller rationalen Funktionen der beiden, durch $f(xy) = 0$ verbundenen Variablen xy einen *Körper* algebraischer Funktionen (nach Dedekind), so läßt sich schließen, daß es in einem Körper keine Funktionen gibt, die nur in einem Punkte verschwinden. Man nehme daher eine Funktion $F = F(\zeta, \xi)$ eines variablen Punktes ζ, die als Funktion von ζ in irgend welchen Punkten ξ, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ unendlich in der ersten Ordnung wird, und bezeichne die den Punkten $\zeta, \xi, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ entsprechenden Werte der unabhängigen Variablen mit $z, x, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$. Die Funktion F wird so normiert, daß die (-1)te Potenz in der Entwicklung nach steigenden Potenzen von $z-x$ den Koeffizienten 1 erhält, und ist dadurch bis auf eine additive, von ζ unabhängige Größe bestimmt.

Wenn nun eine Funktion $F_1(\zeta)$ existiert, die nur in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ oder in einem Teil von ihnen, unter denen sich α_m befinden

möge, unendlich in der ersten Ordnung wird, so kann man die Konstante C so bestimmen, daß $F - CF_1$ zwar noch in ξ, aber sonst nur noch in den $(m-1)$ Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ oder einem Teil von ihnen unendlich wird, und wenn man so fortfährt, erhält man schließlich eine Funktion F, die nur in $\xi, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu$ unendlich wird, worin $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu$ solche Punkte sind, die nicht für sich die Unendlichkeitspunkte einer Funktion des Körpers sein können.

Die Zahl μ ist jedenfalls positiv; sie kann aber noch von der Lage der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ abhängen. Es wird jedoch einen Wert geben, den sie zwar erreichen, aber nicht überschreiten kann, und dies ist die Zahl ϱ, die den Rang bestimmt.

Es gibt also eine Funktion F, die in dem beliebigen Punkte ζ und in ϱ als fest betrachteten Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\varrho$ unendlich wird, und diese Funktion ist vollständig bestimmt, wenn noch festgesetzt wird, daß das Produkt $(z-x)F$ im Punkt ξ gleich 1 sei, und daß sie in einem gegebenen Punkt α_0 verschwinden soll. Diese Funktion bezeichnet Weierstraß mit $H(xy, x'y')$. Ich will sie hier mit $H(\zeta, \xi)$ bezeichnen.

Bezeichnen wir nach Riemanns Weise mit $t_\xi(\zeta)$ das Normalintegral der zweiten Art (Gattung), dem wir die obere Grenze ζ, die untere Grenze α_0 geben, so erhält diese Funktion $H(\zeta, \xi)$ den Ausdruck

$$H(\zeta, \xi) = t_\xi(\zeta) + H_1(\xi) t_{\alpha_1}(\zeta) + H_2(\xi) t_{\alpha_2}(\xi) + \cdots + H_\varrho(\xi) t_{\alpha_\varrho}(\zeta),$$

worin die Koeffizienten $H_1, H_2, \cdots, H_\varrho$ nach ζ konstant sind und so bestimmt werden müssen, daß die Periodizitätsmoduln von $H(\zeta, \xi)$ verschwinden. Dadurch ergeben sie sich als Funktionen des Punktes ξ.

Ist α_i einer der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\varrho$, so entwickelt Weierstraß die Funktion $H(\zeta, \xi)$, als Funktion des ersten Punktes ζ betrachtet, in der Umgebung des Punktes α_i nach aufsteigenden Potenzen von $z - \alpha_i$.[1] Die Entwicklungskoeffizienten sind Funktionen des Punktes ξ, und entsprechend den ϱ Punkten α_i ergeben sich ϱ Reihen solcher Funktionen.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Koeffizienten der (-1)ten Potenz, die nichts anderes sind als die Koeffizienten

$$H_1(\xi),\ H_2(\xi),\ \cdots,\ H_\varrho(\xi)$$

unserer Darstellung, die bei Weierstraß mit $H(x'y')$ bezeichnet sind; ferner die Koeffizienten der $(+1)$ten Potenz, die Weierstraß $H'(x'y')\alpha$ nennt, die wir mit

$$H_1'(\xi),\ H_2'(\xi),\ \cdots,\ H_\varrho'(\xi)$$

bezeichnen wollen.

Die Koeffizienten $H_i(\xi)$ bestimmen sich daraus, daß die Periodizitätsmoduln von $H(\zeta, \xi)$ gleich Null sein müssen. Die Periodizitätsmoduln eines Normalintegrals zweiter Gattung t_α sind aber teils gleich Null, teils haben sie den Wert $-2\left(\frac{du_\varkappa}{dz}\right)_\alpha$, wenn $u_1, u_2, \cdots, u_\varrho$ die Normalintegrale erster Gattung sind. Daher ergeben sich die Bedingungen

$$0 = \left(\frac{du_\varkappa}{dz}\right)_\xi + H_1(\xi)\left(\frac{du_\varkappa}{dz}\right)_{\alpha_1} + \cdots + H_\varrho(\xi)\left(\frac{du_\varkappa}{dz}\right)_{\alpha_\varrho}, \quad \varkappa = 1, 2, \cdots \varrho;$$

1) Weierstraß entwickelt allgemeiner nach Potenzen einer Hilfsvariablen. t. Der Kürze wegen nehme ich hier $z - \alpha_i$ für t.

und für die $H_i(\xi)$ erhält man die Formel

$$AH_\varkappa(\xi) = A_{\varkappa 1}\left(\frac{du_1}{dz}\right)_\xi + \cdots + A_{\varkappa\varrho}\left(\frac{du_\varrho}{dz}\right)_\xi,$$

worin A die Determinanten

$$\Sigma \pm \left(\frac{du_1}{dz}\right)_{\alpha_1}\left(\frac{du_2}{dz}\right)_{\alpha_2}\cdots\left(\frac{du_\varrho}{dz}\right)_{\alpha_\varrho}$$

und $A_{\varkappa\iota}$ ihre Unterdeterminanten sind. Es sind also die $H_\varkappa(\xi)$ ein System von ϱ linear unabhängigen *Integranden erster Gattung.*

Für die Funktionen $H_1'(\xi)$ erhält man durch Differentiation (nach dem Taylorschen Lehrsatz)

$$H_1'(\xi) = \frac{d}{dz}(H(\zeta, \xi) - H_1(\xi)t_{\alpha_1}(\zeta))_{\zeta=\alpha_1}$$
$$= \left(\frac{dt_\xi(\zeta)}{dz} + H_2(\xi)\frac{dt_{\alpha_2}(\zeta)}{dz} + \cdots + H_\varrho(\xi)\frac{dt_{\alpha_\varrho}(\zeta)}{dz}\right)_{\zeta=\alpha_1}.$$

Es ist aber für irgend zwei Normalintegrale $t_\alpha(\xi)$, $t_\beta(\xi)$ der zweiten Gattung[1])

$$\left(\frac{dt_\alpha(\xi)}{dz}\right)_\beta = \left(\frac{dt_\beta(\xi)}{dz}\right)_\alpha,$$

und folglich ist

$$H_1'(\xi) = \left(\frac{dt_{\alpha_1}}{dz}\right)_\xi + H_2(\xi)\left(\frac{dt_{\alpha_1}}{dz}\right)_{\alpha_2} + \cdots + H_\varrho(\xi)\left(\frac{dt_{\alpha_1}}{dz}\right)_{\alpha_\varrho}.$$

Setzt man

$$\left(\frac{dt_{\alpha_i}}{dz}\right)_{\alpha_\varkappa} = C_{i\varkappa} = C_{\varkappa i},$$

so sind die $C_{i\varkappa}$ in Bezug auf ξ konstant, und es folgt

$$H_1'(\xi) = \frac{dt_{\alpha_1}(\xi)}{dz} + C_{12}H_2(\xi) + \cdots + C_{1\varrho}H_\varrho(\xi).$$

Es ist also $H_1'(\xi)$, abgesehen von dem additiven Integranden erster Gattung $C_{12}H_2(\xi) + \cdots + C_{1\varrho}H_\varrho(\xi)$, gleich dem Integranden zweiter Gattung $\frac{dt_{\alpha_1}(\xi)}{dz}$.

Der Ausdruck von $H(\zeta, \xi)$ durch die Integrale $t(\zeta)$ zeigt nun, daß diese Funktion, als Funktion von ξ betrachtet, nur unendlich wird, wenn ξ in einen der Punkte ζ oder α_0 fällt, oder in solche Punkte, in denen eine der Funktionen erster Gattung $H_i(\xi)$ unendlich wird. Glieder mit der (-1)ten Potenz treten nur in der Umgebung von ζ und von α_0 auf, und es ist also das Integral

$$\int H(\zeta, \xi)\,dx$$

ein Integral dritter Gattung mit den beiden logarithmischen Unstetigkeitsstellen $\xi = \zeta$, $\xi = \alpha_0$; es wird sodann weiter gezeigt, daß sich jede

1) Über die hier benutzten Sätze über Normalintegrale 1ter und 2ter Gattung vergleiche man die Arbeit des Referenten in Crelles Journal Bd. 70.

Funktion des Körpers linear und mit konstanten Koeffizienten zusammensetzen läßt aus den Funktionen

$$H_1(\xi), \cdots, H_\varrho(\xi), H_1'(\xi), \cdots, H_\varrho'(\xi), H(\zeta, \xi),$$

wenn in $H(\zeta, \xi)$ für ζ eine endliche Anzahl verschiedener Punkte gesetzt wird, abgesehen von einer Funktion, die der Differentialquotient einer dem Körper angehörigen Funktion ist. Alle Integrale können also durch die Integrale dieser Funktionen und durch eine algebraische Funktion des Körpers dargestellt werden.

Die Integrale dritter Gattung wendet Weierstraß an, um die *Primfunktionen* zu konstruieren. Es sind dies transcendente Funktionen, die nur in je einem Punkte Null und unendlich werden, und jede Funktion des Körpers läßt sich als ein Produkt aus solchen Funktionen darstellen.

Nimmt man das Integral

$$\Omega(\zeta) = \int H(\zeta, \xi)\, dx$$

auf einem geschlossenen Integrationsweg, so erhält man einen Periodizitätsmodul des Integrals dritter Gattung. Es ist eine transcendente Funktion des Punktes ζ, die, wenn ζ mit keinem der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\varrho$ zusammenfällt und der Integrationsweg nicht über den Punkt ζ führt, nicht unendlich wird. Wenn aber der Punkt ζ den Integrationsweg überschreitet, so ändert sich $\Omega(\xi)$ unstetig um ein Vielfaches von $2\pi i$. Setzt man also

$$E(\zeta) = e^{\Omega}(\zeta),$$

so wird diese Funktion nirgends Null oder unendlich, außer in dem Punkte α, und ändert sich auch beim Überschreiten des Integrationswegs stetig.

Nimmt man irgend zwei feste Punkte ξ_0, ξ_1, und bildet

$$\Omega(\zeta; \xi_1\ \xi_0) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} H(\zeta, \xi)\, dx,$$

so erhält man eine (transcendente) Funktion von ζ, die in den Punkten ξ_0, ξ_1 logarithmisch unendlich wird, und außerdem die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\varrho$ zu singulären Stellen hat. In dem Punkte α_0 wird $\Omega = 0$.

Setzt man also

$$E(\zeta; \xi_1, \xi_0) = e^{\Omega}(\zeta; \xi_1, \xi_0),$$

so erhält man eine Funktion von ζ, die in ξ_1 verschwindet, in ξ_0 unendlich wird, in α_0 den Wert 1 annimmt, außerdem aber noch in den Punkten α_1, $\alpha_2, \cdots, \alpha_\varrho$ sich in bestimmter Weise singulär verhält, wie man aus der Darstellung von $H(\zeta, \xi)$ durch die Integrale zweiter Gattung leicht findet.

Die Funktionen $E(\zeta; \xi_1, \xi_0)$ heißen die *Primfunktionen.* Wenn $R(\zeta)$ irgend eine Funktion des Körpers ist, die in den r Punkten

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$$

verschwindet, und in den r Punkten

$$\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_r'$$

unendlich groß wird, so ordne man diese Punkte in beliebiger Weise zu Paaren $\xi_1 \xi_1'$; $\xi_2 \xi_2'$; $\cdots$; $\xi_r \xi_r'$. Bestimmt man einen konstanten Faktor bei $R(\xi)$,

so daß $R(\alpha_0) = 1$ wird, so kann man, bei richtiger Bestimmung der Integrationswege in den E-Funktionen immer setzen:

$$R(\zeta) = E(\zeta;\, \xi_1\xi_1') \cdot E(\zeta;\, \xi_2\xi_2') \cdots E(\zeta;\, \xi_r\xi_r'),$$

wodurch die Funktion R in ähnlicher Weise in einfache Faktoren (Primfaktoren) zerlegt ist, wie man die rationalen Funktionen einer Variablen in lineare Faktoren zerlegen kann.

Bei dem Gang, den die Weierstraßsche Entwicklung nimmt, werden in systematischem Fortschritt nach den algebraischen Funktionen im zweiten Teil die Theorie der Integrale und Periodizitätsmoduln behandelt, während der dritte Teil den Umkehrproblemen und damit in Zusammenhang den Theta-Funktionen gewidmet ist. Es ist dies ein wesentlicher Unterschied gegenüber der Riemannschen Behandlungsweise, bei der die Integrale mit ihren Unstetigkeiten an den Querschnitten eigentlich das Primäre sind, aus dem die Funktionen des Körpers erst als Spezialfälle abgeleitet werden, und bei der dann die Thetafunktion als ein neues Hilfsmittel der Untersuchung dieser Funktionen unvermittelt hinzutritt.

Ein Bericht über eine große Weierstraßsche Vorlesung kann der Natur der Sache nach nicht ganz kurz sein. Er wird überdies nur dem ein Bild geben können, der mit dem Gegenstande selbst schon einigermaßen vertraut ist. Um aber die Grenzen eines Referates nicht allzusehr zu überschreiten, breche ich hier ab, ohne auf die späteren Teile, namentlich die Behandlung des Umkehrproblems näher einzugehen. Ich darf dies um so eher tun, als der erste, auf die algebraischen Funktionen bezügliche Teil am eingehendsten durchgearbeitet ist, und wohl auch sachlich das meiste Interesse bietet.

Ich schließe mit dem Ausdruck des Dankes an die beiden Herausgeber und an alle, die daran mitgewirkt haben, daß uns dieses schöne Werk in so vollendeter Form und so vornehmer Ausstattung geboten ist.

Straßburg, Juni 1903. H. Weber.

Annuaire pour l'an 1903, publié par le bureau des longitudes. Paris 1903, Gauthier-Villars. 803 S. fr. 1,50.

Die Verlagsbuchhandlung Gauthier-Villars hat soeben, wie in jedem Jahr, das Annuaire du bureau des longitudes ausgegeben. Dieses in drei Teilen, einem astronomischen, einem physikalischen und chemischen, und einem geographischen und statistischen, über 800 Seiten starke Bändchen bringt wieder eine Fülle von Zahlen, Tabellen und Karten, die dem Vertreter der reinen wie dem der angewandten Wissenschaften durchaus unentbehrlich sind. Angehängt sind diesmal folgende Abhandlungen: Etoiles filantes et comètes, par M. R. Radau; Science et poésie, par M. J. Jansen; Note sur les travaux exécutés à l'observatoire du sommet du Mont Blanc en 1902, par M. J. Janssen; Discours prononcés par M. M. Bassot et Poincaré aux funérailles de M. A. Cornu; Discours prononcés par M. M. Bouquet de la Grye, Bassot, Loewy, Janssen et van de Sande Bakhuyzen aux funérailles de M. Faye. Und dabei kostet der Band nur 1,50 fr.!

Berlin. E. Jahnke.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze.

86. *(Aus einem Brief*[1]*) von H. C. Schumacher an Jacobi.)* — Wenn Sie in der Langenweile des Bades einmal ein Elementarproblem ansehen mögen, so würde ich es wagen Sie um Belehrung über eine Aufgabe zu bitten, die meine schwachen Kräfte lange fruchtlos beschäftigt, und mich in Komplikationen gebracht hat, aus denen ich keinen Ausweg sehe. Es ist diese. Wenn man in einem gradlinichten Dreiecke die 3 *innerhalb* liegenden Quadrate beschreibt, von denen eine Seite in eine Seite des Dreiecks fällt, und die beiden andern Winkelpunkte in den beiden andern Seiten des Dreiecks liegen, so kann man die Mittelpuncte dieser Quadrate wiederum durch grade Linien verbinden, und erhält ein zweites Dreieck, in dem man wieder 3 Quadrate unter den vorigen Bedingungen beschreibt, deren durch grade Linien verbundene Mittelpuncte ein 3. Dreieck geben, in dem man wieder Quadrate beschreibt, die ein 4. Dreieck geben, und so in infinitum. Was ist die Grenze, der man sich so nähert? eine Linie, oder ein Punkt, oder beides nachdem man das ursprüngliche Dreieck annimmt? und wenn beides in gewissen Fällen möglich ist, welche Bedingungen finden statt, damit es das eine oder das andere sei? Bei dem gleichseitigen Dreieck ist es offenbar ein Punkt, bei dem rechtwinklichten Dreiecke giebt schon das zweite Dreieck (weil die Quadrate, deren Seiten in den Catheten liegen, zusammenfallen) eine Linie. Ich habe mich ausdrücklich auf die inneren Quadrate beschränkt, weil noch drei äußere hinzukommen, wenn man das Dreieck als ein System von 3 unbegränzten Linien betrachtet.

Ein Lector der Mathematik aus Christiania, der mich bei der Durchreise durch Altona gerade nicht in der besten Laune mit diesem Problem beschäftigt fand, versprach mir die Auflösung aus dem *ersten* Nachtquartier (er wollte nämlich mit der Schnellpost weiterreisen) zu senden. Nun habe ich, seit Abel, vor den Lectoren in Christiana einen großen Respect und glaubte schon, was ich wünschte, zu haben; allein bis auf diesen Augenblick ist mir nichts zugekommen. Vielleicht reist er noch immer mit der Schnellpost und hat in den 4 Jahren die seitdem verflossen sind, gar kein Nachtquartier gehalten, was sehr angreifend sein muß, und schwerlich für seine Gesundheit gut sein kann.

Altona 1839, Julius 4. SCHUMACHER.

---

1) Bezüglich der Herkunft dieses Briefes vergleiche die Anmerkung 2) auf S. 268 des vierten Bandes dieses Archivs.

87. Es ist zu beweisen, daß homologe, gleiche, ebene Felder in gleichen Räumen, welche durch zwei entsprechende Punkte gehen, Ebenenbüschel IV. Ordnung mit zwei Doppelebenen bilden.

Halensee/Berlin. St. Jolles.

---

88. Je zwei Gegenecken und die Schnittpunkte der Gegenseiten eines einfachen Kreisviereckes sind vier Punkte einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt den Abstand der beiden Gegenecken und deren Asymptotenpaar die Winkel zwischen den Richtungen der Diagonalen und diejenigen zwischen den Richtungen der Gegenseiten halbiert. Zum zweiten Mal schneiden die beiden Hyperbeln einander in den unendlich fernen Punkten der beiden Strahlen, welche die Winkel der Diagonalen halbieren, den Kreis aber in den Endpunkten derjenigen Durchmesser, welche auf den Diagonalen senkrecht stehen.

Holzminden. G. Kober.

---

2. Anfragen.

9. Jakob Steiner hat den Satz gefunden: Die Mittelpunkte aller die Seiten eines Dreiecks berührenden gleichseitigen Hyperbeln liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Höhenschnitt des Dreiecks ist. Dieser Satz ist schon oft bewiesen worden, meistens mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie. Auf synthetischem Wege hat Heinrich Schröter in seinem Buche über Kegelschnitte den Nachweis der Richtigkeit des Satzes geführt, aber sein Beweis ist umständlich und enthält eine ziemlich lange Rechnung. Mir ist es gelungen, einen einfachen rein geometrischen Beweis zu finden. Sind einem der Leser dieser Zeitschrift andere Beweise bekannt als der von Schröter gelieferte?

Breslau, im Juli 1903. O. Gutsche.

---

3. Kleinere Notizen.

Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Hurwitz: Über höhere Kongruenzen. Archiv (3) 5. S. 17 ff.

1. Das Verfahren des Herrn Hurwitz läßt sich verallgemeinern und führt zu einem Satz, der für höhere Kongruenzen dieselbe Bedeutung hat, wie der Sturmsche Satz für Gleichungen. Der Sturmsche Satz bestimmt die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung und damit auch die Anzahl der Faktoren ihrer linken Seite. Diese Anzahl ist aber nach Dirichlet bestimmend für die Anzahl der Einheiten des durch die Gleichung definierten Zahlkörpers. Den Dirichletschen Satz habe ich auf Körper erweitert, die durch eine Kongruenz $f(x) \equiv 0 (p)$ definiert werden [J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 126, S. 102 ff.]. Dabei spielt für die Einheiten die Anzahl der nach p irreduciblen Faktoren von f dieselbe Rolle, wie die Anzahl der reellen Faktoren

bei den gewöhnlichen Zahlkörpern. Diese Anzahl kann nach dem Verfahren des Herrn Hurwitz wie folgt ermittelt werden.

Die vorgelegte Funktion sei $f(x) = x^m + \cdots + a_m$ mit der Bedingung $a_m \not\equiv 0(p)$. Diese Bedingung kann man immer durch Absondern einer geeigneten Potenz von x erfüllen. Ferner erhalte f keinen irreduciblen Faktor mehr als einmal. Weiter sei $g(x) = x^n + \cdots + b_n$ eine Funktion geringeren Grades als f mit beliebigen Koeffizienten. Haben f und g einen gemeinsamen Teiler mod p, so verschwindet nach p die Resultante $R(f, g)$, also ist der Ausdruck $R^{\varpi}(f, g) \equiv 0(p^n)$, wobei $p^{n-1}(p-1) = \varpi$ gesetzt ist. Haben aber f und g keinen gemeinsamen Teiler, so ist $R(f, g) \not\equiv 0(p)$, also $R^{\varpi}(f, g) \equiv 1(p^n)$. Die Summe $\varrho_n \equiv \sum\limits_g R^{\varpi}(f, g)(p^n)$, erstreckt über alle möglichen g, zählt daher alle g vom Grade n, die mit f mod p keinen Teiler haben. Es gibt p^n Funktionen g. ϱ_n ist somit in allen Fällen durch die Kongruenz eindeutig bestimmt bis auf $\varrho_n = 0$ und $\varrho_n = p^n$. Im Falle $\varrho_n = 0$ müßte aber f mit allen g einen gemeinsamen Teiler haben; es müßte also alle irreduciblen Funktionen bis zum Grade n hin enthalten, demnach auch durch x teilbar sein. Dieser Fall ist ausgeschlossen worden; folglich ist im Falle $\varrho \equiv 0$ auch $\varrho_n = p^n$ eindeutig bestimmt.

Es enthalte nun f λ_h irreducible Faktoren vom Grade h $(h = 1, 2, \cdots)$; es handelt sich dann um die Bestimmung der λ und ihrer Summe. Ferner sei i_h die Anzahl der überhaupt möglichen irreduciblen Funktionen vom Grade h $(h = 1, 2, \cdots)$. Schließlich sei $i_h - \lambda_h = \mu_h$ die Anzahl der irreduciblen Funktionen vom Grade h, die in f nicht aufgehen. Aus ihnen müssen alle g gebildet sein, die mit f keinen Teiler haben. Daraus findet man

$$\varrho_n = \sum_{(\alpha)} \prod_h \binom{\mu_h + \alpha_h - 1}{\alpha_h} \text{ und } p^n = \sum_{(\alpha)} \prod_h \binom{i_h + \alpha_h - 1}{\alpha_h},$$

erstreckt über alle verschiedenen Systeme von positiven ganzen Zahlen α, die der Bedingung $\sum\limits_{h=1}^{n} h\alpha_h = n$ genügen.

So bestimmt man die μ und i und daraus die λ durch $\lambda_h = i_h - \mu_h$.

2. Auch die von Herrn Hurwitz abgeleitete Invariante ist ein besonderer Fall einer allgemeinen Invariantenbildung. Es sei $\varphi = a_0 x_1^m + \cdots + a_m x_2^m$ eine binäre Form mit unbestimmten Koeffizienten. Und es sei $\psi = b_0 x_1^n + \cdots + b_n x_2^n$ eine binäre Form, deren Koeffizienten dem Bereich $b_0, b_1, \cdots b_n = 0, \cdots p-1$ entnommen sind. m und n sind beliebig. Es erfahre jetzt φ und ψ eine lineare Substitution mit der nach p nicht verschwindenden Determinate δ, so gehe φ in φ' und ψ in ψ' über. ψ' kann in die Form $\chi + p\vartheta$ gebracht werden, wo nun χ der vorher definierten Schar ψ angehört. Dann ist

$$R(\varphi', \psi') = R(\varphi', \chi + p\vartheta) = R(\varphi', \chi) + p\theta,$$

$$R^{\varpi}(\varphi', \psi') = R^{\varpi}(\varphi', \chi) + \sum_{\lambda=1}^{\varpi} \binom{\varpi}{\lambda} p^\lambda \theta^\lambda R^{\varpi-\lambda}(\varphi', \chi) \equiv R^{\varpi}(\varphi', \chi)(p^n),$$

ferner ist

$$R(\varphi, \psi') = \delta^{mn} R(\varphi, \psi), \text{ also } R^{\varpi}(\varphi', \psi') \equiv R^{\varpi}(\varphi, \psi)(p^n),$$

sodaß sich schließlich

$$R^{\varpi}(\varphi', \chi) \equiv R^{\varpi}(\varphi, \psi)\,(p^n)$$

ergibt. Zu jedem ψ gehört ein χ und umgekehrt. Mithin ist die Gesamtheit der χ identisch mit der Gesamtheit der ψ. Aus der letzten Kongruenz folgt dann

$$\sum_{\chi} R^{\varpi}(\varphi', \chi) \equiv \sum_{\psi} R^{\varpi}(\varphi, \psi)\,(p^n).$$

D. h. es ist

$$J_n = \sum_{\psi} R^{\varpi}(\varphi, \psi)$$

mod p^n *eine Invariante.* J_1 ist gleich dem $A(a_0 \cdots, a_r)$ des Herrn Hurwitz.

Dortmund, 13. 5. 03. H. Kühne.

---

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Auerbach, F., Das Zeißwerk und die Karl-Zeiß-Stiftung in Jena. Ihre wissenschaftliche, technische und soziale Entwicklung und Bedeutung. Jena 1903, G. Fischer. 123 S. M. 2.

Bauer, G., Vorlesungen über Algebra. Herausgegeben vom mathematischen Verein München (K. Doehlemann). Leipzig 1903, B. G. Teubner. 375 S.

Bruns, H., Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 159 S. M. 3.40.

Enriques, F., Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Hermann Fleischer. Mit einem Einführungswort von F. Klein u. 186 Figuren im Text. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 367 S. M. 8.

Erményi, P., Dr. Josef Petzvals Leben und Verdienste. Halle 1903, Knapp.

Green, G., Mathematical papers. Edited by M. Ferrers. Paris 1903, A. Hermann. Fr. 20.

Helfenstein, A., Die Energie und ihre Formen. Kritische Studien. Leipzig 1903, F. Deuticke. M. 4.20.

Hoffmann, A., Mathematische Geographie. Fünfte, verbesserte Auflage bearbeitet von J. Plaßmann. Paderborn 1903, F. Schöningh. 172 S.

Holzmüller, G., Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Dritter Teil. Zweite Auflage. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 370 S.

König, J., Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 564 S.

Müller, H., und Pietzker, F., Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten. Vorstufe zu den Aufgabensammlungen von Bardey und Müller-Kutnewsky. Ausgabe A: für Gymnasien 244 S.; Ausgabe B: für reale Anstalten und Reformschulen 274 S. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Ondracek, J., Analytische Geometrie ebener Kurven in Büschelkoordinaten. 1. Heft: Ebene Kurven in Normalen-Koordinaten erster Art. Wien 1903, Karl Gerold. 32 S.

Schenck, J., Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. M. 1.60.

Schwering, K., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik. Zweiter Lehrgang. Zweite verbesserte Auflage. Freiburg i. B. 1903, Herder. 148 S. M. 1.20.

Schwering, K., und Krimphoff, W., Ebene Geometrie. Vierte Auflage. Freiburg i. B. 1902, Herder. 136 S. M. 1.60.

Weierstrasz, K., Gesammelte Werke III. Abhandlungen III. Berlin 1903, Mayer und Müller. 360 S.

Soeben erschien:

VORLESUNGEN
ÜBER
PROJEKTIVE GEOMETRIE

VON

FEDERIGO ENRIQUES,
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BOLOGNA.

DEUTSCHE AUSGABE

VON

DR. HERMANN FLEISCHER.

MIT EINEM EINFÜHRUNGSWORT
VON
FELIX KLEIN
UND 187 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

mit bekanntem Mittelpunkte), wenn es sich um die projektive Lösung metrischer Aufgaben handelt —, die Herleitung von Kreiskonstruktionen aus Kegelschnittkonstruktionen, die Untersuchung metrischer Dinge in der unendlich fernen Ebene etc. etc.

Es ist nicht zu zweifeln, daß Enriques' Buch sich in der deutschen Übertragung ebenso zahlreiche Freunde erwerben wird, wie im italienischen Original. Vielleicht gestattet der Erfolg, den ich erwarte, recht bald, daß demnächst auch die interessanten Studien, welche Enriques vor kurzem über Fragen der Elementargeometrie veröffentlicht hat[1]), dem deutschen Publikum in Übersetzung vorgelegt werden.

Göttingen.

F. Klein.

---

1) Questioni riguardanti la geometria elementare. Bologna, Zanichelli, 1900, von denen z. Z. eine deutsche Ausgabe von H. Fleischer für den Verlag von B. G. Teubner besorgt wird.

Inhalt.

Neuntes Kapitel.

Die Kegelschnitte.

Zehntes Kapitel.

Projektivität zwischen Kegelschnitten.

Elftes Kapitel.

Bestimmte Aufgaben.

Zwölftes Kapitel.

Eigenschaften der Brennpunkte der Kegelschnitte.

Seite

Dreizehntes Kapitel.

Die metrischen Eigenschaften der Kegel zweiten Grades.

Vierzehntes Kapitel.

Projektivität zwischen Gebilden dritter Stufe.

Anhang.

Inhalt.

IV. Abschnitt. Theorie und Anwendung der Determinanten.

insbesondere die geradezu grundlegenden Sätze über Divisorensysteme von Hilbert und die wertvollen Arbeiten von Hensel hervorzuheben sind.

Bedenkt man weiter, daß auch die neuen Bahnen, welche die Gruppen- und Funktionentheorie unter der Führung von Klein und Lie einerseits, Fuchs und Poincaré andrerseits eingeschlagen hat, mit der Theorie der algebraischen Größen vielfache Berührungs- und Kreuzungspunkte aufweist, so ergibt sich für unsre Disziplin eine zentrale Stellung, die an Bedeutung auf dem Gebiete der reinen Mathematik vielleicht nur von den Methoden der Infinitesimalrechnung übertroffen wird.

Eine systematische Darstellung der Theorie — oder genauer ausgedrückt ihrer Fundamentalsätze —, die sich in allerdings unvollkommener Analogie zu den gangbaren arithmetisch-algebraischen Handbüchern so verhält, wie eine Darstellung der Funktionentheorie zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, wird wohl ohne weiteres als dankbare Aufgabe anerkannt werden. Wie schwierig eine befriedigende Lösung dieser Aufgabe sich gestaltet, hat der Verfasser des vorliegenden Versuchs an seiner Arbeit selbst erfahren. War ja doch neben manchen methodischen Fragen früher eine Reihe von Fundamentalproblemen zu erledigen, deren Lösung entweder gar nicht, oder nur für spezielle Fälle bekannt war.

Gerade diese neuen Untersuchungen, die wohl mehr als die Hälfte des gesamten Inhaltes ausmachen, drängten aber zu der hier gewählten systematischen Darstellung. Seit langer Zeit mit dem Gegenstande beschäftigt, mußte der Verfasser bald einsehen, daß einzelne Abhandlungen bei dem vielfachen Ineinandergreifen jener Fundamentalprobleme wieder sehr schwer lesbar und auf einen kleinsten Kreis beschränkt blieben, also ihren Hauptzweck verfehlen müßten. Denn als solchen betrachtet es der Verfasser, den Geist der Kroneckerschen Methoden — wenn der Ausdruck für dieses schwierige mathematische Gebiet gestattet ist — zu popularisieren.

So entstand dieses Buch, das eigentlich nur die ersten Elemente der Algebra und Zahlentheorie — einige Sätze aus der Lehre von den Determinanten inbegriffen — voraussetzt, und das eben darum auch ein Studierender mit Nutzen lesen kann; während andrerseits der Fachmann die Darstellung alter und neuer Resultate hier in bequemerer Form erhält, als dies in einzelnen Journalabhandlungen hätte geschehen können.

Den Inhalt des Buches hier in Form eines noch so knappen Referates zusammenzufassen, hieße den Umfang dieser Anzeige

zu sehr ausdehnen; statt dessen sollen hier nur einige Punkte fragmentarisch berührt werden.

Die ganze Darstellung geht von der Definition „holoider" und „orthoider" Bereiche aus, die den Bereichen der ganzen rationalen, resp. der rationalen Zahlen nachgebildet sind, also, wie es scheint, durch gangbare technische Ausdrücke wie Integritätsbereich und Rationalitätsbereich (Körper) ersetzt werden können. Daß dies nicht der Fall ist, wird der aufmerksame Leser bald erkennen; denn jene Definitionen vermeiden die Starrheit der letzteren Begriffe und gestatten infolgedessen eine viel einfachere Grundlegung der Theorie, heben den unangenehmen Gegensatz zwischen Arithmetik und Geometrie und ergeben den für die Ökonomie der Darstellung wichtigen Umstand, daß das „Orthoide" (Rationale) als spezieller Fall des „Holoiden" (Ganzen) zu betrachten ist. Diesen Begriffsbestimmungen entsprechend scheidet sich auch die Theorie in einen „algebraischen" und „arithmetischen" Teil.

Vom methodischen Standpunkte aus hebt der Verfasser noch hervor, daß der Kroneckersche Fundamentalsatz (Kap. III. § 5—7) auf Grund eines völlig elementaren Beweises zum Ausgangspunkt der ganzen Theorie gewählt werden konnte.

Diesem Satze reiht sich sodann — als wichtigste Grundlage der hier erlangten neuen Resultate — die Aufstellung der von dem Verfasser sogenannten Resolventenform an, die als für ein beliebiges Formensystem geltende arithmetische Erweiterung des Resultantenbegriffs aufzufassen ist und insbesondere immer als homogene lineare Form der gegebenen Formen dargestellt werden kann. Dabei wird nach dem Beispiele Kroneckers bei Benutzung des Ausdrucks „Form" von der Forderung der Homogeneität abgesehen.

Die Einführung der Resolventenform einerseits, der Kroneckersche Grundgedanke der Association neuer Unbestimmter andrerseits führen zu einer — im vollen Sinne des Wortes — allgemeinen Theorie der Elimination, in der die Multiplizität der durch irgend ein Gleichungssystem definierten Mannigfaltigkeiten nicht mehr, wie dies in der „Festschrift" der Fall ist, vernachlässigt wird. So entsteht ein mächtiges Werkzeug der Forschung, das uns zunächst eine rein algebraische Theorie der Funktionaldeterminanten liefert. In einem längeren Exkurse wird dann auch eine definitive Darstellung der sog. speziellen Eliminationstheorie, d. h. die allgemeine Theorie der Resultanten und Discriminanten — letztere zum ersten Male — gegeben.

Die im engeren Sinne des Wortes arithmetischen Teile

der Theorie erhalten durch die Behandlung der linearen diophantischen Probleme eine feste Grundlage. Als solches wird die allgemeine Lösung eines Gleichungssystems hingestellt, dessen einzelne Gleichungen die Gestalt $\Sigma F_i X_i = F$ haben. Dabei sind die F als gegebene, die X als unbekannte Formen angesehen, die der weiteren Bedingung unterworfen sind, daß ihre Koeffizienten einem bestimmten, vorweg gegebenen holoiden Bereiche angehören. Dieses Problem wird in den für die Theorie der algebraischen Größen ausreichenden Fällen durch eine endliche, wohldefinierte Reihe elementarer Operationen vollständig gelöst. Es sind dies die Fälle, wo die Formenkoeffizienten entweder einem orthoiden Bereiche (also z. B. irgend einem Rationalitätsbereiche) oder aber dem Bereiche der ganzen rationalen Zahlen angehören.

Der erste Fall ergibt unter anderem eine allgemeine Behandlung des Noetherschen Satzes im Raume von n Dimensionen.

Mit diesen Resultaten ist nicht nur die wichtige, bisher kaum gestreifte Frage nach der Äquivalenz zweier Divisorensysteme vollständig gelöst, sondern es ist auch die allgemeinere Frage des „Enthaltenseins“ eines Divisorensystems in einem andern erledigt.

In der Theorie der ganzen algebraischen Größen werden die beiden Fälle der im strengen Sinne der allgemeinen Arithmetik („absolut“) ganzen Größen und der in Bezug auf einen orthoiden Bereich („relativ“) ganzen Größen zugleich und nach denselben Methoden behandelt. Im zweiten Falle sind unter anderen die im Sinne der Funktionentheorie oder Geometrie ganzen Größen enthalten. Es ist ein Kardinalpunkt der Darstellung, daß die idealen Größen von Beginn ab als nicht nur der Multiplikation, sondern auch der Addition fähige Größen eingeführt werden. Auf dieser Grundlage baut sich eine wesentlich neue und einfache Methode zur wirklichen Bestimmung des Fundamentalsystems in allen Fällen auf, die in erster Reihe auf der Theorie des „Äquivalenzmoduls“ beruht. Die Zerlegung einer ganzen Größe in Primideale wird endlich definitiv und ohne Ausnahmefall geleistet, wobei die diesbezüglichen Kroneckerschen Resultate in einem wesentlichen Punkte richtig zu stellen sind, da diese infolge eines merkwürdigen, allerdings tiefer liegenden Versehens nur in den einfachsten Fällen richtig sind.

Für alles Weitere sei auf das Inhaltsverzeichnis verwiesen, aus dem der Inhalt des Buchs und dessen Disposition im einzelnen zu ersehen ist. Ein ausführliches Sachregister wird die Benutzung des Buches wesentlich erleichtern.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Einleitende Grundbegriffe.

Zweites Kapitel.

Holoiden Bereichen entstammende Formen.

Drittes Kapitel.

Die Teilbarkeit der Formen.

Viertes Kapitel.

Die algebraischen Größen.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine Theorie der Elimination.

Sechstes Kapitel.

Resultanten und Discriminanten.

(Spezielle Eliminationstheorie.)

Siebentes Kapitel.

Lineare diophantische Probleme.

(Allgemeine Sätze und die algebraische Theorie.)

Achtes Kapitel.

Arithmetische Theorie der linearen diophantischen Probleme.

Seite

Neuntes Kapitel.

Die ganzen algebraischen Größen.

läuterung der allgemeinen Sätze und Formeln herangezogen werden; in letzterer Hinsicht mußte sich die Darstellung auf jene einfachsten Tatsachen beschränken, welche den Zusammenhang der Theorie der Thetafunktionen mit den vorher genannten Theorien vermitteln. — Das Buch ist in drei Teile und elf Kapitel eingeteilt, so daß der erste Teil, der von den allgemeinen Thetafunktionen mit beliebigen Charakteristiken handelt, Kap. 1—6, der zweite Teil, die allgemeinen Thetafunktionen mit rationalen Charakteristiken betreffend, Kap. 7 und 8, der dritte endlich mit der Lehre von den speziellen Thetafunktionen Kap. 9—11 umfaßt. Der Inhalt der einzelnen Kapitel aber läßt sich wie folgt angeben. Das erste Kapitel behandelt die Konvergenz der Thetareihe und die Definition und Haupteigenschaften der Thetafunktionen. Das zweite und dritte Kapitel enthalten jene formale Theorie der Thetaformeln, welche vornehmlich von Herrn Prym und dem Verf. geschaffen wurde und bei welcher alle Thetaformeln als spezielle Fälle weniger allgemeiner Formeln erscheinen, diese selbst aber durch direkte Umformung der unendlichen Reihen gewonnen werden. Das vierte Kapitel handelt von der Darstellung allgemeiner $2p$-fach periodischer Funktionen durch Thetafunktionen. Das fünfte Kapitel bringt die Transformation der Thetafunktionen, an welche sich im sechsten Kapitel speziell die komplexe Multiplikation anschließt. Das siebente und achte Kapitel sind jenen Thetafunktionen gewidmet, deren Charakteristiken aus halben und r^{tel} Zahlen als Elementen gebildet sind, bez. der Theorie dieser Charakteristiken selbst. Nachdem sodann das neunte und zehnte Kapitel von den Abelschen und den hyperelliptischen Thetafunktionen gehandelt hat, beschäftigt sich das letzte speziell mit jenen Thetafunktionen, welche zu reduzierbaren Abelschen Integralen gehören.

Karlsruhe. **A. Krazer.**

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Die allgemeinen Thetafunktionen mit beliebigen Charakteristiken.

Erstes Kapitel.

Definition und Haupteigenschaften der Thetafunktionen.

Zweites Kapitel.

Über ein allgemeines Prinzip der Umformung unendlicher, insbesondere mehrfach unendlicher Reihen und dessen Anwendung auf Thetareihen.

Drittes Kapitel.

Ein zweites allgemeines Prinzip der Umformung unendlicher Reihen und dessen Anwendung auf Thetareihen.

Viertes Kapitel.

Darstellung allgemeiner $2p$-fach periodischer Funktionen durch Thetafunktionen.

Fünftes Kapitel.

Die Transformation der Thetafunktionen.

Sechstes Kapitel.

Die komplexe Multiplikation.

Zweiter Teil.

Die allgemeinen Thetafunktionen mit rationalen Charakteristiken

Siebentes Kapitel.

Die Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus halben Zahlen gebildet sind.

Erster Abschnitt.

Die Charakteristikentheorie.

Zweiter Abschnitt.

Die Additionstheoreme der Thetafunktionen.

Achtes Kapitel.

Die Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus r^{tel} Zahlen gebildet sind.

Dritter Teil.

Die speziellen Thetafunktionen.

Neuntes Kapitel.

Die Abelschen Thetafunktionen.

Zehntes Kapitel.

Die hyperelliptischen Thetafunktionen.

(Fortsetzung siehe Seite VIII.)

Elftes Kapitel.

Die reduzierbaren Abelschen Integrale und die zugehörigen Thetafunktionen.

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fleischer in Göttingen. Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 187 Figuren im Text. gr. 8. 1903. geh. ℳ 8.— In Leinw. geb. ℳ 9.—

Föppl, Prof. Dr. Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I. Band. Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900. geb. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. ℳ 10.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb. n. ℳ 12.—
IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1899.) 2. Aufl. 1901. [XV u. 506 S.] geb. n. ℳ 12.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 14.—

Hensel, K., und **G. Landsberg**, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. ℳ 14.—)

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 10.—

König, Julius, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 18.—, geb. n. ℳ 20.—

Krazer, Dr. Adolf, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.60.

Schenk, Dr. ing. Julius, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 1.60.

Schreber, Dr. K., die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?" und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 3.60.

——— ———, Die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltene Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 55 Abbildungen im Text. [XII u. 342 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—, geb. n. ℳ 6.80.

Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

Wölffing, Dr. Ernst, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1.) [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 15.—

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
Fr. Daniëls, E. Eckhardt, G. Espanet, M. Großmann, R. Güntsche, T. Hayashi, C. Heumann, E. Jahnke, Ed. Janisch, S. Kantor, L. Kiag, A. Kneser, P. Kokott, J. Kraus, H. Kühne, F. London, Ph. Maennchen, E. Malo, L. Matthiessen, O. Meissner, E. Meyer, Fr. Meyer, P. Milan, E. Rehfeld, L. Saalschütz, G. Scheffers, Schoute, D. Sintzow, H. Stahl, O. Staude, W. Velten, E. v. Weber, A. Wendler, G. Zemplén.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner in Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Le[ser] bestens empfehlen.



ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE IN BERLIN

W. FRANZ MEYER IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE IN BERLIN.

6. BAND. 3. UND 4. (DOPPEL-)HEFT.

MIT 27 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 29. OKTOBER 1903.

LEIPZIG UND BERLIN.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASZE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Ludwigskirchstraße 6 I

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 82, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen zunächst etwa 6 Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

Bemerkungen zur Theorie der Abelschen Funktionen.

Von HERMANN STAHL in Tübingen.

Erste Note (zu St. A. F. Einleitung).

Im Sommer 1901 bestand der Plan einer französischen Übersetzung des zweiten Teils meiner Theorie der Abelschen Funktionen (Leipzig, Teubner 1896; zitiert St. A. F.), die Herr A. Tresse, Professor am Collège Rollin zu Paris ausführen wollte, und die im Verlag von Gauthier-Villars erscheinen sollte. Hierfür hatte ich, zum Teil im Verein mit Herrn Tresse, einige Zusätze und Verbesserungen ausgearbeitet, wobei u. a. die wertvollen Winke benutzt wurden, die Herr A. Krazer in seiner Besprechung des Buches (Gött. Gel. Anzeigen 1898, S. 996 bis 1000) gegeben hat. Wenn nun auch die Übersetzung selber aus verschiedenen äußeren Gründen aufgegeben werden mußte, so dürften doch bei der freundlichen Aufnahme, die das Buch gefunden hat, die geplanten Zusätze manchem Leser willkommen und damit ihr Abdruck in diesem Archiv gerechtfertigt sein. Am Schlusse dieser Noten gebe ich ein Inhaltsverzeichnis dieser Umarbeitung der A. F. Herrn Tresse aber möchte ich für alle seine Bemühungen an dieser Stelle nochmals meinen besonderen Dank aussprechen.

Die *erste Note* gibt als Einleitung zur Theorie der Abelschen Funktionen eine etwas *ausführliche Übersicht* über die Riemannsche *Theorie der elliptischen Funktionen*, die sich anschließt an die inzwischen im Druck erschienenen Vorlesungen von Riemann über elliptische Funktionen (Leipzig, Teubner, 1899; zitiert R. E. F.). Meine Absicht ist zugleich, zu zeigen, daß die Riemannsche Behandlung sich sehr wohl zur Einführung in die elliptischen Funktionen eignet. Ich habe dies in Vorlesungen mehrfach erprobt und würde mich freuen, wenn auch andere diese Probe machen wollten.

Elliptische Funktionen.

Erster Teil.

Die Theorie der elliptischen Funktionen kann man in *zwei Abschnitte* teilen, von denen der *erste* sich mit der algebraischen Grundgleichung, den zugehörigen algebraischen Funktionen und den Integralen derselben, den elliptischen Integralen, der *zweite Teil* mit der Lösung des sog. Umkehrproblems oder mit den elliptischen Funktionen und der zu ihrer Darstellung dienenden Thetafunktion beschäftigt.

I. Die *erste Aufgabe*[1]) ist die *Untersuchung der Grundgleichung*, d. h. einer Gleichung zwischen zwei komplexen Variabeln (x, y) vom Grade $n = 3$ und vom Geschlecht $p = 1$:

$$(1) \qquad y^2 = (x, k) = x(1 - x)(1 - k^2 x),$$

wo k eine reelle oder komplexe Größe ist, welche der *algebraische Modul* heißt.

Die Gleichung (1) führt zu *zwei geometrischen Vorstellungen*, die beide wichtig sind. Die *erste* derselben betrachtet als Ort der komplexen Variabeln k nicht die einfache x-Ebene, sondern eine zweiblättrige, im Unendlichen geschlossene Fläche T, in welcher die zweiwertige Funktion $y = \sqrt{(x, k)}$ eindeutig ist, so daß jedem Wertepaar (x, y) oder $\left(x, \sqrt{(x, k)}\right)$ eindeutig ein Punkt dieser Fläche entspricht und umgekehrt. Die Fläche T heißt die Riemannsche *Verzweigungsfläche* der Funktion $y = \sqrt{(x, k)}$; sie hat vier Verzweigungspunkte $0, 1, 1 : k^2, \infty$. Ihre beiden Blätter gehen ineinander über längs zweier Verzweigungslinien, die zwischen 0 und 1 und zwischen $1 : k^2$ und ∞ verlaufen mögen. Die Fläche T ist nicht einfach zusammenhängend, sondern wird erst in eine einfach zusammenhängende Fläche T' verwandelt durch $2p = 2$ Querschnitte a und b (R. E. F. Fig. 1 S. 17). Wir denken uns b im oberen Blatt um die Punkte 0 und 1, a teils im oberen teils im unteren Blatt um die Punkte 1 und $1 : k^2$ gelegt. Ist k^2 reell und kleiner als 1, so lassen sich die Werte von y zu beiden Seiten der reellen Achse im oberen und unteren Blatt von T leicht angeben (R. E. F. Fig. 17 a, b S. 77). Die *zweite geometrische Vorstellung* betrachtet (1) als Gleichung einer *Kurve* vom Grade $n = 3$ und vom Geschlecht $p = 1$ mit komplexen Koordinaten (x, y) und wendet auf sie alle Bezeichnungen an, die bei reellen Kurven gebräuchlich sind. Sie spricht von einer Ebene, der (x, y)-Ebene, in der die Kurve liegt, und nennt ein Wertepaar (x, y), das der Gleichung (1) genügt,

---

1) R. E. F. S. 73—79.

einen Punkt der Kurve u. s. w. Die Deutung von (1) als Kurve läßt eine besonders einfache Ausdrucksweise zu bei algebraischen Fragen und geometrischen Anwendungen, die Darstellung von y durch die Verzweigungsfläche T bietet dagegen besondere Vorzüge bei transcendenten Fragen.

Man kann durch eine funktionentheoretische Untersuchung zeigen, daß jede in T eindeutige (jede wie T verzweigte) Funktion des Ortes, die regulär ist, d. h. die nur in einer endlichen Zahl von Punkten von T und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung unendlich wird, eine *rationale* Funktion von (x, y) oder $\left(x, \sqrt{(x, k)}\right)$ ist.

Diese Untersuchung der Gleichung (1) findet *ihre Verallgemeinerung* in A. F. Abschnitt I.

II. Eine *zweite Aufgabe*[1]) ist die *algebraische Untersuchung* der zu (1) *gehörigen rationalen Funktionen* $R(x, y)$ von (x, y) oder $\left(x, \sqrt{(x, k)}\right)$, die sich in der Form darstellen

$$(2) \qquad R(x, y) = \frac{f(x) + \varphi(x) \cdot \sqrt{(x, k)}}{\sqrt{(x, k)}} = \frac{M + N\sqrt{(x, k)}}{P},$$

wo M, N, P ganze, $f(x)$ und $\varphi(x)$ gebrochene rationale Funktionen von x allein bezeichnen.

Für die Funktion $R(x, y)$ gelten im Gegensatz zu den rationalen Funktionen von x allein folgende Sätze:

1. Die Funktion $R(x, y)$ ist eine eindeutige, analytische Funktion des Ortes in der zweiblättrigen Fläche T; sie wird in einer endlichen Anzahl von Punkten in endlicher Ordnung unendlich. Diese Eigenschaft ist nach dem Obigen charakteristisch für die Funktionen $R(x, y)$ und kann zur Definition derselben dienen.

2. Die Zahl der Punkte, für welche die Funktion $R(x, y)$ in der Fläche T unendlich in erster Ordnung $(= \infty^1)$ und Null in erster $(= 0^1)$ wird, ist die gleiche. Diese Zahl heißt die Ordnung der Funktion $R(x, y)$. Aber die Ordnung m ist nicht willkürlich, sie hat eine untere Grenze $p + 1 = 2$, und die $m 0^1$ und die $m \infty^1$ Punkte der Funktion sind nicht unabhängig voneinander.

3. Eine Funktion $R(x, y)$ von der Ordnung m ist bis auf eine (unbestimmt bleibende) additive Konstante bestimmt, wenn ihre $m \infty^1$ Punkte und von den m zugehörigen Residuen alle mit Ausnahme von einem beliebig gegeben sind. Zwischen den Koordinaten der $m \infty^1$

1) R. E. F. S. 79 und 80. Ausführungen in Zeitschrift f. Math. u. Phys. **45**, 216ff. (1900).

Punkte und den m Residuen besteht *eine* Gleichung, welche das letzte Residuum eindeutig bestimmt.

4. Eine Funktion $R(x, y)$ von der Ordnung m ist bis auf einen (unbestimmt bleibenden) konstanten Faktor bestimmt, wenn ihre 0^1 und ∞^1 Punkte mit Ausnahme von einem derselben beliebig gegeben sind. Zwischen den Koordinaten der $2m$ 0^1 und ∞^1 Punkte besteht *eine* Gleichung, welche den letzten dieser Punkte eindeutig durch die $2m-1$ übrigen bestimmt.

Sind die $m\infty^1$ Punkte $(x_1', y_1'), \ldots, (x_m', y_m')$ von allgemeiner Lage und sind $B_1, \ldots, B_m$ die zugehörigen Residuen, so daß im Punkt (x_i', y_i') $R(x, y)\infty^1$ wird wie $B_i:(x-x_i')$ oder der Ausdruck $R(x, y)-B_i:(x-x_i')$ endlich bleibt, so wird die Funktion $R(x, y)$ dargestellt durch

$$R(x, y) = \frac{B_1}{2y_1'}\frac{y+y_1'}{x-x_1'} + \cdots + \frac{B_m}{2y_m'}\frac{y+y_m'}{x-x_m'} + C_0, \tag{3}$$

und die Bedingungsgleichung zwischen den $2m$ Elementen (x_i', y_i') und B_i lautet:

$$\frac{B_1}{y_1'} + \cdots + \frac{B_m}{y_m'} = 0. \tag{3a}$$

Sind dagegen (x_i', y_i') die $m\infty^1$ Punkte und (x_i^0, y_i^0) die $m\,0^1$ Punkte $(i=1, \ldots, m)$, so wird $R(x, y)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor C) dargestellt durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{y+y_1'}{x-x_1'} & \cdots & \frac{y+y_m'}{x-x_m'} & 1 \\ \frac{y_2^0+y_1'}{x_2^0-x_1'} & \cdots & \frac{y_2^0+y_m'}{x_2^0-x_m'} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{y_m^0+y_1'}{x_m^0-x_1'} & \cdots & \frac{y_m^0+y_m'}{x_m^0-x_m'} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

und die Bedingung zwischen den $2m$ Punkten (x_i', y_i') und (x_i^0, y_i^0) wird erhalten, indem man diese Determinante, gebildet für $(x, y) = (x_1^0, y_1^0)$, gleich Null setzt.

Man kann die Darstellung von $R(x, y)$ durch die ∞^1 und 0^1 Punkte auch in anderer Form geben, die unmittelbar an (2) anknüpft. So läßt sich die Abhängigkeit zwischen diesen $2m$ Punkten darstellen durch die Determinantengleichung $(i, k = 1, \cdots, m)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i' & x_i'^2 & \cdots & x_i'^m & -y_i' & -y_i'x_i' & \cdots & -y_i'x_i'^{m-2} \\ 1 & x_k^0 & x_k^{0\,2} & \cdots & x_k^{0\,m} & +y_k^0 & +y_k^0x_k^0 & \cdots & +y_k^0x_k^{0\,m-2} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Ferner ist der Nenner P der Funktion (2)

$$P = x - x_1' \cdot x - x_2' \cdots x - x_m', \tag{6}$$

und der Zähler $M + Ny$ wird (abgesehen von einem konstanten Faktor C) erhalten, indem man in der Determinante (5) (x_m^0, y_m^0) durch die variabeln Koordinaten (x, y) ersetzt.

Da späterhin x und y als elliptische Funktionen eines Parameters u erscheinen, so enthalten die vorstehenden Sätze und Gleichungen auch wichtige Eigenschaften und Darstellungen der elliptischen Funktionen (s. Nr. V).

Diese Untersuchungen über die rationalen Funktionen von (x, y) und besonders die Darstellungen (3) und (4) finden ihre Verallgemeinerung in der zweiten Note.

III. *Eine dritte Aufgabe*[1]) *ist die Untersuchung der Integrale der Funktionen* $R(x, y)$, *der sog. elliptischen Integrale,* die sich (abgesehen von Integralen rationaler Funktionen von x allein) nach (2) darstellen in der Form

$$\int^x \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(x, k)}}, \tag{7}$$

wo $f(x)$ eine gebrochene, rationale Funktion von x ist.

Die charakteristischen Eigenschaften der Integrale (7) als Funktionen von x sind folgende:

1. Die Funktion (7) kann in einzelnen Punkten von T ebensowohl algebraisch wie auch logarithmisch unendlich werden.

2. Die Funktion (7) ist in der Fläche T eine unendlich vieldeutige Funktion des Ortes, derart, daß sie, wenn der Integrationsweg die Querschnitte a und b überschreitet, um gewisse Konstanten A und B, die sog. *Periodicitätsmoduln* wächst.

Sind logarithmische Unstetigkeitspunkte vorhanden, so treten noch weitere Periodicitätsmoduln hinzu.

Das allgemeine elliptische Integral (7) läßt sich in einfachere Integrale zerlegen, nämlich in

Integrale 1. Gattung, d. h. solche, die in allen Punkten von T endlich bleiben,

Integrale 2. Gattung, d. h. solche, die in einem Punkt von T algebraisch unendlich werden,

Integrale 3. Gattung, d. h. solche, die in zwei Punkten von T logarithmisch unendlich werden.

---

1) R. E. F. S. 79—86.

Es gibt (entsprechend dem Geschlecht $p = 1$) *ein Integral erster Gattung*, nämlich:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{(x, k)}}. \tag{8}$$

Die Periodicitätsmoduln desselben $2K$ und $2iK'$ an den Querschnitten a und b sind bestimmt durch

$$K = \int_0^1 du; \quad iK' = \int_0^\infty du = \int_1^{1/k^2} du; \quad K + iK' = \int_0^{1/k^2} du. \tag{9}$$

Die Grenzen in diesen abgekürzt geschriebenen Integralen beziehen sich auf die Variable x (ähnlich in (11) u. s. w.). Da K und K' nur von einer Größe k abhängen, so sind sie nicht unabhängig voneinander. Man hat indeß nur (8) mit einem beliebigen konstanten Faktor zu multiplizieren, um ein Integral zu erhalten, dessen Periodicitätsmoduln voneinander abhängig sind (vgl. auch Nr. IX).

Ist k^2 reell und < 1, so sind K und K' ebenfalls reell; ist k^2 komplex, so sind auch K und K' komplex. Man kann beweisen, daß, wie auch k^2 beschaffen sei, der reelle Teil des Quotienten $K' : K$ stets positiv ist, daß also der absolute Wert der später zu benutzenden Größe $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ stets < 1 ist.

Es gibt ferner *mannigfaltige Integrale zweiter* und *dritter Gattung;* so stellen

$$t = \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{(x, k)}}, \quad w = \int_0^x \frac{\sqrt{(x_0, k)}}{\sqrt{(x, k)}} \frac{dx}{x - x_0} \tag{10}$$

ein Integral zweiter Gattung mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkt ($x = \infty$, $y = \infty$) und ein Integral dritter Gattung mit den beiden logarithmischen Unstetigkeitspunkten (x_0, y_0) und $(x_0, -y_0)$ dar.

Untersucht man die Beziehungen, die zwischen einem elliptischen Integral und einer rationalen Funktion sowie deren Unstetigkeitspunkten stattfinden, so erhält man eine Reihe von Gleichungen und Sätzen, die das *Abelsche Theorem* bilden. Für das *Integral erster Gattung* lautet dasselbe:

Sind (x_i^0, y_i^0) und (x_i', y_i') zwei Punktsysteme, für welche eine rationale Funktion $R(x, y)$ von der Ordnung m die Werte 0^1 und ∞^1 annimmt, so ist die Summe der m Integrale erster Gattung,

genommen zwischen diesen zwei Punktsystemen, kongruent 0, d. h. es ist

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{x_i^0}^{x_i'} du \equiv 0 \pmod{2K,\ 2iK'}. \tag{11}$$

Der Beweis folgt sehr einfach aus der Gleichung (3a).[1])

Es gilt zugleich der umgekehrte Satz:

Sind zwei Punktsysteme (x_i^0, y_i^0) und $(x_i', y_i')\,(i = 1, \cdots, m)$ so beschaffen, daß sie der Kongruenz (11) genügen, so sind die m Punkte (x_i^0, y_i^0) die 0^1 Punkte und die m Punkte (x_i', y_i') die ∞^1 Punkte einer bestimmten rationalen Funktion $R(x, y)$.

Nach diesem Doppelsatz sind die algebraische Gleichung (5) und die transcendente Gleichung (11) vollständig gleichwertig.

Wir geben ein später zu benutzendes Beispiel. Setzt man

$$\int_0^{\xi} du \equiv \int_0^{x_1} du + \int_0^{x_2} du \quad \text{oder} \quad \int_0^{x_1} du + \int_{\xi}^{x_2} du \equiv 0, \tag{12}$$

so erhält man die dieser transcendenten Gleichung äquivalente, algebraische Gleichung, wenn man in (5) $(x_1^0, y_1^0) = (0, 0)$; $(x_2^0, y_2^0) = (\xi, \eta)$; $(x_1', y_1') = (x_1, y_1)$; $(x_2', y_2') = (x_2, y_2)$ setzt, es kommt:

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi^2 & -\eta \\ x_1 & x_1^2 & y_1 \\ x_2 & x_2^2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{12a}$$

Das Abelsche Theorem für das Integral erster Gattung läßt sich geometrisch deuten und führt zu wichtigen Sätzen über die Wendepunkte der Kurve (1) und über Schnitt- und Berührungs-Systeme der Kurve (1) mit anderen algebraischen Kurven.

Für die Integrale *zweiter* und *dritter Gattung* lautet *das Abelsche Theorem:*

Sind (x_i^0, y_i^0) und (x_i', y_i') die 0^1 und ∞^1 Punkte einer rationalen Funktion $R(x, y)$ der $m$ten Ordnung, so ist die zwischen ihnen genommene Integralsumme für jedes Integral zweiter Gattung gleich einer rationalen Funktion der Koordinaten des Unstetigkeitspunktes dieses Integrals und für jedes Integral dritter Gattung gleich dem Logarithmus einer rationalen Funktion der Koordinaten der beiden Unstetigkeitspunkte dieses Integrals.

---

1) Zeitschrift für Math. und Phys. **45**, 224.

Als Beispiele führen wir die der Gleichung (12) entsprechende Gleichung für das Integral zweiter Gattung (10) an[1]):

$$(13)\qquad \int_0^{\xi}\frac{x\,dx}{2y} \equiv \int_0^{x_1}\frac{x\,dx}{2y} + \int_0^{x_2}\frac{x\,dx}{2y} + \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

und für das Integral dritter Gattung (10):

$$(14)\qquad \int_0^{\xi}\frac{y_0}{y}\,\frac{dx}{x-x_0} \equiv \int_0^{x_1}\frac{y_0}{y}\,\frac{dx}{x-x_0} + \int_0^{x_2}\frac{y_0}{y}\,\frac{dx}{x-x_0} + \log R_{x_0 y_0},$$

wo R_{xy} der Quotient

$$(14\,\text{a})\qquad R_{xy} = \begin{vmatrix} x & x^2 & -y \\ x_1 & x_1^2 & y_1 \\ x_2 & x_2^2 & y_2 \end{vmatrix} : (x - x_1)(x - x_2).$$

Die vorstehenden Untersuchungen über die elliptischen Integrale finden ihre *Verallgemeinerung* in St. A. F. Abschnitt III.

IV. Eine *vierte Betrachtung*[2]) dient zur *Erweiterung der erlangten Resultate.*

Ist statt der Gleichung (1) die allgemeinere Gleichung zwischen (x_1, y_1) gegeben

$$(15)\quad y_1^2 = c_0 x_1^4 + 4c_1 x_1^3 + 6c_2 x_1^2 + 4c_3 x_1 + c_4 = c_0(x_1 - a_0)(x_1 - a_1)(x_1 - a_2)(x_1 - a_3),$$

so kann man diese auf die *Normalform* (1)

$$(15\,\text{a})\qquad y^2 = x \cdot 1 - x \cdot 1 - k^2 x = k^2 x^3 - (1 + k^2)x^2 + x$$

bringen durch die bilineare Substitution zwischen x und x_1

$$(16)\qquad x = \frac{x_1 - a_0}{x_1 - a_3} \cdot \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_0},$$

durch welche den Werten

$$x_1 = a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

bez. die Werte

$$x = 0 \quad 1 \quad 1/k^2 \quad \infty$$

zugeordnet werden, wobei $1 : k^2$ durch die Gleichung

$$(16\,\text{a})\qquad \frac{1}{k^2} = \frac{a_2 - a_0}{a_2 - a_3} \cdot \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_0},$$

---

1) Ausführungen in der Dissertation von Curt Hoffmann (Tübingen 1904).

2) R. E. F. S. 11—15 u. S. 87—91.

also durch das Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte von y_1 in (15) bestimmt ist. Die Vergleichung von (15) und (15a) ergibt alsdann für y einen Ausdruck von der Form

$$(17) \qquad y = \frac{C y_1}{x_1 - a_3},$$

wo C eine leicht zu bestimmende Konstante ist.

Die Gleichungen (16) und (17) bilden eine sog. *eindeutige rationale Transformation* d. h. eine Transformation, bei der sich ebensowohl (x, y) rational durch (x_1, y_1) ausdrückt wie umgekehrt (x_1, y_1) durch (x, y). Die eindeutige Transformation läßt stets die sog. *absolute Invariante* J_1 der Gleichung oder Kurve (15) ungeändert. Es hat nämlich J_1 den Wert

$$J_1 = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2},$$

wo

$$g_2 = c_0 c_4 - 4 c_1 c_3 + 3 c_2^2; \quad g_3 = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Bildet man den entsprechenden Wert J für (15a), indem man $c_0 = 0$, $c_1 = \frac{k^2}{4}$, $c_2 = -\frac{1}{6}(1 + k^2)$, $c_3 = \frac{1}{4}$, $c_4 = 0$, also, wenn $k'^2 = 1 - k^2$,

$$(18) \qquad J = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4}$$

setzt, so folgt aus (16a), daß $J_1 = J$ ist. Durch die eindeutige Transformation (16), (17) geht jedes Integral der ersten, zweiten und dritten Gattung in (x_1, y_1) über in ein ebensolches Integral gebildet in (x, y), so daß die Theorie der an (15) anknüpfenden Funktionen auf die Theorie der zur Normalform (15a) gehörigen Funktionen zurückgeführt ist.

Man kann dies Resultat *verallgemeinern* und zeigen, daß durch eine eindeutige Transformation

$$(19) \qquad x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y),$$

wo φ und ψ rationale Funktionen von (x, y) sind von der Beschaffenheit, daß sich aus (19) mit Hilfe von (1) auch x und y als rationale Funktionen von (x_1, y_1) darstellen, die Gleichung (1) übergeht in eine Gleichung $F_1(x_1, y_1) = 0$ von einem gewissen Grade n_1, aber von demselben Geschlecht $p = 1$, deren absolute Invariante gleich der absoluten Invariante (18) von (1) ist, und daß umgekehrt durch eindeutige Transformation jede Gleichung vom beliebigen Grade n_1 und vom Geschlecht

$p = 1$ in die Normalform (1) mit der gleichen absoluten Invariante übergeführt werden kann. Geometrisch stellt $F_1(x_1, y_1) = 0$ eine Kurve vom Grade n_1 mit $\frac{1}{2}n_1(n_1 - 3)$ Doppelpunkten (oder äquivalenten Singularitäten) dar. Durch eindeutige Transformation erhält man daher auch die Theorie der zu einer solchen Kurve $F_1 = 0$ gehörigen elliptischen Funktionen und Integrale. So führt z. B. das Abelsche Theorem für das zu $F_1 = 0$ gehörige Integral erster Gattung zu Sätzen über die Wendepunkte von $F_1 = 0$ oder über Schnitt- und Berührungs-Systeme der Kurve $F_1 = 0$ mit anderen algebraischen Kurven.[1])

Diese Untersuchungen über die *eindeutige Transformation* finden ihre *Verallgemeinerung* in St. A. F. Abschnitt IV.

Zweiter Teil.

Der zweite Teil der Theorie der elliptischen Funktionen beschäftigt sich mit der *Lösung des sog. Umkehrproblems* oder mit der *Theorie der elliptischen Funktionen selbst.* Ihre Definition ist folgende.

Setzt man das elliptische Integral erster Gattung gleich einer komplexen Variabeln u, also

$$(19) \qquad \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{(x,k)}} = u,$$

so besteht das gleichzeitig von Abel und Jacobi aufgestellte und gelöste Umkehrproblem darin, x und y als Funktionen von u

$$(20) \qquad x = f(u), \quad y = \sqrt{(x,k)} = \tfrac{1}{2}f'(u)$$

und allgemein eine beliebige rationale Funktion von (x, y) in u darzustellen. Alle diese Funktionen heißen *elliptische Funktionen des Argumentes u.* Sie besitzen im Gegensatz zu den elliptischen Integralen sehr einfache Eigenschaften.

V. Wir geben zuerst eine *allgemeine Übersicht über diese fundamentalen Eigenschaften*[2]), die man, ohne die analytische Darstellung zu kennen, allein aus der Definition (19), (20) und den Sätzen des ersten Teiles ableiten kann.

Hierzu bilde man die zweiblättrige Verzweigungsfläche T', nachdem sie durch die Querschnitte a, b einfach zusammenhängend gemacht ist, mittels der Gleichung (19) auf die Ebene der komplexen Variabeln

---

1) Clebsch, Journ. für Math. **64**, 210 ff. (1864). Vgl. Clebsch-Lindemann, Geometrie I. S. 903—904.

2) R. E. F. S. 20—25.

u ab. *Diese Abbildung* ist eindeutig und konform und nur unähnlich in den vier Verzweigungspunkten von T', in welchen die Funktion $du:dx$ gleich 0 oder ∞ wird. Da die Begrenzung von T' aus den Rändern der Querschnitte a und b besteht, an denen u konstante Wertdifferenzen (die Periodicitätsmoduln $2K$ und $2iK'$) hat, und da u innerhalb T' nicht unendlich wird, so führt die Abbildung von T' auf ein Parallelogramm P, das ganz im Endlichen der u-Ebene liegt und dessen Ecken die Abstände $2K$ und $2iK'$ haben.

Ist k^2 beliebig komplex, also $2K$ und $2iK'$ ebenfalls komplex, so ist bei beliebiger Lage der Querschnitte a, b das Parallelogramm P schiefwinklig und seine Seiten sind im allgemeinen krummlinig. Doch können sich nie zwei Seiten von P in einem Punkte u schneiden. Denn andernfalls müßten demselben Werte u zwei verschiedene Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) von T' entsprechen, oder es müßte $\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{2\sqrt{(x, k)}} \equiv 0$ sein d. h. es müßte nach der Umkehrung des Abelschen Theorems (Nr. III) eine rationale Funktion von (x, y) geben, die nur einen 0^1 Punkt (x_0, y_0) und einen ∞^1 Punkt (x_1, y_1) hätte, was nach Nr. II unmöglich ist.[1])

Ist k^2 reell und < 1, also K und K' reell, so kann man die Abbildung genauer angeben. Läßt man die Querschnitte b und a längs der geraden Strecken $0 \dots 1$ und $1 \dots 1/k^2$ verlaufen, so wird das Parallelogramm P ein geradliniges Rechteck von den Seitenlängen $2K$ und $2iK'$. Läßt man dem Punkt $x = 0$ den Wert $u = 0$ entsprechen, so erhält man die in R. E. F. S. 24 gegebene Figur 10, in der zugleich die vier durch die reelle Achse getrennten Halbebenen der Fläche T' durch vier kleine Rechtecke abgebildet sind. Beginnt man die Abbildung mit einem anderen der unendlich vielen Werte $u = m2K + n2iK'$, die dem Punkt $x = 0$ entsprechen, so überdeckt sich die u-Ebene mit einem Netz von unendlich vielen mit P kongruenten Rechtecken, wodurch die Wertsysteme der Funktion $x = f(u)$ in der ganzen u-Ebene festgelegt werden.

Aus dieser Abbildung ergeben sich unmittelbar die *fundamentalen Eigenschaften der elliptischen Funktionen* (20), nämlich:

1. Die Funktion $x = f(u)$ (und $y = \frac{1}{2} f'(u)$) ist *eindeutig* im Parallelogramm P und ebenso in der ganzen u-Ebene; sie ist ferner *stetig* in P und in der u-Ebene mit Ausnahme der Punkte $u \equiv iK' =$

---

1) Hierdurch erledigt sich wohl das Bedenken, das Herr Burkhardt in seinen funktionentheoretischen Vorlesungen (Leipzig 1899. II. S. 30) äußert.

$iK' + m2K + n2iK'$, in welchen $x = \infty^2$, $y = \infty^3$ wird. Nur im Punkt $u = \infty$ verhalten sich x und y wesentlich singulär.

2. Die Funktion $x = f(u)$ (und $y = \frac{1}{2}f'(u)$) ist *doppelt periodisch*, d. h. sie besitzt zwei Perioden $2K$ und $2iK'$, die mit den Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung übereinstimmen; es ist

$$f(u + 2K) = f(u), \quad f(u + 2iK') = f(u). \tag{21}$$

Die Abbildung ergibt weiter: $x = f(u)$ ist eine gerade, $y = \frac{1}{2}f'(u)$ eine ungerade Funktion von u. Ferner ist x von der zweiten, y von der dritten Ordnung d. h. es nimmt x in P jeden Wert zweimal, y jeden Wert dreimal an. Endlich folgt, daß auch jede rationale Funktion R von (x, y) eine doppelt periodische Funktion von u mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ und von einer bestimmten Ordnung m ist (vgl. Nr. II). Man kann umgekehrt (mittels der Methoden von R. E. F. Abschnitt I) zeigen, daß die allgemeinste doppelt periodische Funktion $F(u)$ von u mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ eine rationale Funktion von zwei doppelt periodischen Funktionen $x = f(u)$ und $y = \frac{1}{2}f'(u)$ mit denselben Perioden ist, die in der Abhängigkeit $y^2 = x \cdot \overline{1 - x} \cdot \overline{1 - k^2x}$ stehen.

3. Die Funktion $x = f(u)$ besitzt ein *algebraisches Additionstheorem*, d. h. die Funktion $f(u_1 + u_2)$ drückt sich algebraisch aus durch die Funktionen $f(u_1)$ und $f(u_2)$ oder rational durch $f(u_1)$, $f(u_2)$ und die Ableitungen $f'(u_1)$, $f'(u_2)$. Ein entsprechendes Additionstheorem gilt für $y = \frac{1}{2}f'(u)$ und für jede rationale Funktion $R(x, y)$.

Der analytische Ausdruck für das Additionstheorem von $x = f(u)$ folgt aus dem Abelschen Theorem und ist enthalten in Gl. (27) (s. unten). Allgemein ergibt sich der Satz schon aus der doppelten Periodicität (vgl. R. E. F. S. 9).

Es ist nun besonders wichtig, daß die Eigenschaften der Funktionen (20) auch noch mit geringen Abänderungen gelten für die *drei Wurzelfunktionen* $\sqrt{x}$, $\sqrt{1 - x}$, $\sqrt{1 - k^2x}$, die in *weiterem Sinne elliptische Funktionen* heißen und bezeichnet werden durch

$$\sqrt{x} = \operatorname{sn} u, \quad \sqrt{1 - x} = \operatorname{cn} u, \quad \sqrt{1 - k^2x} = \operatorname{dn} u. \tag{22}$$

Da sich die analytische Darstellung wesentlich an diese drei Funktionen anschließt, gehen wir auf ihre Eigenschaften, die sich ebenfalls unmittelbar aus den Sätzen des ersten Teiles ableiten lassen, noch näher ein.[1])

---

1) R. E. F. S. 25—27 und S. 92—98.

1. Die Funktionen (22) sind in der ganzen u-Ebene *eindeutig*, mit Ausnahme einzelner Punkte *stetig* und nur im Punkt $x = \infty$ wesentlich singulär.

2. Die *Ableitungen der Funktionen* (22) drücken sich einfach durch diese Funktionen selber aus, es ist

$$(23) \quad \frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d \operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d \operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

3. Die Funktionen (22) sind *teils gerade, teils ungerade*; es ist

$$(24) \quad \operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn}(u), \quad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u.$$

4. Die 0^1 *und* ∞^1 *Punkte* der Funktionen (22) in der u-Ebene sind, wenn $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$(25) \quad \begin{cases} \operatorname{sn} u = 0^1, & \text{für} \quad u = 2mK + 2niK', \\ \operatorname{cn} u = 0^1, & \text{„} \quad u = (2m+1)K + 2niK', \\ \operatorname{dn} u = 0^1, & \text{„} \quad u = (2m+1)K + (2n+1)iK', \\ \operatorname{sn} u,\ \operatorname{cn} u,\ \operatorname{dn} u = \infty^1, & \text{„} \quad u = 2mK + (2n+1)iK'. \end{cases}$$

5. Für die Funktionen (22) gelten folgende *Periodicitätsformeln* (m, n ganze Zahlen):

$$(26) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u + m2K + n2iK') = (-1)^m \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + m2K + n2iK') = (-1)^{m+n} \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + m2K + n2iK') = (-1)^n \operatorname{dn} u, \end{cases}$$

welche zeigen, daß die Funktionen (22) bei Vermehrung von u um $2K$ oder $2iK'$ höchstens ihre Zeichen ändern oder auch, daß sie selbst doppeltperiodisch sind und bez. die Perioden $(4K, 2iK')$, $(4K, 2K + 2iK')$, $(2K, 4iK')$ besitzen.

6. Die Funktionen (22) besitzen ein *algebraisches* oder *rationales Additionstheorem* in dem oben angegebenen Sinne; es ist z. B.:

$$(27) \quad \operatorname{sn}(u_1 \pm u_2) = \frac{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \pm \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_1 \operatorname{dn} u_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 \operatorname{sn}^2 u_2}.$$

Der Beweis[1]) folgt leicht aus der Äquivalenz der Gleichungen (12) und (12a). Man hat nur, was eine kleine Rechnung erfordert, die Gleichung (12a) auf die Form zu bringen

$$\sqrt{\xi} = \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-k^2x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-k^2x_1}}{1-k^2x_1x_2}$$

und aus (12) die Werte einzuführen

$$\sqrt{x_1} = \operatorname{sn} u_1, \quad \sqrt{x_2} = \operatorname{sn} u_2, \quad \sqrt{\xi} = \operatorname{sn}(u_1 + u_2).$$

1) Auch in Zeitschrift für Math. u. Phys. **45**, 226.

7. Man kann endlich leicht die *Fundamentalwerte* der Funktionen (22) für halbe Perioden $u = K,\ iK',\ K + iK'$ und für Viertelperioden $u = \frac{K}{2},\ \frac{iK'}{2},\ \frac{K+iK'}{2}$ angeben und kann *Verwandlungsformeln* aufstellen, welche zeigen, daß jede der Funktionen (22) sich bei Vermehrung von u um halbe Perioden $K,\ iK',\ K + iK'$ einfach durch die ursprünglichen Funktionen ausdrückt.

Das Umkehrproblem erstreckt sich nicht nur auf die Darstellung der elliptischen Funktionen, sondern auch die der *elliptischen Integrale,* insbesondere der Integrale zweiter und dritter Gattung. Die Eigenschaften dieser Integrale treten nämlich am schärfsten hervor und ihre Berechnung wird am leichtesten, wenn man sie nicht als Funktionen von (x, y), sondern durch Vermittelung des Integrals erster Gattung (19) als *Funktionen von* u auffaßt. Wir bezeichnen die in (10) erhaltenen *Integrale als Funktionen von* u durch

$$(28)\qquad \int_0^x \frac{k^2 x\, dx}{2y} = \mathfrak{Z}(u),\quad \int_0^x \frac{y_0}{y}\frac{dx}{x - x_0} = P(u, u_0).$$

Auch für sie kann man allein aus der Definition (28) und den Sätzen des ersten Teiles die fundamentalen Eigenschaften herleiten.

1. Die Funktionen (28) besitzen *periodische Eigenschaften,* d. h. ändert man das Argument u um $2K$ oder $2iK'$, so ändern sich die Funktionen (28) um konstante Größen, nämlich um die Periodicitätsmoduln der Integrale (28).

Dies folgt aus dem Verhalten der Integrale (28) als Funktionen von (x, y) an den Querschnitten $a,\ b$ der Verzweigungsfläche T'.

2. Die Funktionen (28) besitzen ein *Additionstheorem* derart, daß jede dieser Funktionen, gebildet mit dem Argument $u_1 + u_2$ sich ausdrückt durch dieselbe Funktion, gebildet mit den Einzelargumenten u_1 und u_2, in Verbindung mit einer algebraischen Funktion oder dem Logarithmus einer solchen Funktion.

Dies folgt unmittelbar aus dem Abelschen Theorem für die Integrale (28), das in den Gleichungen (13) und (14) enthalten ist. Führt man dort statt der Integrale die Funktionen (28) von u ein, so erhält man die *Additionsformel der Funktionen* $\mathfrak{Z}(u)$ und $P(u, u_0)$:

$$(29)\quad \mathfrak{Z}(u_1+u_2) - \mathfrak{Z}(u_1) - \mathfrak{Z}(u_2) = k^2 \cdot \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{x_1 y_2 - y_1 x_2} = k^2 \cdot \operatorname{sn} u_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn}(u_1 + u_2),$$

$$(30)\qquad P(u_1 + u_2, u_0) - P(u_1, u_0) - P(u_2, u_0) = \log R_{x_0 y_0}.$$

Auf der rechten Seite der letzten Gleichungen kann man statt x_0, x_1, x_2 aus (20) die elliptischen Funktionen mit den Argumenten u_0, u_1, u_2 einführen.

Diese Übersicht über die fundamentalen Eigenschaften der elliptischen Funktionen findet ihre *Verallgemeinerung für Abelsche Funktionen* in der dritten Note.

Es handelt sich nun darum, das *Umkehrproblem im einzelnen* durchzuführen und vor allem die im vorigen definierten elliptischen Funktionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ und die elliptischen Integrale $\mathfrak{Z}(u)$ und $P(u, u_0)$ durch *analytische, für alle Werte von u gültige Ausdrücke* wirklich darzustellen. Dies geschieht durch eine einzige Funktion von u, nämlich die von *Jacobi eingeführte Thetafunktion*, die im Mittelpunkt der folgenden Theorie steht.

VI. Die *erste Aufgabe*[1]) ist die *Herleitung der Thetafunktion und ihrer Eigenschaften.* Wir gehen aus von den drei elliptischen Funktionen (22), die leicht darzustellen sind, weil von ihnen außer den Perioden auch die 0^1 und ∞^1 Punkte unmittelbar gegeben sind (25). Man erhält die Thetafunktionen, indem man doppelt unendliche Produkte bildet, welche bez. in diesen Punkten (25) verschwinden. Diese Produkte lassen sich durch Einführung der Exponentialfunktion in einfach unendliche Produkte und weiter in einfach unendliche Summen verwandeln. Setzt man zur Abkürzung

$$(31)\qquad \begin{cases} u = 2Kv, \quad s = e^{2i\pi v} = e^{\frac{i\pi u}{K}}, \\ \tau = \dfrac{iK'}{K}, \quad q = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \quad Q_0 = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n}), \end{cases}$$

so ist die *Produktform der vier Thetafunktionen* (wenn n alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ durchläuft):

$$(32)\qquad \begin{cases} \Theta_1(u) = \vartheta_1(v) = 2q^{1/4}\sin\pi v\, Q_0\prod\limits^{n}(1 - 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}), \\ \Theta_2(u) = \vartheta_2(v) = 2q^{1/4}\sin\pi v\, Q_0\prod\limits^{n}(1 + 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}), \\ \Theta_3(u) = \vartheta_3(v) = \qquad Q_0\prod\limits^{n}(1 + 2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}), \\ \Theta(u) = \vartheta(v) = \qquad Q_0\prod\limits^{n}(1 - 2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}). \end{cases}$$

---

1) R. E. F. S. 35–42 u. S. 99–105.

Hieraus ergibt sich als *Summenform* der *vier Thetafunktionen* (wenn n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft):

$$(33)\quad \begin{cases} \Theta_1(u) = \vartheta_1(v) = 2\sum\limits^{n} (-1)^{n-1} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n-1)\pi v, \\ \Theta_2(u) = \vartheta_2(v) = 2\sum\limits^{n} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n-1)\pi v, \\ \Theta_3(u) = \vartheta_3(v) = 1 + 2\sum\limits^{n} q^{n^2} \cos 2n\pi v, \\ \Theta(u) \;\; = \vartheta(v) \;\; = 1 + 2\sum\limits^{n} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi v. \end{cases}$$

Die Konvergenz der Produkte (32) und der Summen (33) beruht darauf, daß der absolute Wert $|q| < 1$ ist (s. Nr. III).

Man bezeichnet die vier Thetafunktionen auch bez. durch $\Theta_{11}(u)$, $\Theta_{10}(u)$, $\Theta_{00}(u)$, $\Theta_{01}(u)$ und nennt die Zahlenkomplexe 11, 10, 00, 01 ihre *Charakteristiken*. Die Größe τ heißt der *Thetamodul*.

Die Thetafunktionen haben folgende *charakteristische* und leicht zu beweisende *Eigenschaften*.

1. Sie sind *eindeutig* und für alle endlichen Werte von u *stetig*.

2. Von den Funktionen (32) oder (33) ist die erste eine *ungerade*, die drei anderen sind *gerade* Funktionen von u oder v.

3. Die 0[1] *Punkte der Thetafunktionen* in der u-Ebene sind (wenn $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$):

$$(34)\quad \begin{cases} \Theta_1(u) = 0, & \text{für } u = 2mK + 2niK', \\ \Theta_2(u) = 0, & \;\;\text{„} \quad u = (2m+1)K + 2niK', \\ \Theta_3(u) = 0, & \;\;\text{„} \quad u = (2m+1)K + (2n+1)iK', \\ \Theta(u) \;= 0, & \;\;\text{„} \quad u = 2mK + (2n+1)iK'. \end{cases}$$

4. Es gelten *Periodicitätsformeln*, die zeigen, daß sich die Thetafunktionen bei Vermehrung von u um eine der Größen $2K$ oder $2iK'$ nur um gewisse Exponentialfaktoren ändern. Wir führen als Beispiele an die Gleichungen:

$$(35)\quad \Theta(u \pm 2K) = \Theta(u), \quad \Theta(u \pm 2iK') = -q^{-1} e^{\mp\frac{i\pi u}{K}}\, \Theta(u).$$

5. Es gelten *Verwandlungsformeln*, die zeigen, daß jede Thetafunktion aus jeder andern sich ableiten läßt durch Vermehrung von u um eine der halben Perioden K, iK', $K + iK'$. Wir führen als Beispiel an:

$$(36)\quad \Theta_1(u) = \Theta_2(u+K) = -iq^{1/4} e^{\frac{i\pi u}{K}}\, \Theta(u+iK') = -iq^{1/4} e^{\frac{i\pi u}{K}}\, \Theta_3(u+K+iK').$$

6. Die Thetafunktionen besitzen gewisse *Additionstheoreme*, die wir später angeben. (Vgl. Gl. 46, 47, 48.)

Die vorstehenden Untersuchungen über die Thetafunktionen finden ihre *Verallgemeinerung* in St. A. F. Abschnitt V.

VII. *Die zweite Aufgabe*[1]) *betrifft die Lösung des Umkehrproblems*, d. h. die *Darstellung der elliptischen Funktionen* $\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}$, $\sqrt{1-k^2x}$ durch u. Indem man aus den Thetafunktionen (33) Quotienten bildet, welche dieselbe Periodicität und dieselben Nullpunkte besitzen, wie die elliptischen Funktionen, erhält man für diese die Darstellung:

$$(37)\quad \sqrt{x} = A_1 \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}, \quad \sqrt{1-x} = A_2 \frac{\Theta_2(u)}{\Theta(u)}, \quad \sqrt{1-k^2x} = A_3 \frac{\Theta_3(u)}{\Theta(u)},$$

wo A_1, A_2, A_3 von u unabhängige Konstanten sind.

Denn die Funktion $\sqrt{x}$ hat an den Querschnitten a und b bez. die Faktoren -1 und $+1$; sie wird $= 0^1$ im Punkt $(x = 0,\ y = 0)$, $= \infty^1$ im Punkt $(x = \infty,\ y = \infty)$. Dieselben Faktoren und dieselben 0^1 und ∞^1 Punkte hat der Thetaquotient $\Theta_1(u) : \Theta(u)$. Der Quotient beider Funktionen ist daher eine von x oder u unabhängige Konstante A_1.

Setzt man zur Abkürzung

$$(38)\quad \left(\frac{d\Theta_1(u)}{du}\right)_{u=0} = \Theta_1'; \quad \Theta_2(0) = \Theta_2; \quad \Theta_3(0) = \Theta_3; \quad \Theta(0) = \Theta$$

und macht in (37) die Substitutionen $u = 0,\ K,\ K + iK'$, so erhält man für A_1, A_2, A_3 die Werte

$$(39)\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{\Theta}{\Theta_1'} = \dfrac{\Theta_3}{\Theta_2} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\Theta_2}{\Theta_3} = \dfrac{1}{\sqrt{k}}, \\ A_2 = \dfrac{k'\Theta_3}{\Theta_1'} = \dfrac{\Theta}{\Theta_2} = \dfrac{k'}{k}\dfrac{\Theta_2}{\Theta} = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}, \\ A_3 = \dfrac{k'\Theta_2}{\Theta_1'} = \dfrac{\Theta}{\Theta_3} = k'\dfrac{\Theta_3}{\Theta} = \sqrt{k'}. \end{cases}$$

Zugleich drücken sich in (39) die Quotienten der Größen Θ_1', Θ_2, Θ_3, Θ algebraisch durch k und k' aus. Mittels der Gleichungen (39) kann man die Größe q oder den Thetamodul τ annähernd aus dem algebraischen Modul k berechnen, während die Gleichungen (37) zur Berechnung von u dienen können, wenn x gegeben ist.

Setzt man $u = 0$, so folgt aus den Produkten (32) eine Beziehung zwischen den Größen Θ_2, Θ_3, Θ und Θ_1', nämlich

$$(40)\quad \pi\Theta_1\Theta_2\Theta_3 = 2K\Theta_1'.$$

---

1) R. E. F. S. 35—42 u. S. 106—108.

Verbindet man diese Gleichung mit (39), so ergeben sich Relationen, welche die Werte $\Theta_i : \sqrt{K}$ und $\Theta_1' : \sqrt{K}$ rein algebraisch durch die Größe k darstellen, nämlich

$$(41) \quad \Theta_1' = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\sqrt{kk'}; \quad \Theta_2 = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\sqrt{k}; \quad \Theta_3 = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}; \quad \Theta = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\sqrt{k'}.$$

Diese Gleichungen dienen zur angenäherten Berechnung der Perioden $2K$ und $2iK'$ aus k und dem vorher berechneten Werte von q oder τ.

Aus (41) erhält man eine *Thetarelation mit dem Argument* 0:

$$(42) \qquad \Theta^4 + \Theta_2^4 = \Theta_3^4$$

und aus (37) *drei Thetarelationen mit dem Argument* u, nämlich:

$$(43) \qquad \begin{cases} \Theta^2\Theta_2^2(u) + \Theta_3^2\Theta_1^2(u) = \Theta_2^2\Theta^2(u), \\ \Theta^2\Theta_3^2(u) + \Theta_2^2\Theta_1^2(u) = \Theta_3^2\Theta^2(u), \\ \Theta^2\Theta^2(u) + \Theta_2^2\Theta_2^2(u) = \Theta_3^2\Theta_3^2(u). \end{cases}$$

Die vorstehende Lösung des Umkehrproblems findet ihre *Verallgemeinerung* in St. A. F. Abschnitt VI.

VIII. Die Thetafunktionen bilden nicht nur die Grundlage für die Lösung des Umkehrproblems; sie beherrschen auch alle weiteren Darstellungen in der Theorie der elliptischen Funktionen, da man, wie schon früher bemerkt, nicht nur rationale Funktionen von (x, y), sondern auch die Integrale derselben, die elliptischen Integrale, am zweckmäßigsten nicht als Funktionen von (x, y), sondern als Funktionen von u auffaßt.

Die *dritte Aufgabe*[1]) bezieht sich daher auf die *Darstellung der allgemeinsten rationalen Funktionen von* (x, y), entweder durch Quotienten, gebildet aus Produkten von Thetafunktionen, oder durch Summen, gebildet aus den Ableitungen der Logarithmen von Thetafunktionen. Ferner auf die *Darstellung des Integrals 3. Gattung* mit der oberen Grenze x, durch Logarithmen von Thetafunktionen mit dem Argument u und des *Integrals 2. Gattung* durch die Ableitungen solcher Logarithmen nach u. Damit hat man auch die Darstellung des allgemeinsten elliptischen Integrals durch Logarithmen von Thetafunktionen und die Ableitungen solcher Logarithmen.

Wir führen als Beispiele von *Darstellungen rationaler Funktionen durch Thetaquotienten* die fundamentalen Formeln an:

$$(44) \qquad x - x_0 = \operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u_0 = \frac{\Theta^2}{k} \cdot \frac{\Theta_1(u+u_0)\,\Theta_1(u-u_0)}{\Theta^2(u)\,\Theta^2(u_0)},$$

$$(45) \quad 1 - k^2 x x_0 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 u_0 = \Theta^2 \cdot \frac{\Theta(u+u_0)\,\Theta(u-u_0)}{\Theta^2(u)\,\Theta^2(u_0)},$$

1) R. E. F. S. 42—45 u. S. 108—119.

in denen x_0, u_0 ein beliebiges zusammengehöriges Wertepaar x, u ist. Aus (44) und (45) ergeben sich *Thetaformeln mit zwei Argumenten* u, u_0, wie

$$(46)\quad \begin{cases} \Theta^2\Theta_1(u+u_0)\,\Theta_1(u-u_0) = \Theta_1^2(u)\,\Theta^2(u_0) - \Theta_1^2(u_0)\,\Theta^2(u) \\ \qquad = \Theta_3^2(u)\,\Theta_2^2(u_0) - \Theta_3^2(u_0)\,\Theta_2^2(u). \end{cases}$$

Ferner aus (44) eine *Thetarelation mit 4 Elementen* u, u_1, u_2, u_3:

$$(47)\quad \begin{cases} \quad\Theta_1(u+u_1)\,\Theta_1(u-u_1)\,\Theta_1(u_2+u_3)\,\Theta_1(u_2-u_3) \\ +\,\Theta_1(u+u_2)\,\Theta_1(u-u_2)\,\Theta_1(u_3+u_1)\,\Theta_1(u_3-u_1) \\ +\,\Theta_1(u+u_3)\,\Theta_1(u-u_3)\,\Theta_1(u_1+u_2)\,\Theta_1(u_1-u_2) = 0 \end{cases}$$

und aus dieser weitere von ähnlicher Form, indem man die u_i um halbe Perioden vermehrt. Gleichungen der Form (47) stellen das *allgemeine Additionstheorem der Thetafunktion* dar; durch Spezialisierung der u_i erhält man *speziellere Additionstheoreme* mit 3 oder 2 Argumenten. So kann man leicht Gleichungen bilden, die wieder zum Additionstheorem der elliptischen Funktionen führen. Man findet z. B.

$$(48)\quad \begin{cases} \Theta_2\Theta_3\Theta_1(u_1+u_2)\,\Theta_1(u_1-u_2) = \Theta(u_1)\,\Theta_1(u_1)\,\Theta_2(u_2)\,\Theta_3(u_2) \\ \qquad + \Theta(u_2)\,\Theta_1(u_2)\,\Theta_2(u_1)\,\Theta_3(u_1), \\ \Theta^2\,\Theta(u_1+u_2)\,\Theta_1(u_1-u_2) = \Theta^2(u_1)\,\Theta^2(u_2) - \Theta_1^2(u_1)\,\Theta_1^2(u_2), \end{cases}$$

woraus man durch Division die Gleichung (27) d. h. das Additionstheorem der elliptischen Funktion $\operatorname{sn} u$ erhält.

Wir geben *zweitens*, indem wir die logarithmische Ableitung der Thetafunktion, die sog. *Zetafunktion*,

$$(49)\qquad Z(u) = \frac{d\log\Theta(u)}{du} = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

nebst ihrer Ableitung $Z'(u)$ und die entsprechenden aus den übrigen Thetafunktionen gebildeten Funktionen $Z_i(u)$ benutzen, als Beispiele von Darstellungen *rationaler Funktionen von* (x, y) *durch diese Funktionen* $Z_i(u)$ die Formeln

$$(50)\qquad -k^2x = Z'(u) - Z'(0),$$

$$(51)\qquad -\frac{2\sqrt{(x_0, k)}}{x - x_0} = Z_1(u+u_0) - Z_1(u-u_0) - 2Z(u_0).$$

Aus ihnen erhält man *drittens*, indem man mit

$$\frac{dx}{2\sqrt{(x, k)}} = du$$

multipliziert und integriert, die Darstellung von *elliptischen Integralen* in u, so z. B. aus (50) und (51) die des Integrals 2. und 3. Gattung (vgl. 10):

$$\mathfrak{Z}(u) = \int_0^x \frac{k^2 x\, dx}{2\sqrt{(x,k)}} = u Z'(0) - Z(u), \tag{52}$$

$$P(u, u_0) = \tfrac{1}{2} \int_0^x \frac{\sqrt{(x_0, k)}}{\sqrt{(x, k)}} \frac{dx}{x - x_0} = \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta_1(u_0 - u)}{\Theta_1(u_0 + u)} + u \cdot Z(u_0). \tag{53}$$

Durch (52) und (53) sind die in (28) definierten Funktionen $\mathfrak{Z}(u)$ und $P(u, u_0)$ analytisch ausgedrückt durch die Thetafunktionen $\Theta_i(u)$ und ihre logarithmischen Ableitungen $Z_i(u)$. Wie für die Thetafunktionen bestehen auch für die Zetafunktionen leicht abzuleitende Additionstheoreme.

Die hier gegebenen Darstellungen von rationalen Funktionen von (x, y) und ihren Integralen finden *ihre Verallgemeinerung* in St. A. F. Abschnitt VII.

IX. Die Form der Thetafunktionen, sowie alle vorgenannten Darstellungen durch Thetafunktionen wurden zunächst gewonnen für eine bestimmte Lage der Querschnitte a und b in der Verzweigungsfläche T.

Die *vierte und letzte Aufgabe*[1]) in der Theorie der elliptischen Funktionen hat die *Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate* zum Ziel, indem sie die Abänderungen untersucht, die eintreten, wenn die Querschnitte a, b beliebig verlegt werden. Es zeigt sich, daß dabei die *Thetafunktionen* eine sog. *lineare Transformation* erfahren. Diese besteht darin, daß, abgesehen von einem Exponentialfaktor jede Thetafunktion $\vartheta_i(v, \tau)$ mit dem Argument v und dem Modul τ übergeht in eine Thetafunktion $\vartheta_k(v', \tau')$, deren Argument v' und Modul τ' von v und τ in einfacher Weise abhängen.

Man bezeichne durch w ein Integral 1. Gattung (das sich von u nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet); ferner durch a, b und a', b' zwei verschiedene Querschnittsysteme der Fläche T; endlich mit A, B die Periodicitätsmoduln (kurz Perioden) von w an den Querschnitten a, b und mit A', B' die Perioden von w an a', b'. Die Werte A', B' setzen sich linear zusammen aus A, B, also:

$$A' = \alpha A + \beta B, \quad B' = \gamma A + \delta B, \tag{54}$$

wo die „*Transformationskoeffizienten*“ α, β, γ, δ ganze Zahlen sind, die der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen. Man führe nun statt w zwei

1) R. E. F. S. 90—91 u. S. 125—127.

neue Integrale v und v' ein und zwei zugehörige Thetamoduln τ und τ', indem man setzt:

$$(55)\qquad v = \frac{w}{A}, \quad v' = \frac{w}{A'} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{B}{A}, \quad \tau' = \frac{B'}{A'},$$

so daß v an a, b die Perioden $1, \tau$ und v' an a', b' die Perioden $1, \tau'$ besitzt. Aus (54) und (55) folgen zwischen v, v' und zwischen τ, τ' die Gleichungen:

$$(56)\qquad v' = \frac{v}{\alpha + \beta\tau}, \quad \tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}.$$

Es entsteht nun die Aufgabe:

A. *Die Beziehungen zwischen den Thetafunktionen*

$$(57)\qquad \vartheta_i(v', \tau') = \vartheta_i\left(\frac{v}{\alpha + \beta\tau}, \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right) \quad \text{und} \quad \vartheta_k(v, \tau)$$

$(i, k = 0, 1, 2, 3)$ *aufzustellen.*

Man findet als Resultat, daß jede Thetafunktion der ersten Art (abgesehen von einem Exponentialfaktor, dessen Exponent quadratisch in v oder v' ist) gleich wird einer bestimmten Thetafunktion der zweiten Art, wobei jedoch die ungerade Thetafunktion $\vartheta_1(v, \tau)$ stets wieder in die ungerade Funktion $\vartheta_1(v', \tau')$ übergeht, während jede der drei geraden Funktionen $\vartheta_i(v, \tau)$ $(i = 0, 2, 3)$ in eine der drei geraden Funktionen $\vartheta_k(v', \tau')$ $(k = 0, 2, 3)$ übergeht.

Bildet man aus den Thetafunktionen Quotienten, so hebt sich der Exponentialfaktor weg, und es geht, abgesehen von einem konstanten Faktor, jeder Quotient von zwei Funktionen $\vartheta_i(v, \tau)$ in einen Quotienten zweier Funktionen $\vartheta_k(v', \tau')$ über. Damit hat man, wenn das Argument w eingeführt wird, eine Beziehung zwischen zwei doppelt periodischen Funktionen

$$(58)\qquad x = f(w;\, A, B) \quad \text{und} \quad \xi = \varphi(w;\, A', B'),$$

von denen die erste die Perioden A, B, die zweite die Perioden A', B' hat. Setzt man etwa nach (37) und (39):

$$(59)\qquad \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v, \tau)}{\vartheta(v, \tau)}, \quad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0, \tau)}{\vartheta_3(0, \tau)},$$

$$(60)\qquad \sqrt{\xi} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\vartheta_1(v', \tau')}{\vartheta(v', \tau')}, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\vartheta_2(0, \tau')}{\vartheta_3(0, \tau')},$$

so erhält man einerseits eine bilineare Gleichung zwischen den doppelt periodischen Funktionen x und ξ (*Transformationsgleichung*), andrerseits eine algebraische Gleichung zwischen den zugehörigen, algebraischen Moduln k und λ (*Modulargleichung*).

Man kann zwischen x und ξ eine Integralbeziehung aufstellen, die dasselbe ausdrückt. Aus (8, 31 u. 55) folgt:

$$(61) \quad \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{(x,\,k)}} = 2Kv = \frac{2Kw}{A}, \quad \int_0^\xi \frac{d\xi}{2\sqrt{(\xi,\,\lambda)}} = 2Lv = \frac{2Lw}{A'},$$

wenn $2K$, $2iK'$ die Perioden des ersten, $2L$, $2iL'$ die des zweiten Integrals sind. Setzt man

$$(62) \quad \frac{2Kw}{A} = u, \quad \frac{K}{L}\frac{A'}{A} = M,$$

so erhält man aus (61) durch Elimination von u die Integralbeziehung

$$(63) \quad \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{(x,\,k)}} = M\int_0^\xi \frac{d\xi}{2\sqrt{(\xi,\,\lambda)}}.$$

Man kann daher das Problem der linearen Transformation auch so fassen:

B. *Es ist eine bilineare Gleichung zwischen x und ξ aufzustellen, welche die Transformation* (63) *bewirkt, und es sind zugleich der Faktor M und der algebraische Modul λ des zweiten Integrals durch den Modul k des ersten Integrals auszudrücken.*

Diese Aufgabe läßt sich für die elliptische Theorie auch direkt und ohne jede Vermittelung der Thetafunktionen lösen. Hierbei (wie auch bei der Aufstellung der Gleichungen zwischen den Funktionen (57)) tritt eine wesentliche Vereinfachung dadurch ein, daß sich die unendlich vielen linearen Transformationen mit beliebigen Transformationskoeffizienten α, β, γ δ zurückführen lassen auf zwei fundamentale Transformationen S und T, in welchen diese Koeffizienten bez. die Werte 1, 0, 1, 1 und 0, 1, -1, 0 haben.

Die vorgenannten Untersuchungen über die lineare Transformation der Thetafunktionen finden ihre *Verallgemeinerung in St. A. F. Abschnitt VIII.*

Hiermit sind die wichtigsten Punkte in der Theorie der elliptischen Funktionen berührt mit Ausnahme der allgemeinen Transformation, für die wir auf R. E. F. S. 49—58 und S. 120—133 und auf andere ausführlichere Darstellungen verweisen.

Bemerkung: Man kann die Theorie der elliptischen Funktionen verallgemeinern, indem man zuerst Funktionen P_{xy} auf der Verzweigungsfläche T betrachtet, die die Eigenschaft haben, beim Überschreiten der

Querschnitte a, b gegebene konstante Faktoren M, N anzunehmen, so daß

$$\text{an } a: P^{+}_{xy} = M P^{-}_{xy}, \quad \text{an } b: P^{+}_{xy} = N P^{-}_{xy},$$

und weiterhin die Integrale solcher Funktionen $Q_{xy} = \int P_{xy} dx$, die die Eigenschaft haben, beim Überschreiten der Querschnitte a, b in lineare Funktionen ihrer selbst überzugehen, also

$$\text{an } a \text{ in } : M Q_{xy} + A, \quad \text{an } b \text{ in } : N Q_{xy} + B.$$

Die Eigenschaften dieser Funktionen P_{xy} und Integrale Q_{xy} sind denen der elliptischen Funktionen und Integrale (wo $M = N = 1$ ist) in vieler Hinsicht ähnlich; ihre Theorie beruht wesentlich auf der der elliptischen Funktionen und Integrale selber.[1])

Anhang.

Wir geben noch eine zweite Herleitung des Additionstheorems (27) der Funktion $\sqrt{x} = \operatorname{sn} u$ nach einer Methode, die in der Theorie der Abelschen Funktionen von Wert ist (vgl. St. A. F. S. 250 u. 292). Zuvor eine Bemerkung über das *Verschwinden der Thetafunktionen*, wenn sie als Funktionen von (x, y) betrachtet werden. Nach (34) u. (36) verschwinden die vier Funktionen von u:

$$\Theta_1(u), \quad \Theta_2(u + K), \quad \Theta_3(u + K + iK'), \quad \Theta(u + iK')$$

für $u = 0$. Hieraus und aus (9) folgt, daß die vier Funktionen von x:

$$\Theta_1\Big(\int_0^x du\Big), \quad \Theta_2\Big(\int_0^x du\Big), \quad \Theta_3\Big(\int_0^x du\Big), \quad \Theta\Big(\int_0^x du\Big)$$

bez. in den Verzweigungspunkten $x = 0,\ 1,\ 1 : k^2,\ \infty$ der Fläche T verschwinden. Dies gibt den Satz:

Ist e eine beliebige Größe, so verschwinden die vier Funktionen

$$(64) \quad \Theta_1\Big(\int_0^x du - e\Big), \quad \Theta_2\Big(\int_0^x du - e\Big), \quad \Theta_3\Big(\int_0^x du - e\Big), \quad \Theta\Big(\int_0^x du - e\Big)$$

bez. in vier Punkten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ der Verzweigungsfläche T', die eindeutig definiert sind durch die Kongruenzen:

$$(65) \qquad \int_0^{\xi_1} du \equiv e, \quad \int_1^{\xi_2} du \equiv e, \quad \int_{1/k^2}^{\xi_3} du \equiv e, \quad \int_\infty^{\xi} du \equiv e.$$

---

1) Ch. Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris. 1885 und Appell et Lacour, Principes de la théorie des fonctions elliptiques. Paris 1897, wo die Funktionen P_{xy} (fonctions doublement périodiques de seconde espèce) und eine weitere Verallgemeinerung (f. d. p. de troisième espèce) eingehend behandelt sind.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, den Quotienten

$$\frac{\operatorname{sn}(u+u_1)}{\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} u_1} \quad \text{oder} \quad \frac{\Theta_1\left(\int\limits_0^x du + \int\limits_0^{x_1} du\right)}{\Theta\left(\int\limits_0^x du + \int\limits_0^{x_1} du\right)} \cdot \frac{\Theta\left(\int\limits_0^x du\right)\Theta\left(\int\limits_0^{x_1} du\right)}{\Theta_1\left(\int\limits_0^x du\right)\Theta_1\left(\int\limits_0^{x_1} du\right)} \tag{66}$$

als Funktion der Koordinaten (x, y) und (x_1, y_1) darzustellen. Der Ausdruck (66) ist, als *Funktion von* (x, y) betrachtet, eindeutig in der Verzweigungsfläche T. Er ist $= 0^1$ im Punkte $(x, y) = (0, 0)$ und $= \infty^1$ im Punkte $(x, y) = (\infty, \infty)$; ferner $= 0^1$ in einem Punkte (ξ_1, η_1) und $= \infty^1$ in einem Punkte (ξ, η), welche Punkte nach (64, 65) bestimmt sind durch die Kongruenzen:

$$\int\limits_0^{\xi_1} du + \int\limits_0^{x_1} du \equiv 0, \quad \int\limits_\infty^{\xi} du + \int\limits_0^{x_1} du \equiv 0. \tag{67}$$

Daher ist (66) eine *rationale* Funktion der zweiten Ordnung $R(x, y)$ von (x, y). Um dieselbe aus ihren 0^1 und ∞^1 Punkten zu bilden, verfahren wir so: Aus der ersten Gleichung (67) folgt nach dem Abelschen Theorem die Existenz einer rationalen Funktion 2. Ordnung $r_1(x, y)$, die $= \infty^2$ im Punkt $(0, 0)$ und $= 0^1$ in (x_1, y_1) und (ξ_1, η_1). Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (67) die Existenz einer rationalen Funktion 2. Ordnung $r(x, y)$, die $= \infty^1$ wird in $(0, 0)$ und (∞, ∞) und $= 0^1$ in (x_1, y_1) und (ξ, η). Bei der Bildung der Funktionen r_1 und r braucht man aber die Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ, η) selber nicht zu kennen, da bei jeder rationalen Funktion der letzte 0^1 Punkt durch die übrigen 0^1 Punkte und die ∞^1 Punkte bestimmt ist. Es ist leicht zu sehen, daß, abgesehen von konstanten Faktoren,

$$r_1 = \frac{x - x_1}{x}, \quad r = \frac{xy_1 - yx_1}{x}.$$

Der Quotient $r_1 : r$ hat als Funktion von (x, y) dieselben 0^1 und ∞^1 Punkte wie die darzustellende Funktion $R(x, y)$ oder (66); er ist zugleich, ebenso wie (66), symmetrisch in Bezug auf (x, y) und (x_1, y_1). Daher hat man

$$\frac{\operatorname{sn}(u+u_1)}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} u_1} = C \cdot \frac{x - x_1}{xy_1 - yx_1}, \tag{68}$$

wo C eine von (x, y) wie von (x_1, y_1) unabhängige Konstante. Durch die Substitution $(x, y) = (0, 0)$ findet man $C = 1$. Erweitert man den Bruch auf der rechten Seite in (68) mit $xy_1 + yx_1$ und berücksichtigt, daß

$$(xy_1 - yx_1)(xy_1 + yx_1) = xx_1(x - x_1)(1 - k^2 xx_1),$$

so geht (68) über in

$$\text{(69)} \qquad \operatorname{sn}(u+u_1) = \frac{xy_1 + yx_1}{\sqrt{xx_1}\,(1 - k^2 xx_1)},$$

d. i. wenn man $\sqrt{x} = \operatorname{sn} u$, $\sqrt{x_1} = \operatorname{sn} u_1$ setzt, die frühere Gleichung (27).

In der gleichen Weise findet man den Ausdruck für $\operatorname{cn}(u+u_1)$ und $\operatorname{dn}(u+u_1)$. Dieselbe Methode führt auf Additionsformeln der elliptischen Funktionen mit einer beliebigen Anzahl von Addenden, wobei zu unterscheiden ist, ob die Zahl derselben gerade oder ungerade ist.[1])

Die *Additionsformel für eine gerade Zahl* $(2n)$ von Argumenten lautet (wenn $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$):

$$\text{(70)} \qquad \frac{\operatorname{sn}(u + u_1 + \cdots + u_{2n-1})}{\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} u_1 \ldots \operatorname{sn} u_{2n-1}} = C \cdot \frac{\left| 1 \; x_i \; x_i^2 \ldots x_i^{n-1} \; x_i^n \; y_i \; y_i x_i \ldots y_i x_i^{n-2} \right|}{\left| x_i \; x_i^2 \ldots x_i^n \; y_i \; y_i x_i \ldots y_i x_i^{n-1} \right|},$$

für eine *ungerade Zahl* $(2n+1)$ von Argumenten (wenn $i = 0, 1, \ldots, 2n$):

$$\text{(71)} \qquad \frac{\operatorname{sn}(u + u_1 + \cdots + u_{2n})}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} u_1 \ldots \operatorname{sn} u_{2n}} = C_1 \frac{\left| x_i \; x_i^2 \ldots x_i^{n+1} \; y_i \; y_i x_i \ldots y_i x_i^{n-1} \right|}{\left| 1 \; x_i \ldots x_i^n \; y_i \; y_i x_i \ldots y_i x_i^{n-1} \right|},$$

wo C und C_1 leicht zu bestimmende Konstanten sind.

Aus den Additionsformeln (70) und (71) ergeben sich *Multiplikationsformeln*, indem man die Argumente sämtlich gleich setzt. Dies kann auf zweierlei Weise geschehen. Entweder man vollzieht einen Grenzübergang, indem man in jeder in (70) und (71) auftretenden Determinante an Stelle der Glieder der 2., 3., … Horizontalreihe die 1., 2., … Ableitung der entsprechenden Glieder der ersten Horizontalreihe setzt. Oder man bildet Formeln von dem Charakter (69), indem man in den Quotienten der rechten Seite in (70) und (71) Zähler und Nenner multipliziert mit einem Produkt von Determinanten, die aus dem Nenner hervorgehen, dadurch daß man jedesmal in einer Horizontalreihe das Zeichen von y_i ändert, in den anderen Horizontalreihen dagegen beibehält.[2]) Beide Arten von Multiplikationsformeln würden in der Ausführung höchst kompliziert werden. (Fortsetzung folgt.)

Tübingen, 15. Oktober 1902.

---

1) In anderer Herleitung sind diese Formeln zuerst aufgestellt von Abel (Werke. 2 A. I. S. 532 (1829)). Vgl. Cayley, Journ. für Math. **41**, 57 (1849) und P. Günther, Journ. für Math. **93**, 213 (1892).

2) Cayley l. c. gibt statt dieser eine andere Umformung von (70) u. (71) an.

Über bidifferentiale Transformationen.

Von S. Kantor in Wien.

In meiner Arbeit: „Theorie der vollständigen Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen" führte ich den Namen bidifferentiale Transformation für eine Funktionsabhängigkeit ein, durch die r Funktionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ mit r anderen Funktionen $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ als Differentialausdrücke dieser so verbunden sind, daß auch von jeder der Funktionen $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ mindestens ein Funktionenzweig je eine reine Differentialfunktion der Funktionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ ist, das ist eine solche, die von allen Integrationszeichen oder impliziten Integralen erst zu lösender Differentialgleichungen frei ist.

Die Differentialfunktionen

$$\Phi_i = \Omega_i(\Psi_1, \ldots, \Psi_r) \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{1}$$

mögen hierbei auch partielle Differentialausdrücke sein, wenn eben die Ψ und Φ als Funktionen von mehreren, etwa m, unabhängigen Veränderlichen gegeben und gesucht sind.

Diese Transformationen sind also in der Integralrechnung das Analogon zu den „birationalen" Transformationen der Algebra und zu den noch so wenig erforschten „biuniformen" Transformationen Picards in der Funktionentheorie.

In dieser kurzen Notiz sei mir gestattet, auf die wirkliche Existenz einiger solcher Transformationen hinzuweisen, die sonst nicht ganz außer Zweifel wäre.

1. Lagranges Theorie der Adjungierten einer linearen Differentialgleichung und dann deren Verallgemeinerung auf partielle Differentialgleichungen[1]) bieten einen klassischen Fall dar. Die Adjungierte

$$P'(u) = p_0^{(1)} u + p_1^{(1)} u' + \cdots + p_{n-1}^{(1)} u^{(n-1)} + p_n^{(1)} u^{(n)}$$
$$= p_0 u - (p_1 u)' + (p_2 u)'' - \cdots + (-1)^n (p_n u)^{(n)} = 0$$

zur Gleichung

$$P(u) = p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} u' + p_n u = 0$$

1) Frobenius, Journ. f. Math. 85.

hat die explizite Form

$$(2)\quad \begin{cases} p_0^{(1)} = p_0 - p_1' + p_2'' \cdots + (-1)^n p_n^{(n)}, \\ p_1^{(1)} = -p_1 + 2p_2' - 3p_3'' + \cdots + (-1)^n n p_n^{(n-1)}, \\ p_2^{(1)} = p_2 - 3p_3' + 6p_4'' - \cdots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_n^{(1)} = (-1)^n p^n. \end{cases}$$

Hier haben wir Ausdrücke der Form (1). Da nun aber nach einem Satze von Lagrange die Adjungierte der Adjungierten die ursprüngliche Gleichung ist, so werden die Ausdrücke (2), wenn man für die p rechts die $p^{(1)}$ setzt, links wieder die p liefern müssen, bis etwa auf einen gemeinsamen Faktor. Also berechnen sich die p aus den $p^{(1)}$ (das ist von oben die Ψ aus den Φ) wieder als Differentialausdrücke, und hier sogar als genau dieselben Differentialausdrücke. Diese Transformation ist also nicht nur *bidifferential*, sondern sogar *involutorisch*, nach einem Ausdrucke der Algebra.

2. Eine Transformation durch partielle Differentialfunktionen bietet die Adjungierte

$$\sum p^{(1)}_{\nu_1 \ldots \nu_n} \frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} u}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}} = \sum (-1)^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} \frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} (p_{\nu_1 \ldots \nu_n} u)}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}$$

zur linearen partiellen Differentialgleichung

$$\sum p_{\nu_1 \ldots \nu_n} \frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} u}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}.$$

Denn auch hier noch gilt der Satz $(P'(u))' = P(u)$. Die Formeln also, welche die $p^{(1)}_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ durch die $p_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ ausdrücken, definieren eine bidifferentiale Transformation, welche sogar involutorisch ist.

3. In seiner These hat Herr Vessiot auf Grund Liescher Prinzipien nachgewiesen, daß man für jede homogene lineare Differentialgleichung eine Anzahl Funktionen der Koeffizienten und ihrer Differentialquotienten angeben könne, aus denen sich alle invarianten Funktionen der Gleichung gleichwie aus einer Basis als ganze rationale Differentialfunktionen berechnen lassen. Solcher Basen lassen sich aber vielfach verschiedene angeben. Sind also

$$J_1, \ \ldots, \ J_\nu,$$
$$J_1', \ \ldots, \ J_\nu'$$

zwei solche Basen, so müssen die Funktionen der einen Basis reine Differentialfunktionen von jenen der anderen sein und umgekehrt, so muß also die durch die Formeln

$$J'_\alpha = R_\alpha(J_1, \ldots, J_\nu) \qquad (\alpha = 1, \ldots, \nu)$$

ausgedrückte Differentialtransformation auch differential umkehrbar sein. Sie ist aber im allgemeinen nicht involutorisch.

Anmerkung. Der entsprechende Satz in der Theorie der algebraischen Invarianten, nämlich von der Existenz einer Basis (endlichen Systemes nach Gordan) für rationale Darstellung, bietet auch schon ein Mittel, um *birationale* Transformationen herzustellen. Sind $J_1, \ldots, J_\nu$ und $J'_1, \ldots, J'_\nu$ zwei volle Invariantensysteme eines gegebenen Formensystemes (Basen für *rationale* Darstellung), so ist

$$J'_\alpha = R_\alpha(J_1, \ldots, J_\nu) \qquad (\alpha = 1, \ldots, \nu)$$

eine birationale Transformation im ν-ären Gebiete, da doch diese Formeln identisch in den Koeffizienten des Formensystemes gelten.

4. Bezeichnen in den Formeln

$$\Phi_i = D_1^{(i)}(\Psi_1) + \cdots + D_r^{(i)}(\Psi_r) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

die $D_1^{(i)}, \ldots, D_r^{(i)}$ lineare Differentialformen der $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ mit einer Unabhängigen, so wird die Elimination von $\Psi_1, \ldots, \Psi_{i-1}, \Psi_{i+1}, \ldots, \Psi_r$ aus diesen Gleichungen eine lineare Differentialgleichung in $\Psi_i, \Phi_1, \ldots, \Phi_r$ einer Ordnung N und der Form

$$(3) \qquad \Delta_i(\Psi_i) = \Delta_1^{(i)}(\Phi_1) + \cdots + \Delta_r^{(i)}(\Phi_r)$$

liefern. Diese Gleichung wird sich aber notwendig dann vereinfachen müssen, wenn die Gleichungen

$$D_1^{(i)}(\Psi_1) + \cdots + D_r^{(i)}(\Psi_r) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

eine hinreichend große Anzahl gemeinsamer linear unabhängiger Integralsysteme besitzen, also insbesondere $N-1$. In diesem Falle wird man die Gleichung (3) auf die Form

$$\Psi_i = Z_1^{(i)}(\Phi_1) + \cdots + Z_r^{(i)}(\Phi_r)$$

bringen können. Tatsächlich ist **1.** ein spezieller Fall einer bidifferentialen Transformation dieser Art. Merkwürdiger ist aber **2.**, weil bekanntlich die hier notwendige Elimination aus partiellen linearen Gleichungen viel schwieriger ist.

5. Ein anderes Beispiel läßt sich aus Herrn Lothar Heffters Arbeit in Journ. f. Math. **116**[1]) entnehmen.

Man kann das im Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung geschaffene Gebiet als einen Körper bezeichnen, wenn man in diesen alle dem festgesetzten Bereiche angehörigen linearen Differentialfunktionen des Integrales mit aufnimmt, und kann ebenso von n konjugierten Körpern sprechen wie bei den algebraischen Funktionenkörpern.

Absolut läßt sich nun die Differentialoperation $z = D(y)$ nicht umkehren, und das Symbol $D^{-1}(z)$ bedeutet absolut (wie bei den englischen Symbolikern) nichts anderes als die Aufsuchung des Integrales von $D(y) = z$.

Dagegen läßt sich in einem wie eben definierten Körper die Operation $D^{-1}(f)$ wirklich auswerten. Läßt man nämlich für f die Körpergleichung $R(f) = 0$ gelten, so kann man, wie Heffter l. c. zuerst bewiesen hat, stets einen Differentialausdruck $D_{-1}(f)$ bestimmen, sodaß

$$D_{-1} \cdot D(f) \equiv f \qquad (\text{mod. } R(y)).$$

Hierin bedeutet ähnlich der algebraischen Körpertheorie das Zeichen mod. $R(y)$ die symbolische Gleichung

$$(2) \qquad D_{-1} \cdot D(f) = f + T \cdot R(f).$$

Diese Gleichung kann dazu benutzt werden, um eine bidifferentiale Transformation zu berechnen. Denn zunächst geht aus Heffters Arbeit hervor, daß die Koeffizienten von D_{-1} rationale Differentialfunktionen der Koeffizienten von D sind.

Andererseits berechnet Herr Heffter zwei Gleichungen S und Q möglichst niedriger Ordnung, sodaß gilt (l. c. S. 158) $SD = QR$. Dann gilt nach der Ableitung auf S. 162 auch

$$(3) \qquad D \cdot D_{-1}(g) = g + U \cdot S(g),$$

und es ist also auf dem durch $S(g) = 0$ definierten Körper, wo S Koeffizienten hat, die sich abermals als rationale Differentialfunktionen bestimmen, auch D die Inverse zu D_{-1}. Also entstehen durch eine ähnliche Rechnung im Körper S, wie sie für (2) im Körper R durchzuführen war, die Koeffizienten von D als rationale Differentialfunktionen der Koeffizienten von D_{-1}. Die so berechneten Koeffizienten müssen mit den Ausgangskoeffizienten übereinstimmen.

---

1) S. 157: „Über gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse", No. III.

Die Koeffizienten von D_{-1} berechnen sich also durch die Koeffizienten von D vermittelst einer bidifferentialen Transformation.

6. Das vorige Verfahren kann verallgemeinert werden auf jene Transformationen T, welche nur innerhalb eines gewissen Gebietes, etwa $\Omega(z_1, \ldots, z_1^{(n)}; \ldots; z_m, z_m', \ldots, z^{(n)}) = 0$ bidifferential sind, nämlich, wenn $\Omega = 0$ durch (1) in $\Omega^{(1)} = 0$ verwandelt wird. Man kann diese im Gebiete $\Omega = 0$ umkehren, und wenn die neue Transformation T_{-1} formal mit T gleichartig ist, so werden die Koeffizienten von T_{-1} sich aus den Koeffizienten von T durch eine bidifferentiale Transformation berechnen.

7. Auch die Differentialtransformationen, welche bei den sogenannten „Gleichungssystemen mit Fundamentallösungen" (Lie, Sächsische Berichte 1893) die allgemeine Lösung mit den Partikulärlösungen verknüpfen, geben Anlaß zu bidifferentialen Transformationen, worauf ich nicht eingehe.

Wien, den 19. August 1902.

Bemerkung zur Ableitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen.

Von F. Jung in Prag.

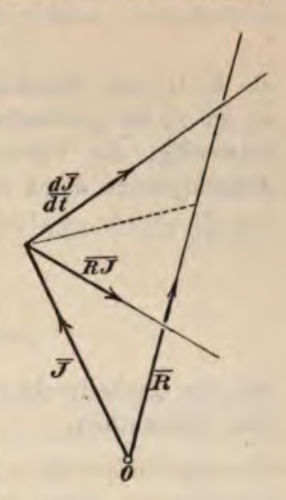
Die Eulerschen Bewegungsgleichungen für ein starres System stehen bekanntlich in einer äußerst einfachen Beziehung zur „Impulsgleichung", sie sind als eine Form derselben aufzufassen. Ohne Zweifel wird also jene Ableitung der ersteren systematisch am meisten befriedigen, welche dieses Verhältnis deutlich hervortreten läßt. Dies trifft bei der Ableitung von Hayward zu, welche in der „Theorie des Kreisels" von Klein und Sommerfeld[1]) wiedergegeben ist. Das volle Durchblicken des Haywardschen Gedankenganges in seiner ganzen Einfachheit wird, wie ich glaube, nur erreicht durch Betrachtung der auftretenden Vektoren *ohne* Zerlegungen nach Achsensystemen. Denn gerade dies *vor* Schluß der Ableitung beeinträchtigt sehr ihre Durchsichtigkeit in geometrischer und also auch mechanischer Beziehung; und trotzdem erscheint es überall angewendet. Seine Vermeidung kennzeichnet das Folgende, welches nur den Zweck hat, mit bekannten Mitteln die

---

1) Leipzig, 1897/98; die Haywardsche Arbeit selbst ist mir nicht zugänglich.

Haywardsche Überlegung in ihrer vollen Einfachheit vorzuführen. Die Vektoranalysis schließt sich dieser Betrachtungsweise natürlich sehr bequem an.

Hervorzuheben ist, daß bei der Ableitung der Eulerschen Gleichungen aus der Impulsgleichung eigentlich eine *kinematische* Aufgabe vorliegt, nämlich eine Umformung der Änderungsgeschwindigkeit der Winkelbewegungsgröße[1]) des Systems, d. h. eines Vektors. Ein solcher, $\bar{J}$, sei in einem Raume (Achsensystem) S gegeben als Funktion der Zeit. Der Raum S drehe sich um einen festen Punkt O mit der Winkelgeschwindigkeit $\bar{R}$. Diese werde dargestellt durch ihre Achse in der Weise, daß sie, gesehen in der positiven Achsenrichtung, rechts drehend erscheint. $\bar{R}$ ist ebenfalls eine Funktion der Zeit. Bezüglich des bewegten Raumes S hat der Vektor $\bar{J}$ nach der Annahme irgend eine Änderungsgeschwindigkeit $\frac{d\bar{J}}{dt}$. Bei relativer Ruhe gegen S besitzt er, infolge der Winkelgeschwindigkeit $\bar{R}$ dieses, gegen den festen Raum eine Änderungsgeschwindigkeit, welche offenbar gegeben ist durch das äußere Produkt $\overline{RJ}$, wenn festgesetzt wird, daß $\bar{R}$, $\bar{J}$, $\overline{RJ}$ ein Rechtssystem bilden sollen (vgl. die Figur). Die gesamte Änderungsgeschwindigkeit des Vektors gegen den festen Raum ist daher:



$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{d\bar{J}}{dt} + \overline{RJ}, \tag{1}$$

wenn mit $\bar{i}$ der Vektor in seiner Lage gegen ein festes Achsensystem bezeichnet wird. Die „absolute" Änderungsgeschwindigkeit des Vektors ist so dargestellt als Summe aus der „relativen" gegen ein bewegtes Achsensystem und der durch die Winkelgeschwindigkeit dieses erzeugten.

Durch die Gleichung (1) ist im wesentlichen bereits die gestellte Aufgabe gelöst. Als bewegten Raum S nehmen wir das um einen

1) Nach der Benennung in der deutschen Ausgabe von Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper, 2. B., Leipzig 1898. Die im früher genannten Werke gebrauchte Bezeichnung „Impuls" für „Antrieb" *und* „Bewegungsgröße" ist aus physikalischen Gründen bedenklich, da der Impuls zunächst festgelegt wird als „Stoßkraft" (S. 73 a. a. O), welche die Bewegungsgröße erzeugen könnte, also mit dieser gleich, aber nicht identisch ist. Vielleicht bietet sich einmal anderwärts Gelegenheit, auf derartige Betrachtungen einzugehen.

festen Punkt rotierende starre System (Körper). Die Impulsgleichung für dieses

$$\overline{\varDelta} = \frac{d\overline{i}}{dt}, \tag{2}$$

wo $\overline{\varDelta}$ das resultierende Drehmoment der äußeren Kräfte ist, während $\overline{i}$ jetzt die Winkelbewegungsgröße bedeutet, geht mittels (1) über in:

$$\overline{\varDelta} = \frac{d\overline{J}}{dt} + \overline{J R},$$

die Eulersche Gleichung, geschrieben in den Vektoren. Jetzt erst ist es, um zu der gewöhnlichen Koordinatenform der Gleichung zu kommen, notwendig, die Vektoren nach einem mit dem Körper rotierenden Achsensysteme durch den Stützpunkt O zu zerlegen:

$$\overline{\varDelta} = \varLambda\overline{\varepsilon_1} + \mathsf{M}\overline{\varepsilon_2} + \mathsf{N}\overline{\varepsilon_3},$$
$$\overline{J} = L\overline{\varepsilon_1} + M\overline{\varepsilon_2} + N\overline{\varepsilon_3},$$
$$\overline{R} = p\overline{\varepsilon_1} + q\overline{\varepsilon_2} + r\overline{\varepsilon_3},$$

wo die Einheitsvektoren $\overline{\varepsilon_1}$, $\overline{\varepsilon_2}$, $\overline{\varepsilon_3}$ ein Rechtssystem bilden mögen (und bekanntlich

$$L = Ap - Fq + Er,\quad M = + Fp + Bq - Dr,\quad N = - Ep + Dq + Cr,$$

A, B, C Trägheits-, D, E, F Deviationsmomente für das Achsensystem). Gleichung (2) geht nun über in:

$$\varLambda\overline{\varepsilon_1} + \mathsf{M}\overline{\varepsilon_2} + \mathsf{N}\overline{\varepsilon_3} = \frac{dL}{dt}\overline{\varepsilon_1} + \frac{dM}{dt}\overline{\varepsilon_2} + \frac{dN}{dt}\overline{\varepsilon_3} + \begin{vmatrix} \overline{\varepsilon_1} & \overline{\varepsilon_2} & \overline{\varepsilon_3} \\ p & q & r \\ L & M & N \end{vmatrix},$$

woraus folgt:

$$\varLambda = \frac{dL}{dt} + \begin{vmatrix} q & r \\ M & N \end{vmatrix},\quad \mathsf{M} = \frac{dM}{dt} + \begin{vmatrix} r & p \\ N & L \end{vmatrix},\quad \mathsf{N} = \frac{dN}{dt} + \begin{vmatrix} p & q \\ L & M \end{vmatrix}, \tag{3}$$

und bei Wahl der Hauptträgheitsachsen des Unterstützungspunktes zu Zerlegungsrichtungen $\overline{\varepsilon_1}, \ldots$ wegen:

$$L = Ap,\quad M = Bq,\quad N = Cr,$$

wo A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Körpers für O sind, die Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{cases} \varLambda = A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr,\quad \mathsf{M} = B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp, \\ \mathsf{N} = C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq. \end{cases} \tag{4}$$

Die Gleichung (2) und somit (3) gilt auch für ein beliebiges (nicht starres) System; der Raum S, auf welchen sich $\overline{R}$ und $\bar{J}$ beziehen, ist da in willkürlich gegebener oder auf geeignete Weise durch das System bestimmter Rotation anzunehmen. Der Vorteil der ganzen Betrachtungsweise wird hier vermindert, sofern er in der relativen Ruhe des Raumes S gegen das System besteht, welche ermöglicht wird durch seine Starrheit und Ausdruck findet in der Unveränderlichkeit der Trägheits- und Deviationsmomente für irgendwelche Achsensysteme von S.[1])

Prag, Oktober 1902.

Elementarer Beweis des Schließungsproblems beim Kegelschnittbüschel.

Von PH. MAENNCHEN in Alzey.

Zu den nachfolgenden Untersuchungen führte mich der Gedanke, daß es möglich sein müsse, das Ponceletsche Schließungsproblem bei zwei Kegelschnitten auf ein einfacheres Problem zurückzuführen. In der Tat ist es mir auch gelungen, einen elementaren geometrischen Satz zu finden, aus dessen wiederholter Anwendung der genannte Schließungssatz, sowie seine Erweiterung auf den Büschel sich sehr leicht ergibt. Mit diesem einfachen Satze, der mir der Kern des Problems zu sein scheint, werde ich mich zunächst beschäftigen.

Es seien K, K_1 und K_2 drei Kegelschnitte eines Büschels in beliebiger Lage', und zwar sei beispielsweise K derjenige von den drei Kegelschnitten, von dem aus man an jeden der beiden andern Tangenten ziehen kann. Von einem Punkte A auf K ziehe ich eine Tangente t_1 an K_1 und eine Tangente t_2 an K_2. Durch die Berührungspunkte mit K_1 und K_2 lege ich eine Gerade, die K_1 und K_2 noch in je einem weiteren Punkte trifft. In dem Schnittpunkt mit K_1 lege ich die Tangente t_1' an K_1, in dem Schnittpunkt mit K_2 die Tangente t_2' an K_2.

Die Gleichungen der vier Tangenten seien:

$$t_1 = 0, \quad t_1' = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_2' = 0.$$

Die Gleichung der Geraden durch die Berührungspunkte sei:

$$g = 0.$$

---

1) Weiteres hierüber z. B. Routh, a. a. O., 2. B., § 22ff.

Dann läßt sich die Gleichung von K_1 in die Form bringen:

$$t_1 t_1' - \lambda_1 g^2 = 0. \tag{1}$$

Ebenso ist die Gleichung von K_2:

$$t_2 t_2' - \lambda_2 g^2 = 0. \tag{2}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\lambda_2 t_1 t_1' - \lambda_1 t_2 t_2' = 0. \tag{3}$$

Der Herleitung gemäß stellt diese Gleichung einen Kegelschnitt dar, der dem durch K_1 und K_2 bestimmten Büschel angehört. Außerdem geht dieser Kegelschnitt, wie die Gleichung (3) deutlich zeigt, durch die Schnittpunkte von t_1 und t_2, t_1 und t_2', t_1' und t_2, t_1' und t_2'.

t_1 und t_2 schneiden sich aber nach Konstruktion in A, und A liegt auf K. Durch A kann nur *ein* Kegelschnitt des Büschels gehen, und dieser eine ist K; mithin liegen die drei andern Schnittpunkte gleichfalls auf K. Hieraus folgert man:

Es ist stets möglich, von irgend einem Punkte aus, der auf K gelegen ist, diesem Kegelschnitt ein Viereck einzubeschreiben, dessen Seiten abwechselnd Tangenten an K_1 und K_2 sind, und zwar so, daß die vier Berührungspunkte in einer geraden Linie liegen. Ein solches Viereck will ich ein *Sehnen- und Tangentenviereck im Büschel* nennen. Man erkennt leicht, daß ein solches Sehnen- und Tangentenviereck durch drei Punkte eindeutig bestimmt ist, während für den Fall, daß nur zwei benachbarte Punkte gegeben sind, zwei Lösungen auftreten.

Ich nehme nun einen Büschel von n Kegelschnitten an, die ich mit $K, K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ bezeichnen will. Dem Kegelschnitt K sei das Polygon $P_1 P_2 P_3 \ldots P_n$ einbeschrieben, und zwar so, daß $P_1 P_2$ Tangente an K_1, $P_2 P_3$ Tangente an K_2 ist u. s. w., endlich $P_{n-1} P_n$ Tangente an K_{n-1}.

Ich wähle außerdem noch einen Kegelschnitt K' des angenommenen Büschels. Hierauf ziehe ich von P_1 aus an K' die Tangente $P_1 P_1'$, wobei P_1' wiederum auf K liegt, und von P_2 aus ebenfalls an K' die zugehörige Tangente $P_2 P_2'$ (zugehörig in dem Sinn, daß $P_1' P_2'$ wieder Tangente an P_1 ist, gerade wie $P_1 P_2$, derart daß $P_1 P_1' P_2' P_2$ ein Sehnen- und Tangentenviereck im Büschel ist). In der gleichen Weise konstruiere ich das Sehnen- und Tangentenviereck $P_2 P_2' P_3' P_3$, das durch die drei Punkte P_2, P_2' und P_3 eindeutig bestimmt ist. Fahre ich in der gleichen Weise fort, so erhalte ich das Polygon $P_1' P_2' P_3' \ldots P_n'$, das ebenfalls dem Kegelschnitt K einbeschrieben ist, und bei dem sich $P_1' P_2'$ auf K_1, $P_2' P_3'$ auf $K_2, \ldots, P_{n-1}' P_n'$ auf K_{n-1} wälzt. Nun

ist aber auch das Viereck $P_n P_n' P_1' P_1$ ein Sehnen- und Tangentenviereck in unserm Büschel, da $P_n P_n'$ und $P_1' P_1$ Tangenten an K' sind. Also sind auch $P_n P_1$ und $P_n' P_1'$ Tangenten an einen und denselben Kegeschnitt des Büschels, den ich naturgemäß mit K_n bezeichnen muß. Da aber K' beliebig gewählt, also jeder Punkt von K als Punkt P_1' angenommen werden kann, so gilt der Satz:

Wenn sich $n-1$ Seiten eines dem Kegelschnitt K einbeschriebenen Polygons auf Kegelschnitten des Büschels $K + \lambda K_1$ wälzen, so tut dies auch die $n$te Seite.

Dabei ist zunächst noch daran festzuhalten, daß die erste Seite (d. h. die mit P_1' beginnende) sich auf K_1, die zweite auf K_2, die dritte auf K_3 u. s. w. wälzen muß. Man kann aber leicht zeigen, daß sich die Reihenfolge ganz willkürlich gestalten läßt. Die drei Punkte P_1', P_2' und P_3' bestimmen nämlich eindeutig ein Sehnen- und Tangentenviereck in den drei Kegelschnitten K, K_1 und K_2. Der vierte Punkt möge mit P_2'' bezeichnet werden. Wenn ich nun statt der Sehnen $P_1' P_2'$ und $P_2' P_3'$ die Sehnen $P_1' P_2''$ und $P_2'' P_3'$ ziehe, so ist die erste eine Tangente an K_2, die zweite eine Tangente an K_1, und ich komme doch nach P_3', von wo aus das Polygon sich in der gewöhnlichen Weise fortsetzt. Wiederholt man diese Manipulation, so kann man jede Tangente an irgend eine Stelle bringen, und daraus geht hervor, daß die Reihenfolge durchaus willkürlich ist. Dagegen ist es nicht willkürlich, welche von den beiden möglichen Tangenten man in jedem einzelnen Falle zu ziehen hat, und es wäre wohl nicht uninteressant, ein einfaches Kriterium für die richtige Wahl einer jeden Tangente bei beliebiger Variation der Reihenfolge aufzustellen.

Gegen unsere Beweisführung könnte man noch einen Einwand erheben. $P_n P_1$ berührt nämlich zwei Kegelschnitte des Büschels, K_n und K_n'. Es könnte also sein, daß $P_n' P_1'$ sich auf K_n wälzt, aber nicht auf K_n', dagegen $P_n'' P_1''$ auf K_n', aber nicht auf K_n. Dann wären aber $P_n' P_1'$ und $P_n'' P_1''$ nicht *in jeder beliebigen Lage Tangenten an einen und denselben Kegelschnitt*, während man doch leicht nachweisen kann, daß $P_n' P_1' P_1'' P_n''$ stets ein Sehnen- und Tangentenviereck im Büschel sein muß. Demnach ist die eben gemachte Annahme falsch, und es müssen sich entweder die $n$ten Seiten aller Polygone auf K_n' wälzen, oder alle auf K_n.

Alzey, 4. Juli 1902.

Zwei Gruppen gleichkantiger Vielflache mit nur vierkantigen Ecken.

Von Wilhelm Thienemann in Essen (Ruhr).

1. *Vorbemerkung.* — Die in der vorliegenden Arbeit zu untersuchenden Vielflache gehören zu der Abteilung derjenigen Vielflache, die von zwei parallelen kongruenten Grundflächen begrenzt werden. Diese Grundflächen sind hier regelmäßige Vielecke, ferner sind alle Kanten gleichlang und alle Ecken vierkantig. Die bekanntesten Vielflache mit parallelen kongruenten Grundflächen sind die Prismen und Antiprismen. Wir gehen bei unserer Untersuchung von diesen beiden Körperformen aus und werden aus einer Reihe von Prismen die erste Gruppe, aus einer Reihe von Antiprismen die zweite Gruppe neuer Vielflache ableiten.

2. *Die erste Gruppe neuer Vielflache.* — Der senkrecht zu den Seitenkanten eines prismatischen Raumes geführte Querschnitt sei ein regelmäßiges n-Eck. Durch jede Ecke dieses n-Ecks werden nach oben und unten zwei Ebenen gelegt, welche die Seitenkanten des prismatischen Raumes so abstumpfen, daß jede Schnittfläche ein regelmäßiges Dreieck wird. Die dritte Seite jedes Dreiecks ist die Verbindungsgerade zweier Punkte der auf jeder Seitenfläche des prismatischen Raumes gezeichneten Mittelparallelen. Diese dritten Dreiecksseiten bestimmen zwei einander parallele regelmäßige n-Ecke, welche das Vielflach oben und unten abschließen. Von jeder Seitenfläche des prismatischen Raumes bleibt ein Rhombus übrig als Seitenfläche des neu entstandenen Vielflachs. Jedes Vielflach wird von zwei regelmäßigen n-Ecken, von n Rhomben und von $2n$ regelmäßigen Dreiecken begrenzt; es ist also ein $(2n + n + 2)$-Flach. Die Seitenlinie des Querschnittes, von welchem wir ausgingen (regelmäßiges n-Eck), sei b cm, jede Kante des entstandenen gleichkantigen Vielflachs sei a cm, die Höhe (Entfernung der beiden Grundflächen) des Vielflachs sei $2c$ cm. Es ist Fig. 1 eine Orthogonalprojektion eines solchen Vielflachs auf die Ebene

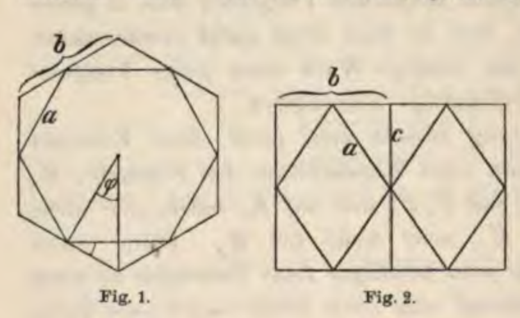


Fig. 1. Fig. 2.

einer Grundfläche; der zuerst erwähnte Querschnitt des prismatischen Raumes ist hier ein regelmäßiges Sechseck mit der Kante b.

Aus Fig. 1 folgt $\sphericalangle \varphi = \frac{2R}{n}$; deshalb ergibt sich $\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = \cos\frac{2R}{n}$, $b = \frac{a}{\cos\frac{2R}{n}}$. In Fig. 2 sind zwei benachbarte Seitenflächen des ursprünglichen prismatischen Raumes gezeichnet mit den durch die Abstumpfung der Seitenkanten gebildeten Rhomben. Aus Fig. 2 folgt:

$$c^2 = a^2 - \frac{b^2}{4} \quad \text{oder} \quad c^2 = \frac{a^2\left(4\cos^2\frac{2R}{n} - 1\right)}{4\cos^2\frac{2R}{n}}, \quad c = \frac{a}{2\cos\frac{2R}{n}}\sqrt{4\cos^2\frac{2R}{n} - 1}.$$

Die Größe der beiden Diagonalen $2c$ und b eines Rhombus ist durch folgende Beziehungen bestimmt

$$2c = \frac{a}{\cos\frac{2R}{n}}\sqrt{4\cos^2\frac{2R}{n} - 1} \quad \text{und} \quad b = \frac{a}{\cos\frac{2R}{n}}.$$

Diskussion dieser beiden Gleichungen:

1) Für $n = 3$ ist $4\cos^2\frac{2R}{n} - 1 = 4\cos^2 60^0 - 1 = 0$; d. h. $2c = 0$, $b = 2a$. Es existiert demnach kein Vielflach der Gruppe, dessen beide Grundflächen regelmäßige Dreiecke sind. An Stelle dieses Vielflachs tritt ein Teil der Ebene auf, der von zwei regelmäßigen Dreiecken, deren Seitenlinien b cm lang sind, doppelt überdeckt wird.

2) Für $n = 4$ ist $4\cos^2\frac{2R}{n} - 1 = 1$. Da hier die beiden Diagonalen des Rhombus gleich groß sind, tritt an Stelle dieses Rhombus ein Quadrat. Das entstandene Vielflach ist das archimedische Kubooktaeder. Dasselbe entsteht aus einem Würfel, wenn dessen acht Ecken durch Ebenen abgestumpft werden, welche durch die Mitten dreier Würfelkanten hindurch gelegt werden.

3) Für $n > 4$ ist $4\cos^2\frac{2R}{n} - 1 \begin{smallmatrix} >1 \\ <3 \end{smallmatrix}$, also $2c > b$, d. h. die Rhomben sind von oben nach unten langgestreckt.

4) Grenzfall $n = \infty$. Aus dem Vielflach wird ein Rotationscylinder. Man erhält $4\cos^2\frac{2R}{n} - 1 = 3$, $2c = a\sqrt{3}$, $b = a$. Der spitze Winkel 2ω eines Rhombus ist durch die Gleichung bestimmt $\sin\omega = \frac{1}{2}$, d. h. $\omega = 30^0$, $2\omega = 60^0$.

Jedes Vielflach besitzt n Symmetrieebenen, die auf den Grundflächen senkrecht stehen, sowie eine horizontale Symmetrieebene.

3. *Die zweite Gruppe neuer Vielflache.* — Man geht aus von einem Antiprisma, dessen Seitenkanten a cm lang sind, und dessen beide Grundflächen zwei kongruente regelmäßige n-Ecke sind. Die Seite eines solchen n-Ecks sei b cm. Jede Seitenfläche (gleichschenkliges Dreieck) dieses Antiprismas läßt man über eine Kante b hinaus wachsen, so daß dadurch n Seitenflächen sich nach oben, n andere Seitenflächen sich nach unten erstrecken. Somit laufen n neue Schnittkanten nach oben, n andere neue Schnittkanten nach unten; es entsteht eine Art Trapezoeder, aber von Deltoiden umschlossen. Die soeben entstandenen $2n$ Schnittkanten dieses Trapezoeders werden nunmehr abgestumpft durch $2n$ ebene Schnitte, gelegt durch die $2n$ Eckpunkte des Antiprismas, von denen jeder ein gleichseitiges Dreieck mit den Kanten a cm aus dem Trapezoeder heraus schneidet. Die dritten Seiten dieser gleichseitigen Dreiecke begrenzen zwei einander parallele kongruente regelmäßige n-Ecke, welche das Vielflach oben und unten abschließen. Das neue $(2n+2n+2)$-Flach wird von $2n$ Rhomben, $2n$ gleichseitigen Dreiecken und zwei regelmäßigen n-Ecken begrenzt. Derjenige Rhombuswinkel, der an eins dieser n-Ecke anstößt, sei 2δ, alle Kanten des Vielflachs sind a cm, die horizontalen Diagonalen der Rhomben b cm. Der Radius des um das n-Eck mit der Seite b cm umbeschriebenen Kreises sei r, es sei p die Projektion der halben Diagonale des Rhombus, die den Winkel 2δ halbiert. Wenn die Höhe des Antiprismas h cm ist, so ist die Höhe des aus demselben abgeleiteten neuen Vielflachs $3h$ cm. Wir projizieren drei der vier vorhandenen n-Ecke auf eine Horizontalebene; es ist ferner a' die Projektion einer Rhombuskante a, δ' die Projektion des Winkels δ (s. Fig. 3, wo $n=5$).

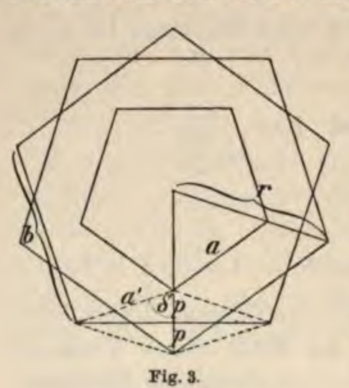


Fig. 3.

Es ergeben sich folgende beide Beziehungen: $\frac{b}{2}:a=\sin\delta$, $b:a=r:(r-2p)$. Hieraus folgt: $2\sin\delta=r:(r-2p)$. Es ist ferner: $p=r-\varrho$, wenn ϱ der Radius des dem großen Vieleck mit der Kante b einbeschriebenen Kreises ist. Daraus folgt $2\sin\delta=r:(2\varrho-r)$. Es ist ferner $\frac{b}{2}:r=\sin\frac{2R}{n}$, $\varrho:\frac{b}{2}=\operatorname{cotg}\frac{2R}{n}$. Deshalb $2\sin\delta=\frac{b}{2\sin\frac{2R}{n}}:\left(b\operatorname{cotg}\frac{2R}{n}-\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2R}{n}}\right)$.

Durch weitere Umformungen erhält man

$$\sin\delta=\frac{1}{4\cdot\cos\frac{2R}{n}-2}.$$

Diskussion dieser Gleichung:

1) Für $n = 3$ erhält man $\sin\delta_3 = \frac{1}{4 \cdot \cos 60^0 - 2} = \frac{1}{0} = \infty$. Es existiert demnach kein Vielflach der Gruppe, dessen beide Grundflächen regelmäßige Dreiecke sind.

2) Für $n = 4$ erhält man $\sin\delta_4 = \frac{1}{4 \cdot \cos 45^0 - 2} = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{1,4142}{1,1716}$. Da $\sin\delta_4 > 1$, so folgt: Es existiert kein Vielflach der Gruppe, dessen beide Grundflächen Quadrate sind.

3) Für $n = 5$ erhält man $\sin\delta_5 = \frac{1}{4 \cdot \cos 36^0 - 2}$. Bei der Berechnung des regelmäßigen Fünfecks findet man den Wert $\cos 36^0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$. Daraus folgt $\sin\delta_5 = \frac{1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \cos 36^0$, d. h. $\delta_5 = 54^0$. Wenn die beiden Grundflächen eines Vielflachs der Gruppe regelmäßige Fünfecke sind, so ist jeder Rhombenwinkel, der an eine der Grundflächen anstößt, 108^0 groß.

4) Für $n = 6$ erhält man $\sin\delta_6 = \frac{1}{4 \cdot \cos 30^0 - 2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} = 0{,}68301$, $\delta_6 = 43^0 4' 46''$. Wenn die beiden Grundflächen eines Vielflachs der Gruppe regelmäßige Sechsecke sind, so ist jeder Rhombenwinkel, der an eine der Grundflächen anstößt, $86^0 9' 32''$ groß.

5) Für $n > 6$ wird $\cos\frac{2R}{n}$ größer als $\cos\frac{2R}{6}$, mithin $\sin\delta < \sin\delta_6$. Wenn demnach die beiden Grundflächen eines Vielflachs der Gruppe regelmäßige n-Ecke sind ($n > 6$), so ist jeder Rhombenwinkel, der an eine der Grundflächen anstößt, kleiner als 86^0.

6) Grenzfall $n = \infty$. Aus dem Vielflach wird ein Rotationscylinder. Man erhält $\sin\delta_\infty = \frac{1}{4 \cdot \cos 0^0 - 2} = \frac{1}{2}$, d. h. $\delta_\infty = 30^0$. Der spitze Winkel 2δ des Rhombus nähert sich dem Grenzwerte $2\delta = 60^0$. Aus der Gleichung $b = 2a \sin\delta$ ergibt sich für den Grenzfall $b = a$ (wenn $n = \infty$). Die Höhe des Vielflachs (Abstand der beiden Grundflächen) ist für den Grenzfall $\frac{3\sqrt{3}}{2} a$.

Jedes Vielflach besitzt n Symmetrieebenen, die auf den Grundflächen senkrecht stehen; eine horizontale Symmetrieebene ist nicht vorhanden.

Essen, 7. Dezember 1902.

Über eine Funktionalgleichung.

Von D. Sintzow in Ekaterinoslaw, Rußland.

Herr M. Cantor hat in der Zeitschrift für Math. und Phys. **41**, 161—163 die Beispiele zweier Funktionalgleichungen mit drei Veränderlichen angegeben:

(1) $\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z)$, (2) $\varphi(x, y) \cdot \varphi(y, z) = \varphi(x, z)$.

Seine Lösungen sind sehr einfach; doch differenziert der Verf. dabei die unbekannte Funktion und setzt also ihre Differenzierbarkeit voraus. Ich will daher eine andere Lösung angeben, welche eine derartige Voraussetzung vermeidet.

1. Die Gleichung (1) schreiben wir in der Form:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, z) - \varphi(y, z).$$

Die linke Seite ist von z unabhängig; z muß also auch in der rechten Seite herausfallen. Wir können daher, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, z irgend einen bestimmten Wert beilegen, z. B. $z = a$, was gewiß voraussetzt, $\varphi(x, a)$ sei nicht durchgehends unendlich. Indem wir noch $\varphi(x, a) = \theta(x)$, gleich einer willkürlichen Funktion von x, setzen, gelangen wir zur Lösung des Herrn M. Cantor:

$$\varphi(x, y) = \theta(x) - \theta(y).$$

2. Die Gleichung (2) wird durch Logarithmieren und mit Hilfe der Bezeichnung $\log \varphi(x, y) = \varphi(x, y)$ auf (1) zurückgeführt, kann aber auch direkt auf ähnliche Weise, wie (1), gelöst werden. Wir schreiben (2) in der Form

$$\varphi(x, y) = \frac{\varphi(x, z)}{\varphi(y, z)},$$

und da die rechte Seite von z unabhängig sein muß, so kann man z einen bestimmten Wert $z = a$ beilegen und die Bezeichnung einführen $\varphi(x, a) = \theta(x)$. Dann wird

$$\varphi(x, y) = \frac{\theta(x)}{\theta(y)}.$$

3. Dasselbe Verfahren führt zur Lösung der etwas komplizierteren Gleichung

$$(3) \qquad \varphi(x, y)\,\varphi(z, t) - \varphi(x, z)\,\varphi(y, t) + \varphi(x, t)\,\varphi(y, z) = 0.$$

Wir ziehen daraus:

$$\varphi(x, y) = \frac{\varphi(x, z) \cdot \varphi(y, t) - \varphi(x, t) \cdot \varphi(y, z)}{\varphi(z, t)}.$$

Die rechte Seite muß von den unabhängigen Veränderlichen z, t frei sein. Wir können also t z. B. irgend einen bestimmten Wert a beilegen:

$$\varphi(x, y) = \frac{\varphi(x, z) \cdot \psi(y) - \varphi(y, z) \cdot \psi(x)}{\psi(z)},$$

wo wir $\varphi(x, a) = \psi(x)$ gesetzt haben. Dividieren wir mit $\psi(x)\psi(y)$, so zeigt sich, daß die Funktion $\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x)\psi(y)}$ der Gleichung (1) genügt und also zu setzen ist:

$$\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x)\psi(y)} = \theta(x) - \theta(y).$$

Setzen wir noch $\psi(x)\theta(x) = \chi(x)$, so bekommt man

$$\varphi(x, y) = \chi(x)\psi(y) - \chi(y)\psi(x).$$

Wir können zu dieser Lösung auch direkt gelangen, indem wir in (3) $z = a$, $t = b$ setzen, wo die beiden Konstanten a, b der Bedingung $\varphi(a, b) = 1$ unterworfen sind. Bezeichnen wir noch $\varphi(x, a) = \chi(x)$, $\varphi(x, b) = \psi(x)$, so kommt man zu der oben angegebenen Lösung. Die willkürlichen Funktionen ψ und χ müssen der Bedingung genügen, für irgend ein Wertepaar $x = a$, $y = b$ von x und y die Gleichungen

$$\chi(a) = \psi(b) = 0, \quad \psi(a) = -\chi(b) = 1$$

zu befriedigen, wie es in Folge der Eigenschaften $\varphi(x, y) + \varphi(y, x) = 0$, $\varphi(x, x) = 0$ sein muß.

Ekaterinoslaw, Februar 1903.

Über einen Satz von Kronecker.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

In seiner Abhandlung[1]) „Über die Irreduktibilität von Gleichungen" entwickelt Kronecker durch bloße Kongruenzbestimmungen eine hinreichende Bedingung dafür, daß zwei irreduktible Gleichungen (mit rationalen Koeffizienten) in solchem Sinne zu derselben Klasse gehören sollen, daß die zugehörigen Galoisschen Resolventen dieselbe Gattung bestimmen. Er bezeichnet den Satz als einen zahlentheoretischen „Randwertsatz". Es soll im folgenden die notwendige und hinreichende Bedingung abgeleitet werden.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die irreduktiblen Gleichungen (mit rationalen Koeffizienten)

$$f_1(x) = 0, \tag{1}$$

$$f_2(x) = 0 \tag{2}$$

im obigen Sinne zu derselben Klasse gehören, besteht darin, daß die Ausdrücke $f_1(x)$, $f_2(x)$ im allgemeinen[2]) *für dieselben Primzahlmoduln in lineare Faktoren zerfallen.*

1. Seien w_1 eine Wurzel der Gleichung (1), w_2 eine Wurzel der Gleichung (2) und die zugehörigen Zahlkörper K_{w_1}, K_{w_2}. Sei ferner H ein (im Bereiche der rationalen Zahlen) Galoisscher Zahlkörper, der K_{w_1} und K_{w_2} enthält. Bezeichnen wir die Gruppe des Körpers H mit $\mathfrak{H}$; die Elemente der Gruppe seien

$$H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots, \tag{3}$$

und es sollen K_{w_1} und K_{w_2} zu den Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ bezw. $\mathfrak{G}_2$ gehören.

2. Der Beweis des Satzes kann in der folgenden Form geleistet werden. Es ist zu beweisen, daß, wenn wir die größte gemeinsame Untergruppe der Gruppen:

$$H_1^{-1}\mathfrak{G}_1 H_1,\ H_2^{-1}\mathfrak{G}_1 H_2, \ldots \tag{4}$$

mit $\mathfrak{D}_1$, die größte gemeinsame Untergruppe der Gruppen:

$$H_1^{-1}\mathfrak{G}_2 H_1,\ H_2^{-1}\mathfrak{G}_2 H_2, \ldots \tag{5}$$

---

1) Berliner Monatsberichte 1880 p. 148.

2) D. h. mit etwaiger Ausnahme einer Primzahlmenge, deren Dichtigkeit gleich Null ist. Aus dem Beweise ist jedoch ersichtlich, daß de facto diese Ausnahme nur für eine endliche Menge eintreten kann.

mit $\mathfrak{D}_2$ bezeichnen, dann für das Bestehen der Gleichung

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 \tag{6}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung ist, daß die Ausdrücke $f_1(x)$, $f_2(x)$ im allgemeinen für dieselben Primzahlmoduln in lineare Faktoren zerfallen sollen.

3. Um den Beweis vorzubereiten, schicken wir einige Sätze der Idealtheorie voraus. Ist die Diskriminante des Körpers H durch die rationale Primzahl p nicht teilbar, so bleiben die einzelnen Primideale der Zahl p bei der Anwendung je einer cyklischen Untergruppe von $\mathfrak{H}$ invariant. Diese cyklische Untergruppen sind die sämtlichen Konjugierten einer einzigen cyklischen Untergruppe. Wir können das in der folgenden Weise ausdrücken: die Zahl p gehört z. B. zur „Klasse der cyklischen Untergruppe $\mathfrak{M}$". Umgekehrt zu jeder „Klasse $\mathfrak{M}$" gehören nach Herrn Frobenius unendlich viele Primzahlen, deren Dichtigkeit von Null verschieden ist.[1]) Nun sei $\mathfrak{N}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{H}$ und $K_{\mathfrak{N}}$ der zugehörige Körper. Die Grade der Primideale von p im Körper $K_{\mathfrak{N}}$ werden nach Herrn Dedekind[2]) auf die folgende Weise bestimmt. Man zerlegt die Gruppe $\mathfrak{H}$ nach (modd. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$):

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}R_1\mathfrak{N} + \mathfrak{M}R_2\mathfrak{N} + \cdots, \tag{7}$$

wo R_i die (modd. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$) inkongruenten Repräsentanten der Elemente H_i bedeuten. Sei sodann m die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{M}$, und d_i die Ordnung der größten gemeinsamen Untergruppe von

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{M}\\ R_i\mathfrak{N}R_i^{-1}\end{matrix}\right\};$$

dann hat man

$$p = \prod_i \mathfrak{J}_i, \tag{8}$$

wo die Faktoren $\mathfrak{J}_i$ im Körper $K_{\mathfrak{N}}$ Primideale vom Grade $\frac{m}{d_i}$ sind.

4. Nach dem Vorhergehenden ist eine Primzahl p im Körper K_{w_1} (bez. K_{w_2}) dann und nur dann als ein Produkt von Primidealen ersten Grades darstellbar, wenn p im Körper H zu einer „Klasse cyklischer Untergruppen $\mathfrak{A}$" (bezw. „Klasse cyklischer Untergruppen $\mathfrak{B}$") gehört, die so beschaffen ist, daß die ganze Klasse in der Gruppe $\mathfrak{D}_1$ (bezw. $\mathfrak{D}_2$) enthalten ist. Somit tritt unser Satz in Evidenz.

---

1) Über Beziehungen etc. Berliner Sitzungsb. 1896 pp. 689—703. Satz IV p. 702. Der Satz ist a. a. O. in eine andere Form eingekleidet. Ich will noch bemerken, daß die Sätze I, II, III aus dem Satze IV mittelst gruppentheoretischer Betrachtungen abgeleitet werden können.

2) Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten 1894 pp. 272—277.

Über Kreisteilungsgleichungen.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Den in meiner Note *„Über einen Satz von Kronecker“*[1]) gegebenen „Randwertsatz“ kann man, wie leicht ersichtlich, folgendermaßen verallgemeinern. Seien:

(1) $f_1(x) = 0,$ (2) $f_2(x) = 0$

irreduktible Gleichungen mit rationalen ganzzahligen Koeffizienten.

Sei ferner die Gleichung (2) für jeden Primzahlmodul[2]), nach welchem (1) in lineare Faktoren zerfällt, auch in lineare Faktoren zerlegbar. Dann und nur dann bestimmt die Galoissche Resolvente von (1) einen solchen Körper, der den Galoisschen Körper von (2) als Unterkörper enthält.[3])

Als eine Anwendung will ich den folgenden Satz beweisen.

„Eine irreduktible Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist dann und nur dann eine Kreisteilungsgleichung, wenn sich eine positive ganze Zahl N vorfinden läßt, die folgende Eigenschaft besitzt. Für die Primzahlmoduln, die in der Progression

$$Nx + 1$$

enthalten sind, muß die Gleichung 'im allgemeinen' in lineare Faktoren zerfallen.“

Um den Beweis zu führen, genügen folgende Bemerkungen.

a) Eine Gleichung ist dann und nur dann eine Kreisteilungsgleichung, wenn ihre Galoissche Resolvente auch eine Kreisteilungsgleichung ist.

b) Zu einem Kreiskörper läßt sich eine positive ganze Zahl n so finden, daß der Körper der $n$ten Einheitswurzeln den gegebenen als Unterkörper enthält.

c) Im Körper der $n$ten Einheitswurzeln sind alle Primideale der Primzahlen von der Form $nx + 1$ vom ersten Grade.

Der jetzt bewiesene Satz kann als eine Ergänzung betrachtet werden zu dem berühmten Kroneckerschen Satze über Abelsche Gleichungen.

---

1) S. vorstehende Note. 2) „im allgemeinen“.

3) Zum ersten Male von Herrn Weber, später von Herrn Hilbert bewiesen.

Über zusammengesetzte Körper.

Von Michael Bauer in Budapest.

Definitionen und Bezeichnungen. — Wir werden eine Primzahl p, die in einem Körper in Primideale ersten Grades zerfällt, in Bezug auf diesen Körper eine Primzahl der ersten Kategorie nennen. Den Körper, der aus den gegebenen algebraischen Körpern K_1, K_2 zusammengesetzt ist, werden wir einen zusammengesetzten Körper nennen und ihn mit $k(K_1, K_2)$ bezeichnen.

Satz. Im Körper $k(K_1, K_2)$ sind diejenigen und nur diejenigen Primzahlen von der ersten Kategorie, die sowohl in Bezug auf K_1, als auf K_2 von der ersten Kategorie sind. (Eine endliche Anzahl von Primzahlen kann eine Ausnahme bilden.)[1] *Die Dichtigkeit dieser Primzahlen ist gleich dem reziproken Werte des Grades vom Galoisschen Körper des $k(K_1, K_2)$.*

1. — Wir brauchen den Beweis nur für solche Körper zu leisten, die im Bereiche der rationalen Zahlen Galoissche Körper sind. Denn einerseits sind die Primzahlen der ersten Kategorie eines Körpers dieselben wie für den zugehörigen Galoisschen Körper[2]; andererseits ist der Galoissche Körper von

$$k(K_1, K_2)$$

identisch mit dem Körper

$$k(G_1, G_2),$$

wo G_1 und G_2 die Galoisschen Körper von K_1, K_2 bezeichnen.

2. — Nun sei

$$k(G_1, G_2) = H.$$

Sei ferner $\mathfrak{H}$ die Gruppe von H, und es sollen die Körper G_1, G_2 zu den Untergruppen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ gehören. Die Untergruppen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ sind invariante Untergruppen, deren größter gemeinsamer Teiler „E" die Einheit ist. Nun sind im Körper H diejenigen und nur diejenigen Primzahlen von der ersten Kategorie, die „zur Klasse E" gehören; also diejenigen und nur diejenigen, die sowohl in Bezug auf G_1 als auf G_2 von der ersten Kategorie sind.[3]) Daß es unendlich viele solche Primzahlen

1) Diesen Zusatz werde ich im folgenden der Bequemlichkeit halber weglassen.

2) S. vorst. Note: „Über einen Satz von Kronecker." Wir bedürfen hier nur des Zerlegungssatzes von Herrn Dedekind, dessen Beweis rein *arithmetisch* ist.

3) S. in der zitierten Note die früher zitierte Stelle.

gibt, ist auch auf arithmetischem Wege sofort einleuchtend; ihre Dichtigkeit hat Herr Frobenius bestimmt.

3. — Als eine Anwendung werden wir die folgende Frage behandeln. *Bestimmen wir diejenigen Körper, für welche die Primzahlen erster Kategorie arithmetische Progressionen bilden!* Wir werden beweisen, daß nur die Kreiskörper diese Eigenschaft besitzen.

Sei K ein Körper, für welchen die Primzahlen von der Form:

$$a_1 x + b_1,\quad a_2 x + b_2,\ \ldots,\ a_r x + b_r \tag{1}$$

die Primzahlen erster Kategorie bilden. Ist eine der Zahlen $b_i \equiv 1$, so ist der Beweis schon geleistet.[1]) Nun sei

$$b_i \not\equiv 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots r). \tag{1*}$$

Wir bestimmen zuerst die positive ganze Zahl N in der Weise, daß sie der Forderung

$$N = \prod_{i=1}^{r} a_i \tag{2}$$

genügen soll. Wenn K_N den Körper der Nten primitiven Einheitswurzeln bezeichnet, so sind die Primzahlen von der Form

$$Nx + 1 \tag{3}$$

die Primzahlen erster Kategorie für K_N. Nun würde aus (1), (1*), (2), (3) folgen, daß für den Körper

$$k(K, K_N)$$

überhaupt keine Primzahlen der ersten Kategorie existieren. Demnach ist die Annahme (1*) unzulässig.

4. Aus dem obigen Beweise ersieht man auch den folgenden Satz. *Ist K ein beliebiger algebraischer Zahlkörper und N eine beliebige positive ganze Zahl, so gibt es für K unendlich viele Primzahlen der ersten Kategorie, die der Bedingung $\equiv 1$ (mod. N) genügen. Die Dichtigkeit ist durch die früheren Sätze bestimmt.*

Ferner sei noch bemerkt; daß, wie leicht ersichtlich, aus unserem Hauptsatze auch der Satz, den wir in der Note *„Über einen Satz von Kronecker“* gegeben haben, als ein spezieller Fall folgt. Jedoch sind beide Beweise von einander verschieden.

---

1) S. die vorstehende Note „Über Kreisteilungsgleichungen.“

Sur la fonction gamma;

Par M. Niels Nielsen à Copenhague.

Dans son excellent mémoire sur la fonction gamma M. J.-L.-W.-V. Jensen[1]) a déduit le premier, au moyen d'une méthode rigoureuse, les séries de factorielles dues à Binet pour les deux fonctions

$$\omega_1(x) = \log x - \Psi(x),$$
$$\omega(x) = \log \Gamma(x) - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x - \log \sqrt{2\pi},$$

où $\Psi(x)$ désigne la fonction de Gauss, savoir

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = - C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right),$$

C désignant la constante d'Euler.

Cependant, la méthode appliquée par M. Jensen ne permet pas de déterminer le champ complet de convergence des séries susdites; au contraire, on ne peut trouver que l'aire où ces séries sont absolument convergentes. Or, il est possible, d'un autre point de vue, comme je le démontrerai plus bas, de combler cette lacune dans la théorie élémentaire de la fonction gamma par les moyens les plus élémentaires, savoir à l'aide de la série de factorielles obtenue pour $\frac{1}{x - \alpha}$ et due à Stirling. De plus, cette démonstration nouvelle des séries de Binet nous donne encore comme des corollaires les formules dues à Gudermann et à Raabe, tandis que M. Jensen a dû développer séparément la série de Gudermann.

En communiquant ces démonstrations je saisirai l'occasion pour faire précéder une démonstration nouvelle, à ce que je crois, du théorème de Gauss.

Pour ne pas interrompre l'aperçu suivant je donne ici la définition des coefficients de factorielle du rang n, savoir les nombres entiers obtenus à l'aide de l'identité

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} x,$$

d'où immédiatement:

$$n! = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1},$$

corollaire qui nous sera bien utile dans ce qui va suivre.

1) Nyt Tidsskrift for Mathematik. t. II; 1891.

1. *Démonstration du théorème de Gauss.* — Considérons la fonction rationnelle

$$(\alpha)\qquad \Psi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right),$$

où n désigne un entier positif, nous aurons tout d'abord pour n infini:

$$(1)\qquad \lim_{n=\infty} \Psi_n(x) = \Psi(x) + C.$$

Cela posé, étudions la fonction $\Psi_{np}(x)$, où p est un entier positif déterminé, et rangeons en p groupes les termes figurant au second membre de l'équation obtenue de (α) en y remplaçant n par np, de façon que les termes unis dans le même groupe correspondent aux valeurs de la lettre sommatoire s qui, divisées par p, donnent le même reste. Cette classification effectuée, l'identité

$$\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{1}{x+r+sp} = \frac{1}{p}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{1}{\frac{x+r}{p}+s}$$

donnera immédiatement une formule de cette forme:

$$(\beta)\qquad \Psi_{np}(x) = \frac{1}{p}\cdot\sum_{r=0}^{r=n-1}\Psi_n\left(\frac{x+r}{p}\right) + A,$$

où A est une constante, dont la détermination s'effectue en posant simplement dans (β) $x=\infty$. En effet, pour cette valeur de x on aura

$$\Psi_n(x) = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

ce qui détermine A, et nous obtiendrons cette formule élégante:

$$(2)\qquad \Psi_{np}(x) = \frac{1}{p}\cdot\sum_{r=0}^{r=p-1}\Psi_n\left(\frac{x+r}{p}\right) + \sum_{s=1}^{s=n(p-1)}\frac{1}{n+s},$$

qui n'est au fond rien d'autre chose que le théorème de Gauss donné dans sa forme la plus élémentaire.

En effet, faisons croître au delà de toute limite l'entier positif n; la dernière somme figurant au second membre de (2) se réduira à

$$\int_1^p \frac{dx}{x} = \log p,$$

et nous aurons

$$(3)\qquad \Psi(x) = \frac{1}{p}\cdot\sum_{r=0}^{r=p-1}\Psi\left(\frac{x+r}{p}\right) + \log p,$$

d'où, en intégrant par rapport à x:

$$\Gamma(x) = Ap^x\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right),$$

où A est une constante qui peut être déterminée à l'aide de cette formule d'Euler:

$$\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right) = p^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{p-1}{2}},$$

ce qui donnera finalement le théorème de Gauss:

$$(4)\qquad \Gamma(x) = \Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)p^{x-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}.$$

Posant en particulier $p = 2$ et mettant $2x$ au lieu de x, on aura cette formule particulière due à Legendre:

$$(4\text{a})\qquad \Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2x)2^{-2x+1}\sqrt{\pi},$$

qui nous sera bien utile plus tard.

2. *Convergence uniforme de certaines séries.* — Considérons maintenant la formule

$$\int_0^1 z^{x-\alpha-1}\,dz = \frac{1}{x-\alpha},$$

valable pourvu que $\Re(x-\alpha) > 0$; écrivons la fonction à intégrer sous cette forme $z^{x-1}\cdot z^{-\alpha}$, une intégration répétée par parties donnera

$$(5)\quad \frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x(x+1)} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n)} + R_n(x),$$

où l'on a posé pour abréger

$$(5\text{a})\qquad R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n)}\cdot\frac{1}{x-\alpha}.$$

Cela étant, écrivons l'expression de $R_n(x)$ sous cette forme:

$$R_n(x) = \frac{\alpha}{x(x-\alpha)}\left(1-\frac{x-\alpha}{x+1}\right)\left(1-\frac{x-\alpha}{x+2}\right)\cdots\left(1-\frac{x-\alpha}{x+n}\right),$$

et supposons $\Re(x-\alpha) > 0$; nous verrons, à l'aide du produit ainsi obtenu, qu'il est possible de déterminer un entier positif N tel que

$$(6)\qquad |R_n(x)| < \varepsilon,$$

où ε désigne une quantité positive donnée d'avance et aussi petite qu'on le veut, pourvu que $n \geq N$.

Remarquons encore que la définition (5a) même de $R_n(x)$ donnera immédiatement, q étant un entier positif,

$$(\alpha) \qquad R_n(x+q) = \frac{x-\alpha}{x-\alpha+q} \cdot \frac{x(x+1)\cdots(x+q-1)}{(x+n+1)\cdots(x+n+q)} \cdot R_n(x).$$

Posons maintenant dans (5) $x = \alpha + p$, p étant un entier positif, et divisons par
$$\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+p-1);$$
nous obtiendrons cette autre formule

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=n} \frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)\cdots(\alpha+s+p)} \\ &= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+p)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+n+p)}\right), \end{aligned} \right.$$

qui est valable pour une valeur finie quelconque de α.

Il est bien connu que les formules (5) et (7) sont dues à Stirling. Du reste, on voit que (5) peut être démontrée à l'aide des moyens les plus élémentaires: cependant notre démonstration à l'aide de l'intégrale définie est formellement la plus simple.

Appliquons ensuite la formule (7); nous obtiendrons, en vertu de (5)

$$(8) \quad \sum_{s=0}^{s=p}\left(\frac{1}{x-\alpha+s} - \frac{1}{x+s}\right) = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s\,q}\,\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)}{x(x+1)\cdots(x+s-1)} + R_{n,p}(x),$$

où l'on a posé pour abréger

$$(8\text{a}) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{n,p}(x) &= \left(1 + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{x-\alpha}{x-\alpha+s} \cdot \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+s-1)}{(x+n+1)(x+n+2)\cdots(x+n+s)}\right) R_n(x) + \\ &+ \frac{\alpha}{x+p}\left(1 + \sum_{s=2}^{s=n} \frac{1}{s} \cdot \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+s-1)}{(x+p+1)\cdots(x+p+s-1)}\right); \end{aligned} \right.$$

cette expression du reste $R_{n,p}(x)$ peut être déduite aisément à l'aide de (α).

Cela posé, démontrons que les deux séries figurant au second membre de (8a) sont absolument convergentes si nous faisons croître au delà de toute limite les deux entiers positifs n et p. A cet égard désignons par u_s le terme sommatoire figurant sous le premier signe Σ, nous aurons
$$\frac{u_s}{u_{s+1}} = 1 + \frac{n+2}{s} + \cdots,$$

tandis que nous aurons pour les termes correspondants de la seconde série en question

$$\frac{v_s}{v_{s+1}} = 1 + \frac{x+p+1-\alpha}{s} + \cdots,$$

et le théorème de Raabe-Duhamel nous conduira immédiatement au but, de façon que nous arrivons à démontrer qu'il est possible de déterminer deux entiers positifs N et P tels que

$$(9) \qquad |R_{n,p}(x)| < \varepsilon',$$

où ε' désigne une quantité positive finie donnée d'avance et aussi petite qu'on le veut, pourvu que l'on ait à la fois

$$p \geqq P, \quad n \geqq N, \quad \Re(x-\alpha) > 0.$$

Il est évident que nous faisons abstraction des valeurs entières non positives de x. Comme résultat des recherches précédentes nous obtiendrons ce lemme fondamental dans les recherches qui vont suivre:

Divisons, à l'aide d'une ligne droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels, le plan en deux parties D et G situées à droite et à gauche de la ligne susdite. Supposons encore que nos deux variables x et α soient assujetties à être situées dans D et G respectivement; les deux séries figurant aux seconds membres de (5) et (8) seront, pour n et p infinis uniformément convergentes.

C'est la même chose pour la série figurant au premier membre de (8) et cela pour des valeurs finies quelconques de α et x.

Il est évident que nous faisons toujours abstraction des valeurs entières non positives de x. Or, ce lemme démontré, un nombre de formules essentielles dans la théorie de la fonction gamma se démontrent aisément.

3. *Démonstrations des formules de Binet, Gudermann et Raabe.* — Faisons maintenant croître au delà de toute limite les entiers positifs n et p, la formule (8) donnera immédiatement cette autre formule:

$$(10) \qquad \Psi(x) - \Psi(x-\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s)}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

bien connue[1]), qui est valable pourvu que $\Re(x-\alpha) > 0$.

---

1) Voir par exemple H. Laurent: Traité d'Analyse, t. III, p. 466; Paris 1888.

Intégrons maintenant de 0 à α les deux membres de (8) terme à terme; il est permis de faire croître à l'infini les deux entiers positifs n et p, ce qui donnera pour la fonction

$$\omega_1(\alpha, x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty}\left[\log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \frac{\alpha}{x+s}\right] \tag{11}$$

ce développement en série de factorielles

$$\omega_1(\alpha, x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{\alpha^{s+1}}{s+1} C_s^0 + \frac{\alpha^s}{s} C_s^1 + \cdots + \frac{\alpha^2}{2} C_s^{s-1}}{s \cdot x(x+1)\cdots(x+s-1)}, \tag{12}$$

qui est valable pourvu que x soit situé dans le demi-plan D, tandis que le chemin d'intégration se trouve complètement dans G.

Quant à la fonction $\omega_1(\alpha, x)$, on aura, en se rappelant (10)

$$\omega_1(\alpha, x) = \alpha \Psi(x) + \log \Gamma(x - \alpha) - \log \Gamma(x), \tag{11a}$$

par conséquent

$$\omega_1(-1, x) = \omega_1(x) = \log x - \Psi(x), \tag{11b}$$

et la formule (11) nous donne le développement bien connu de cette fonction; le développement plus général (11) appartient à M. Mellin.[1])

Posons dans (12) $\alpha = -1$, nous obtiendrons ce développement en série de factorielles:

$$\omega_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{2} C_s^{s-1} - \frac{1}{3} C_s^{s-2} + \cdots - \frac{(-1)^s}{s+1} C_s^0}{s \cdot x(x+1)\cdots(x+s-1)}, \tag{13}$$

indiqué par Binet[2]) et qui est valable pourvu que $\Re(x) > 0$.

Posons encore $\alpha = +1$ et $x+1$ au lieu de x, nous aurons

$$\omega_1(x, x+1) = \Psi(x) - \log x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \omega_1(x).$$

Or, le développement en série de factorielles de $\omega_1(1, x+1)$ peut être trouvé directement de (12); appliquons encore (5) pour $\alpha = 1$ et $x+1$ au lieu de x, et faisons usage de la formule relative à la somme des coefficients de la factorielle du rang n; nous aurons cet autre développement, donné explicitement par Binet[3]):

$$\omega_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{2} C_s^{s-1} + \frac{2}{3} C_s^{s-2} + \cdots + \frac{s}{s+1} C_s^0}{s \cdot (x+1)(x+2)\cdots(x+s)}; \tag{14}$$

---

1) Citat de Jensen loc. cit. p. 49.

2) Journal de l'École polytechnique, cahier 27, p. 339; 1839.

3) loc. cit. p. 234.

cette formule est aussi valable pourvu que $\Re(x) > 0$. On voit que la formule (12) peut être désigné comme une généralisation très étendue des séries de Binet.

Posant dans (13), (14) $x = 1$: on obtiendra deux séries numériques pour la constante d'Euler, dont la seconde est due à Binet.[1])

Pour généraliser d'une manière analogue les deux autres séries de Binet, intégrons de 0 à α, terme à terme, la série qui figure au second membre de (11), ce qui est toujours permis. Or, l'intégration effectuée sur le terme sommatoire donnera

$$\left(x + s - \frac{\alpha}{2}\right) \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \alpha - \frac{\alpha}{2}\left[\log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \frac{\alpha}{x+s}\right],$$

d'où, en posant

$$(15) \qquad \omega(\alpha, x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\left[\left(x + s - \frac{\alpha}{2}\right) \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \alpha\right],$$

l'intégrale du premier membre de (11) deviendra précisément

$$(16) \qquad \int_0^\alpha \omega_1(\alpha, x)\, d\alpha = \omega(\alpha, x) + \frac{\alpha}{2}\, \omega_1(\alpha, x).$$

Cela posé, intégrons aussi de 0 à α, terme à terme, le second membre de (12) ce qui est permis avec la restriction ordinaire; nous obtiendrons

$$(17) \quad \omega(\alpha, x) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{s\alpha^{s+2}}{(s+1)(s+2)} C_s^0 + \frac{(s-1)\alpha^{s+1}}{s(s+1)} C_s^1 + \cdots \frac{1 \cdot \alpha^3}{2 \cdot 3} C_s^{s-1}}{s \cdot x(x+1) \cdots (x+s-1)},$$

formule qui est valable pourvu que le chemin d'intégration soit situé complètement dans le demi-plan G, tandis que x est situé dans D.

Remarquons maintenant que l'intégrale de 1 à x prise par rapport à x du terme général au second membre de (11), sera

$$-(x + s - \alpha) \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + (s + 1 - \alpha) \log\left(1 - \frac{\alpha}{s+1}\right),$$

nous aurons aisément

$$-\int_1^x \omega_1(\alpha, x)\, dx = \omega(\alpha, x) + \omega(\alpha, 1) +$$

$$+ \frac{\alpha}{2}(\omega_1(\alpha, x) - \omega_1(\alpha, 1)) - \frac{\alpha^2}{2}(\Psi(x) + C);$$

---

1) loc. cit. p. 258.

or, la formule (11a) donnera de même

$$-\int_1^x \omega_1(\alpha, x)\,dx = -\alpha \log \Gamma(x) - \int_1^x \log \frac{\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(x)}\,dx.$$

Posons ensuite $\alpha = -1$, ces deux dernières formules donneront

$$\omega(-1, x) = \log \Gamma(x) - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x + \omega(-1, 1),$$

de façon que la formule (4a) pour $\Gamma(2x)$ donnera aisément

$$\omega(-1, x) + \omega(-1, x + \tfrac{1}{2})$$
$$= \omega(-1, 2x) + x \log \frac{x}{x + \frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} + \log \sqrt{2\pi} + \omega(-1, 1).$$

Cela posé, faisons croître à l'infini la partie réelle de x; les fonctions ω s'évanouiront parce qu'elles ne sont autre chose que les termes de reste des séries convergentes obtenues de (15) pour $\alpha = -1$; en outre, la vraie valeur du terme qui se présente sous forme indéterminée, sera $+\frac{1}{2}$, ce qui donnera

$$\omega(-1, 1) = -\log \sqrt{2\pi},$$

et nous aurons finalement

$$\text{(18)} \quad \omega(-1, x) = \omega(x) = \log \Gamma(x) - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x - \log \sqrt{2\pi};$$

c'est-à-dire que la série infinie figurant au second membre de (15), valable dans toute l'étendue du plan, ne deviendra autre chose que la série donnée par Gudermann[1]) pour $\omega(x)$, tandis que (17) nous donnera cette formule due à Binet[2])

$$\text{(19)} \quad \omega(x) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{2\cdot 3} C_s^{s-1} - \frac{2}{3\cdot 4} C_s^{s-2} + \cdots - \frac{(-1)^s s}{(s+1)(s+2)} C_s^0}{s \cdot x(x+1)\cdots(x+s-1)},$$

qui est valable pour $\Re(x) > 0$.

Pour trouver la quatrième série de Binet remarquons que (15) donnera

$$\omega(1, x+1) = -\omega(x),$$

d'où en posant dans (17) $\alpha = 1$ et $x + 1$ au lieu de x:

$$\text{(20)} \quad \omega(x) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{2\cdot 3} C_s^{s-1} + \frac{2}{3\cdot 4} C_s^{s-2} + \cdots + \frac{s}{(s+1)(s+2)} C_s^0}{s \cdot (x+1)(x+2)\cdots(x+s)},$$

1) Journal de Crelle, t. XXIX, p. 209—212; 1845.
2) loc. cit. p. 339.

ce qui est précisément la formule susdite de Binet[1]) valable aussi pourvu que $\Re(x) > 0$.

Combinant enfin les deux formules (11a) et (16), on aura

$$(21)\qquad \int_0^\alpha \log\Gamma(x-\alpha)\,d\alpha = \omega(\alpha, x) + \frac{\alpha}{2}(\log\Gamma(x-\alpha) + \log\Gamma(x)),$$

qui doit être considérée comme généralisation de la formule de Raabe que l'on obtient en posant simplement $\alpha = -1$, d'où, en vertu de (18):

$$(22)\qquad \int_0^1 \log\Gamma(x+\alpha)\,d\alpha = x(\log x - 1) + \log\sqrt{2\pi},$$

valable pour $\Re(x) > 0$.

Dans un premier mémoire[2]) sur ce sujet Raabe a démontré la formule (22) dans le cas où x est égal à un entier non négatif; dans un second mémoire[3]) il étudie le cas plus général où x désigne un nombre positif rationnel ou non. D'autres démonstrations de la formule de Raabe ont été données plus tard par Stern[4]) et Bertrand.[5])

Copenhague, le 2 décembre 1901.

Die wiederholte Anwendung der Landenschen Transformation.

Von P. KOKOTT in Sagan.

Die vorliegende Untersuchung beruht auf einem von mir im Journal für reine und angewandte Mathematik **124** veröffentlichten Aufsatz über die Landensche Transformation der elliptischen Integrale. Es ist daselbst nachgewiesen, daß sich diese Transformation als die Abbildung zweier Kreise aufeinander nach einem einfachen geometrischen Gesetz auffassen läßt. Im folgenden soll durch wiederholte Anwendung dieses Gesetzes den in der Theorie der elliptischen Funktionen

1) loc. cit. p. 231.

2) Journal de Crelle, t. XXV, p. 149; 1843.

3) Journal de Crelle, t. XXVIII, p. 12—14; 1844.

4) Zur Theorie der Eulerschen Integrale; citation de G. F. Meyer: Bestimmte Integrale, p. 158; Leipzig 1871.

5) Traité de calcul différentiel et intégral, t. II; citation d'Hermite: p. 102; Paris 1883.

so bedeutsamen algebraischen Entwicklungen ein geometrisches Gepräge aufgedrückt werden, welches das Studium der betreffenden Transformation infolge seiner Anschaulichkeit wesentlich erleichtert.

Der Kreis A habe den Radius b; auf dem Durchmesser ED sei ein Stück $AB = c$ abgetragen; ein beliebiger Punkt C des Kreises ist offenbar durch die Lage der Sehne CF charakterisiert, von der das Stück CB „Strahl", das andere BF „Gegenstrahl" genannt werden soll. Der Kreis G habe als Radius das arithmetische Mittel der beiden Größen b und c, also $GL = \frac{1}{2}(b + c)$; das auf dem Durchmesser abgetragene Stück GH sei das geometrische Mittel, also $GH = \sqrt{bc}$.

Um einen beliebigen Punkt C des ersten Kreises auf die Peripherie des zweiten zu projizieren, verfahre man folgendermaßen: Man verbinde den Gegenpunkt F von C mit D und ziehe durch H die

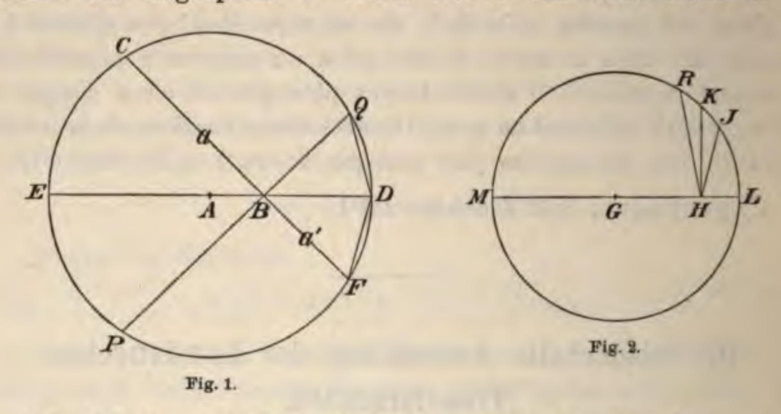


Fig. 1. Fig. 2.

Parallele HJ; dann ist J der Bildpunkt von C. Der Durchmesser ML ist zu ED parallel vorausgesetzt. Wir wollen einige besonders charakteristische Punkte hervorheben. Der Bildpunkt zu D ist offenbar der Punkt L; denn denkt man sich den beliebigen Strahl CF um B herumgedreht, bis C in die Lage von D kommt, so fällt FD mit ED zusammen, also ist die Parallele durch H im zweiten Kreise mit ML identisch; sie trifft demnach die Peripherie von G in L und M. Der Definition gemäß können beide Punkte die Bilder von D sein; es soll weiter unten diese Zweideutigkeit beseitigt werden; vorläufig wollen wir willkürlich Punkt M fallen lassen, also L das eindeutige Bild von D nennen. Um den Punkt E abzubilden, denken wir uns den beweglichen Strahl CF nach links gedreht, bis er mit ED zusammenfällt. Die Linie FD, die als Leitlinie auftritt, geht dann in die Tangente in D über, steht also auf ED senkrecht. Also muß die Parallele durch H ebenfalls auf ML senkrecht stehen. Die zwischen D und E gelegenen Punkte des oberen Halbkreises werden demnach auf das

Bogenstück LK des zweiten Kreises projiziert. Dem Punkt C liegt auf dem unteren Halbkreise der Punkt P wie Spiegelbild zu Gegenstand gegenüber. Die zu P gehörige Leitlinie DQ ist offenbar zu ED gleichgeneigt wie FD, nur geht die Neigung nach der anderen Seite. Folglich liegt der zur Leitlinie parallele Strahl HR ebenfalls zu HJ in Bezug auf HK symmetrisch. Es wird also der ganze untere Halbkreis ED auf das Bogenstück KM projiziert, oder der ganze Kreis A bildet sich auf den oberen Halbkreis von G ab. Soll auch der untere Halbkreis G der Träger der Bildpunkte sein, so denken wir uns den Kreis A doppelt und zwar so, daß die zweite Windung nach Art einer Schraubenlinie in D mit der ersten zusammenhängt. Die Stelle, wo HJ zum zweiten Male die Peripherie schneidet, ist dann das Bild des unmittelbar über Q befindlichen Punktes der zweiten Windung. Dadurch ist die Zweideutigkeit, von der oben die Rede war, beseitigt.

Die soeben geschilderte Beziehung zweier Kreise kann analytisch als der Übergang eines elliptischen Integrales erster Gattung auf ein anderes vermittelst der Landenschen Transformation angesehen werden oder sie ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa_1 y^2)}} = \frac{1+\varkappa'}{2} \frac{dx^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}.$$

Nach den Untersuchungen, die ich in mehrfachen Abhandlungen, besonders in der in dieser Zeitschrift unter dem Titel „Eine geometrische Deutung des Additionstheorems“ erschienenen, veröffentlicht habe, kann man nämlich die Punkte der Peripherie eines beliebigen Kreises durch ein elliptisches Integral

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

darstellen, wo u auf dem oberen Halbkreise alle Werte zwischen K und $K+iK'$, auf dem unteren die zwischen $K+iK'$ und $K+2iK'$ annimmt. Bezeichnet man nun die Variabeln am zweiten Kreise mit u_1, so sind die nach dem obigen geometrischen Gesetze einander entsprechenden Punkte gerade durch die Relation

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(1+\varkappa')u$$

mit einander verbunden. Zum Beispiel entspricht dem Punkte E der Punkt K im zweiten Kreise, der senkrecht über H liegt. Nun hat E die Koordinate $K+iK'$ nach dem Modul $\frac{b-c}{b+c}$, K die Koordinate $K_1 + \frac{1}{2}iK_1'$ nach dem Modul $\frac{\frac{1}{2}(b+c)-\sqrt{bc}}{\frac{1}{2}(b+c)+\sqrt{bc}}$. Bekanntlich ist der

Periodizitätsmodul K_1' der Landenschen Transformation mit K' durch die Gleichung $K_1' = (1 + \varkappa')K'$ verbunden, während K_1 mit K durch die Beziehung $K_1 = \frac{1}{2}(1 + \varkappa')K$ zusammenhängt. Eine eingehendere Beschreibung des analytischen Zusammenhangs beider Kreise findet man in dem eingangs erwähnten Aufsatze des Journals für Mathem.

Wir wollen nun zunächst die Lage der Punkte B und H näher betrachten. Der Punkt B ist auf dem Durchmesser ED beliebig angenommen, jedoch mit der Beschränkung, daß er noch innerhalb der Kreisfläche verbleibt, d. h. daß $c < b$ ist. Folglich ist $\frac{1}{2}(b+c) < \frac{1}{2}(b+b)$ oder b: der Radius des zweiten Kreises ist daher kleiner als der des ersten. Nun ist $GH = \sqrt{bc}$, also sicher größer als c. Der Punkt H liegt also näher an der Peripherie des Kreises als der Punkt B. Bildet man nun den Kreis G wiederum mittelst einer Landenschen Transformation ab, so wiederholt sich derselbe Vorgang; der neue Kreis ist kleiner, der neue Punkt H_1 weiter vom Zentrum entfernt, als es vorher der Fall war. Man erkennt daher leicht, daß durch eine unendlich oft ausgeführte Operation der Punkt H schließlich in die Peripherie seines Grenzkreises fallen muß; es wird also $c = b$ oder der Modul $\varkappa$ des elliptischen Integrales $= 0$; für diesen letzten Kreis ist demnach der Periodizitätsmodul $K = \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}$, die Umkehrungsfunktion, die bis dahin eine Sinusamplitude war, wird eine gewöhnliche Kreisfunktion, nämlich ein Sinus. Übrigens ist zu bemerken, daß eine sorgfältig ausgeführte Zeichnung des arithmetischen und geometrischen Mittels der beiden Stücke b und c schon nach einer zwei- oder dreimal ausgeführten Operation den Punkt H in die Peripherie des letzten Kreises überführt.

Fassen wir jetzt einen beliebigen Punkt C der Peripherie des ersten Kreises ins Auge, so wird derselbe, falls er auf der oberen Hälfte liegt, in den Raum zwischen L und K projiziert; durch eine nochmalige Transformation gelangt er in noch größere Nähe des Anfangspunktes der Zählung; schließlich wird er in den Anfangspunkt selbst projiziert. Dasselbe ist natürlich der Fall, wenn er ursprünglich auf dem unteren Halbkreise gelegen war. Man kann also die fortgesetzte Landensche Transformation als die allmähliche Abbildung eines ganzen Kreises auf einen einzigen Punkt ansehen.

Wir hatten vorher bemerkt, daß zwischen zwei beliebigen Punkten, welche einander entsprechen, die Relation besteht

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \varkappa')u.$$

Setzt man hierin $u = K$, also $u_1 = K_1$, so entsteht

$$K_1 = \frac{1 + \varkappa'}{2} K.$$

Nun ist $\varkappa = \frac{b - c}{b + c}$, folglich $\varkappa' = \frac{2\sqrt{bc}}{b + c}$ und $\frac{1 + \varkappa'}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{b + c}{2} + \sqrt{bc}\right)}{\frac{1}{2}(b + c)}$,

d. h. $\frac{K}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}(b + c)}{\frac{1}{2}\left(\frac{b + c}{2} + \sqrt{bc}\right)}$.

Bezeichnen wir nun $\frac{1}{2}(b + c)$, das den Radius des zweiten Kreises darstellt, mit r_1 und $\frac{1}{2}\left(\frac{b + c}{2} + \sqrt{bc}\right)$, welches aus $\frac{1}{2}(b + c)$ und $\sqrt{bc}$ ebenso entstanden ist wie $\frac{1}{2}(b + c)$ aus b und c, mit r_2, so ist

$$\frac{K}{K_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Ebenso ergibt sich durch nochmalige Anwendung der Transformation

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{K_2}{K_3} = \frac{r_3}{r_4} \quad \text{u. s. f.}$$

und durch Multiplikation aller Gleichungen:

$$\frac{K}{K_n} = \frac{r_1}{r_{n+1}}.$$

Ist $n = \infty$, so erhalten wir

$$\frac{K}{K_\infty} = \frac{r_1}{r_\infty}, \quad \text{d. h.} \quad K = \frac{r_1}{r_\infty} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad K = \frac{\frac{b + c}{2}}{r} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Hier bedeutet r den Radius des Grenzkreises, gegen den das arithmetisch-geometrische Mittel der beiden Größen b und c konvergiert. Ich bemerke hierbei, daß die Entwicklung von K bereits von Jacobi herrührt und z. B. bei Houël, Bd. IV S. 257 sich findet, jedoch fehlt den Darstellungen der geometrische Charakter.

In der Praxis würde sich diese Methode zur Berechnung von K nach einem gegebenen Modul $\varkappa$ am einfachsten folgendermaßen gestalten: Man bestimme φ aus der Gleichung

$$\varkappa = \sin\varphi$$

und setze

$$\frac{b - c}{b + c} = \sin\varphi,$$

also

$$\frac{b}{c} = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} = \cot^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right),$$

woraus

$$c = b\,\mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Danach zeichne man einen Kreis mit dem beliebigen Radius b, trage auf einen festen Durchmesser $c = b\,\mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$ ab und gehe zum Grenzkreise über, der nach etwa dreimaliger Anwendung des arithmetisch-geometrischen Mittels als hinreichend genau angesehen werden kann. Das Verhältnis von $\frac{b+c}{2}$ zum Radius des Grenzkreises ist dann die für gewöhnlich mit $\frac{1}{\eta}$ bezeichnete Grenze, für welche

$$K = \frac{1}{\eta}\frac{\pi}{2}$$

ist.

In derselben Weise ist K' zu bestimmen; nur muß man $\varkappa' = \cos\varphi$ setzen, so daß also $c' = b\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}$ wird. Der Grenzkreis entsteht aus b und c' ebenso, wie der vorige aus b und c.

Der Winkel φ hat übrigens eine einfache geometrische Bedeutung. Da nämlich $\varkappa = \frac{b-c}{b+c}$ ist, so hat $\varkappa'$ den Wert $\frac{\sqrt{bc}}{\frac{b+c}{2}}$; nun ist der Radius des zweiten Kreises $\frac{b+c}{2}$, das auf dem festen Durchmesser abgetragene Stück $GH = \sqrt{bc}$; errichtet man also in H die Senkrechte HK, so ist $\cos KGH = \varkappa'$; der Winkel φ ist demnach derjenige Winkel, den der Radius nach dem Punkte $K_1 + \frac{iK_1'}{2}$ mit dem festen Radius bildet. Daraus läßt sich leicht der Wert von K in anderer Form darstellen. Es ist nämlich

$$K_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \varkappa')K;$$

wenn wir nun der Symmetrie wegen die Winkel nach den Punkten $K_p + \frac{1}{2}iK_p'$ mit φ_p bezeichnen, so ist unter Berücksichtigung der Formel $\frac{1}{2}(1 + \cos\varphi) = \cos^2\frac{\varphi}{2}$:

$$K_1 = \cos^2\frac{\varphi_1}{2}\cdot K,$$

$$K_2 = \cos^2\frac{\varphi_2}{2}\cdot K_1,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$K_n = \cos^2\frac{\varphi_n}{2}\cdot K_{n-1},$$

woraus durch Multiplikation

$$\frac{\pi}{2} = \cos^2\frac{\varphi_1}{2}\cdot\cos^2\frac{\varphi_2}{2}\cdots\cos^2\frac{\varphi_n}{2}\cdot K$$

oder

$$K = \frac{\pi/2}{\prod\limits_{1}^{\infty}{}_p \cos^2\frac{\varphi_p}{2}}.$$

Diese Formel wird gewöhnlich rein algebraisch hergeleitet; hier haben die Winkel φ eine bestimmte geometrische Bedeutung. Insbesondere läßt das Abbildungsverfahren ohne weiteres erkennen, daß $\lim \varphi_n = 0$ ist.

Sagan, den 2. März 1902.

Reduktion der Trägheitsmomente einfacher Körper auf die Trägheitsmomente einzelner Massenpunkte, die auf ihrer Oberfläche liegen.

Von E. Rehfeld in Elberfeld.

Unter dem Titel: „Elementare Berechnung der Trägheitsmomente von Linien, Flächen und Körpern“ — habe ich in dem Archiv der Mathematik und Physik (2) **16,** 36—67 eine Abhandlung veröffentlicht, die das Prinzip der geometrischen Verwandtschaft benutzt, um in ganz elementarer Weise, ohne Anwendung der Infinitesimalrechnung die Trägheitsmomente für die Strecke, die Flächen des Parallelogramms, des Dreiecks und der Ellipse, für die Körper des dreiseitigen Prismas, des Parallelepipeds, der dreiseitigen Pyramide, des Cylinders, Kegels und Ellipsoids abzuleiten. Was die angewandte Methode besonders empfehlenswert macht, ist der Umstand, daß die gewonnenen Resultate, wie sie sich in dem arithmetischen Gewande darstellen, für jede Lage der Momentenachse in voller Allgemeinheit Gültigkeit haben. Es war mir bei der Veröffentlichung dieser kleinen Arbeit nicht bekannt[1]), daß das Prinzip der geometrischen Verwandtschaft schon früher zur Berechnung der Trägheitsmomente benutzt worden war. Der erste Versuch dieser Art wurde meines Wissens von Herrn Zehme in dem

---

1) Vgl. hierzu: Fortschritte der Physik 1897 I, 353.

Programm der Provinzialgewerbeschule in Hagen vom Jahre 1858 gemacht (ein Auszug dieser Arbeit findet sich in der Zeitschrift für Math. u. Phys. 4). Dort wird nach dieser Methode bestimmt das Trägheitsmoment einer Strecke, eines Rechtecks und eines Rechteckers. Auch Schell in seiner „Theorie der Bewegung und der Kräfte", erste Auflage 1870, wendet das Prinzip der geometrischen Verwandtschaft an zur Berechnung der Trägheitsmomente einer Strecke und der Fläche eines Parallelogramms. (Das Trägheitsmoment des Dreiecks wird aus dem des Parallelogramms abgeleitet, nicht selbständig entwickelt). In der deutschen Übersetzung der 6. Auflage von Routh „Dynamik der Systeme starrer Körper", Leipzig 1898, findet man ebenfalls eine systematische und ausgedehnte Benutzung der affinen Verwandtschaft bei der Berechnung der Trägheitsmomente. Wenn somit auch der Grundgedanke der von mir in der kleinen Abhandlung verfolgten Methode bekannt war, so habe ich doch dieselbe meines Wissens zum ersten Male angewandt zur ganz elementaren Bestimmung der Trägheitsmomente für die Flächen des Dreiecks und der Ellipse, für die Körper des dreiseitigen Prismas, der dreiseitigen Pyramide, des schiefen elliptischen Cylinders und Kegels und des Ellipsoides.

Die folgende Arbeit ist als eine Fortsetzung der angegebenen Abhandlung anzusehen; sie konnte daraus hervorwachsen, weil die arithmetischen Ausdrücke für die Trägheitsmomente der verschiedenen geometrischen Gebilde für jede Lage der Momentenachse die gesuchten Werte enthielten. Es wurde dies dadurch ermöglicht, daß die bei der Bestimmung der Trägheitsmomente auftretenden Strecken nicht aus den materiellen Systemen selbst in ihrer wirklichen Größe entnommen wurden, sondern daß an Stelle dieser Strecken ihre Projektionen auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene eingeführt wurden, die, für jede neue Lage der Achse andere Werte annehmend, doch die Resultate in allgemeiner Form, für jede Lage der Momentenachse passend, lieferten.

Wiewohl Herr Routh in seiner Dynamik und Herr Reye im 10. Bande der Zeitschrift für Math. u. Phys. bewiesen haben, daß jedes körperliche System bezüglich seines Trägheitsmomentes auf mannigfache Weise durch vier materielle Punkte von gleicher Masse ersetzt werden kann, so ist es doch, zumal diese vier Punkte nicht alle auf der Oberfläche des zu untersuchenden Systems liegen können, in der Praxis vorzuziehen, als Ersatz für ein System eine Reihe von Massenpunkten (mehr als vier) zu wählen, die auf der Oberfläche des Systems liegen, mithin der Messung leichter zugänglich sind. In dieser kleinen Arbeit sind besonders diejenigen Massenpunkte auf der Oberfläche der Körper

aufgesucht worden, welche die Körper hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente vertreten können. Es wurde deshalb auch manche Reduktion auf eine geringere Zahl von Punkten, die aber zum Teil außerhalb oder innerhalb der Körper liegen, nicht aufgeführt.

Schon Herr **Mehmke** hat im 29. Bande der Zeitschrift für Math. u. Phys. eine Reihe von Reduktionen für die einfachen Körper (Prisma, Cylinder, Pyramide, Kegel, Ellipsoid) angegeben. Auch findet man bei Herrn **Routh** einige Reduktionen für das Tetraeder, den Kegel, die Kugel und das Ellipsoid.

Der auf den folgenden Seiten eingeschlagene Weg zur Reduktion der Trägheitsmomente körperlicher Gebilde auf das Trägheitsmoment einzelner Massenpunkte weicht von den Methoden, welche die Herren **Routh** und **Mehmke** anwenden, vollständig ab. Die Resultate werden durch ganz elementare Betrachtungen, ohne Anwendung der Infinitesimalrechnung, gefunden.

Um den zur Lösung führenden Weg zu zeigen, dürfte es genügen, an zwei Körpern je drei Reduktionen durchzuführen, und dann bei den einzelnen Körpern summarisch nur die Resultate anzugeben.

Benutzt wurden bei den Entwicklungen 2 Hilfssätze:

1. Hat im Raume eine Achse eine beliebige Lage zu der Ebene eines Dreiecks, so ist die Summe der Quadrate über den Abständen der Dreiecksecken von der Achse gleich der Summe der Quadrate über den Abständen der Ecken von der zu der gegebenen Achse parallelen Schwerpunktsachse des Dreiecks, vermehrt um das dreifache Quadrat des Abstandes der parallelen Achsen.

2. Hat im Raume eine Achse eine beliebige Lage zu der Ebene eines Vierecks, so ist die Summe der Quadrate über den Entfernungen der Ecken von der Achse gleich der Summe der Quadrate über den Entfernungen der Ecken von der zu der gegebenen Achse parallelen Geraden durch den Schnittpunkt der Verbindungslinien gegenüberliegender Seitenmitten des Vierecks, vermehrt um das vierfache Quadrat des Abstandes der parallelen Achsen.

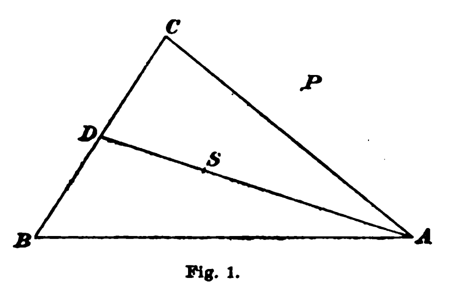


Fig. 1.

Es sollen die Beweise der beiden Sätze für den Fall kurz angeführt werden, daß die Achse zu den Ebenen des Dreiecks und des Vierecks senkrecht steht.

Zu 1 (Fig. 1). Ist P der Schnittpunkt der Drehachse mit der Ebene des Dreiecks ABC, AD eine seitenhalbierende Transversale und

S der Schwerpunkt des Dreiecks, so ist, wenn SP mit AS den spitzen Winkel α bildet:

$$\begin{aligned} AP^2 &= AS^2 + SP^2 - 2\,AS \cdot SP \cdot \cos\alpha, \\ 2\,DP^2 &= 2\,SD^2 + 2\,SP^2 + 4\,SD \cdot SP \cos\alpha; \\ \hline AP^2 + 2\,DP^2 &= AS^2 + 2\,SD^2 + 3\,SP^2. \end{aligned}$$

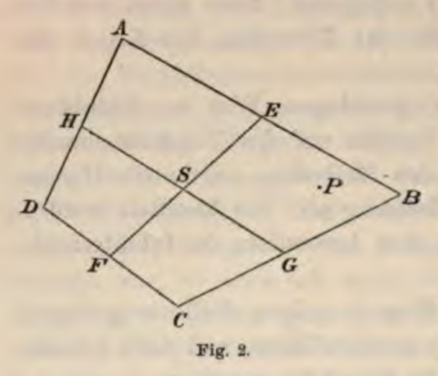


Fig. 2.

Ferner ist:

$$BP^2 + CP^2 = BD^2 + CD^2 + 2\,DP^2,$$

also auch:

$$\begin{aligned} &AP^2 + BP^2 + CP^2 \\ &= AS^2 + BD^2 + CD^2 + 2\,SD^2 + 3\,SP^2 \\ &= AS^2 + BS^2 + CS^2 + 3\,SP^2. \end{aligned}$$

Zu 2 (Fig. 2). Sind P der Schnittpunkt der Achse mit der Ebene des Vierecks $ABCD$, EF und GH die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseitenpaare AB, CD und BC, DA, ferner S der Schnittpunkt von EF und GH, so ist

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 &= AE^2 + EB^2 + 2\,PE^2 + CF^2 + FD^2 \\ &\quad + 2\,PF^2 \\ &= AS^2 + BS^2 - 2\,ES^2 + 2\,PE^2 + CS^2 \\ &\quad + DS^2 - 2\,FS^2 + 2\,PF^2 \\ &= AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 - 2\,ES^2 - 2\,FS^2 \\ &\quad + 2\,ES^2 + 2\,FS^2 + 4\,SP^2 \\ &= AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 + 4\,SP^2. \end{aligned}$$

Fig. 3.

1. *Die Reduktion des Trägheitsmomentes des homogenen schiefwinkligen Parallelepipedons auf das Trägheitsmoment einzelner Punktmassen.* — Seien $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$ die Eckpunkte der oberen und unteren Grundfläche, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 heißen mögen. Der Schwerpunkt des Körpers liegt in S, der durch S parallel den Grundflächen gelegte Schnitt sei das Parallelogramm $ABCD$, dessen Seitenmitten durch $EFGH$ bezeichnet werden sollen. Die Mitten der oberen und unteren Grundkanten seien entsprechend: $E_1 F_1 G_1 H_1$, $E_2 F_2 G_2 H_2$ (Fig. 3). Zwischen den Kantenlängen und den Verbindungsstrecken des Schwerpunktes mit den Ecken, den Kantenmitten und den

Schwerpunkten der Begrenzungsflächen lassen sich leicht folgende Beziehungen ableiten:

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 = AB^2 + BC^2,$$
$$ES^2 + FS^2 + GS^2 + HS^2 = \tfrac{1}{2}(AB^2 + BC^2),$$
$$E_1S^2 + G_1S^2 + F_2S^2 + H_2S^2 = \tfrac{1}{2}(AB^2 + BC^2) + S_1S_2^2,$$
$$A_1S^2 + B_1S^2 + C_1S^2 + D_1S^2 + A_2S^2 + B_2S^2 + C_2S^2 + D_2S^2$$
$$= 2(AB^2 + BC^2 + S_1S_2^2).$$

Es sei h_p eine beliebige Momentenachse durch den Punkt P, für welche das Trägheitsmoment (T. M.) des Körpers T_p sei. Die durch S parallel zu h_p gezogene Schwerpunktsachse soll mit h_s, das zugehörige T. M. mit T_s bezeichnet werden.

Die Projektionen der Punkte des Parallelepipedons auf eine zur Momentenachse h_p senkrechte Ebene werden durch kleine Buchstaben angegeben, so daß ab, as, sp die Projektionen von AB, AS, SP bezeichnen; es sind aber auch as und sp die Abstände der Punkte A und S bezüglich von den Achsen h_s und h_p. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß die obigen Beziehungen für die Projektion richtig bleiben und in die entsprechenden mit kleinen Buchstaben übergehen.

Bezeichnet man die Masse des homogenen Körpers mit m, so wird das T. M. des Körpers für die beliebige Achse h_s angegeben durch[1]):

$$T_s = \frac{m}{12}(ab^2 + bc^2 + s_1s_2^2).$$

Für das Moment T_p besteht:

$$T_p = T_s + m \cdot sp^2.$$

1. Werden die Verbindungslinien der Ecken mit dem Schwerpunkt zur Darstellung von T_s benutzt, so ergibt sich:

$$T_s = \frac{m}{24}(a_1s^2 + b_1s^2 + c_1s^2 + d_1s^2 + a_2s^2 + b_2s^2 + c_2s^2 + d_2s^2).$$

Beachtet man die aus den Projektionen der Dreiecke A_1C_2P, B_1D_2P, C_1A_2P, D_1B_2P sich ergebenden Beziehungen:

$$a_1s^2 + c_2s^2 + 2\,sp^2 = a_1p^2 + c_2p^2,$$
$$b_1s^2 + d_2s^2 + 2\,sp^2 = b_1p^2 + d_2p^2,$$
$$c_1s^2 + a_2s^2 + 2\,sp^2 = c_1p^2 + a_2p^2,$$
$$d_1s^2 + b_2s^2 + 2\,sp^2 = d_1p^2 + b_2p^2,$$

so erhält man

$$T_p = \frac{m}{24}(a_1p^2 + b_1p^2 + c_1p^2 + d_1p^2 + a_2p^2 + b_2p^2 + c_2p^2 + d_2p^2) + \tfrac{2}{3}\,m \cdot sp^2,$$

1) Archiv der Math. u. Phys. (2) **16**, 53.

woraus folgt: Das T. M. eines Parallelepipedons ist für jede Achse gleich dem T. M. der acht Eckpunkte und des Körperschwerpunktes, wenn jeder Eckpunkt $\frac{1}{24}$, der Schwerpunkt aber $\frac{2}{3}$ der Körpermasse enthält.

2. Wegen der Gleichungen

$$as^2 + bs^2 + cs^2 + ds^2 = ab^2 + bc^2, \quad 2(s_1s^2 + s_2s^2) = s_1s_2^2$$

kann T_s auf die Form gebracht werden:

$$T_s = \frac{m}{12}(as^2 + bs^2 + cs^2 + ds^2) + \frac{m}{6}(s_1s^2 + s_2s^2),$$

so daß

$$T_p = T_s + m \cdot sp^2,$$

weil nach Hilfssatz 2

$$as^2 + bs^2 + cs^2 + ds^2 + 4\,sp^2 = ap^2 + bp^2 + cp^2 + dp^2,$$

und ferner:

$$s_1s^2 + s_2s^2 + 2\,sp^2 = s_1p^2 + s_2p^2$$

ist, auch geschrieben werden kann:

$$T_p = \frac{m}{12}(ap^2 + bp^2 + cp^2 + dp^2) + \frac{m}{6}(s_1p^2 + s_2p^2) + \tfrac{1}{3}\,m \cdot sp^2.$$

Werden mithin die Mittelpunkte von vier parallelen Kanten mit je $\frac{1}{12}$, die Schwerpunkte der beiden Begrenzungsflächen, deren Ecken auf den parallelen Kanten liegen, mit je $\frac{1}{6}$ und der Schwerpunkt des Körpers mit $\frac{1}{3}$ der Körpermasse belegt, so ist das T. M. dieses siebenpunktigen Massensystems für jede Achse dem des Parallelepipedons gleichwertig.

3. Es besteht die Beziehung

$$e_1s^2 + g_1s^2 + f_2s^2 + h_2s^2 + es^2 + fs^2 + gs^2 + hs^2 = ab^2 + bc^2 + s_1s_2^2,$$

weshalb

$$T_s = \frac{m}{12}(e_1s^2 + g_1s^2 + f_2s^2 + h_2s^2 + es^2 + fs^2 + gs^2 + hs^2)$$

ist. Nun sind aber $E_1G_1F_2H_2$ Ecken eines Tetraeders, dessen Schwerpunkt S die Verbindungslinien S_1S_2 der Mitten der Gegenkanten halbiert; es kann mithin auf das Viereck $e_1g_1f_2h_2$ mit den Punkten s und p in der Projektion der Hilfssatz 2 Anwendung finden, wonach:

$$e_1s^2 + g_1s^2 + f_2s^2 + h_2s^2 + 4\,sp^2 = e_1p^2 + g_1p^2 + f_2p^2 + h_2p^2$$

ist, und da ferner

$$es^2 + gs^2 + fs^2 + hs^2 + 4\,sp^2 = ep^2 + gp^2 + fp^2 + hp^2$$

ist, so kann T_p dargestellt werden durch:

$$T_p = \frac{m}{12}(e_1p^2 + g_1p^2 + f_2p^2 + h_2p^2 + ep^2 + gp^2 + fp^2 + hp^2) + \tfrac{1}{3}\,m \cdot sp^2.$$

Es ergibt sich mithin: Das T. M. eines Parallelepipedons kann für jede Momentenachse durch das T. M. der vier Schwerpunkte der Seitenflächen, der vier über Kreuz liegenden Halbierungspunkte in den Kanten der Grundflächen und des Körperschwerpunktes ersetzt werden, wenn die ersten acht Punkte je $\frac{1}{12}$, der letzte $\frac{1}{3}$ der Körpermasse in sich vereinigen.

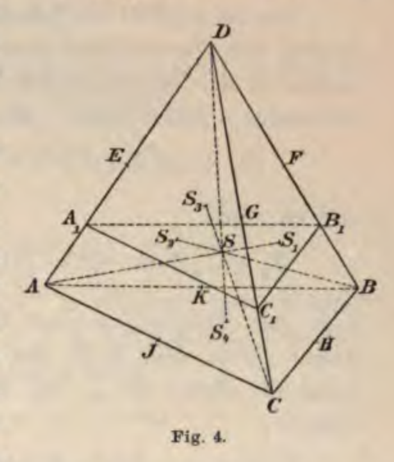


Fig. 4.

2. *Die Reduktion des Trägheitsmomentes einer homogenen dreiseitigen Pyramide auf das Trägheitsmoment einzelner Massenpunkte.* — Die Pyramide habe die Ecken $ABCD$, die Mitten der Kanten seien $EFGHIK$, der Körperschwerpunkt liege in S, die Schwerpunkte der Begrenzungsflächen, die den Ecken A, B, C, D gegenüber liegen, mögen bezüglich S_1, S_2, S_3, S_4 genannt werden, und der durch S parallel zu ABC gelegte Schnitt heiße $A_1B_1C_1$. (Fig. 4.)

Zwischen den Abständen der Eckpunkte, der Flächenschwerpunkte und der Kantenmittelpunkte vom Schwerpunkte der Pyramide bestehen die Beziehungen[1]):

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 = \tfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2 + AD^2 + BD^2 + CD^2),$$

$$ES^2 + FS^2 + GS^2 + HS^2 + IS^2 + KS^2 = \tfrac{1}{8}(AB^2 + BC^2 + CA^2 + AD^2 + BD^2 + CD^2),$$

$$S_1S^2 + S_2S^2 + S_3S^2 + S_4S^2 = \tfrac{1}{36}(AB^2 + BC^2 + CA^2 + AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

Die Achsen, auf welche das T. M. bezogen werden soll, seien auch hier die durch den beliebigen Punkt P gehende Achse h_p und die zu h_p parallele Schwerpunktsachse h_s. Die T. M. für diese Achsen seien T_p und T_s.

Die Projektionen der Punkte der Pyramide auf eine zu h_p senkrechte Ebene sollen wieder durch kleine Buchstaben angegeben werden, so daß auch hier durch as, ap, sp die Projektionen der Strecken AS, AP, SP, aber auch die Entfernungen der Punkte A und S von den Achsen h_s und h_p angegeben werden. Daß für diese Projektionen die angegebenen Beziehungen bestehen bleiben, ist klar. Wird mit m die Masse der homogenen Pyramide bezeichnet, so ist:

$$T_s = \frac{m}{80}(ab^2 + bc^2 + ca^2 + ad^2 + bd^2 + cd^2).$$

1) Archiv der Math. u. Phys. ibid. S. 58,60.

1. Wegen der ersten Beziehung nimmt T_s die Form an:

$$T_s = \frac{m}{20}(as^2 + bs^2 + cs^2 + ds^2).$$

Nun ist $ABCD$ ein Tetraeder, dessen Schwerpunkt S in dem Schnittpunkte der Verbindungslinien der Gegenkantenmitten liegt; es bildet mithin in der Projektion $abcd$ ein Viereck, auf welches der Hilfssatz 2 Anwendung finden kann. Mithin besteht

$$as^2 + bs^2 + cs^2 + ds^2 + 4\,sp^2 = ap^2 + bp^2 + cp^2 + dp^2,$$

und es wird

$$T_p = T_s + m \cdot sp^2 = \frac{m}{20}(ap^2 + bp^2 + cp^2 + dp^2) + \tfrac{4}{5}\, m \cdot sp^2,$$

d. h. das Trägheitsmoment einer dreiseitigen Pyramide ist für jede Achse gleich dem T. M. der vier Eckpunkte und des Schwerpunktes, wenn die Ecken je $\frac{1}{20}$, der Schwerpunkt $\frac{4}{5}$ der Körpermasse in sich birgt.[1])

2. Geht man aus von der Gleichung:

$$9(s_1s^2 + s_2s^2 + s_3s^2 + s_4s^2) + 4(es^2 + fs^2 + gs^2 + hs^2 + is^2 + ks^2)$$
$$= \tfrac{3}{4}(ab^2 + bc^2 + ca^2 + ad^2 + bd^2 + cd^2),$$

so erhält man für T_s den Ausdruck:

$$T_s = \tfrac{3}{20}\, m\,(s_1s^2 + s_2s^2 + s_3s^2 + s_4s^2) + \frac{m}{15}(es^2 + fs^2 + gs^2 + hs^2 + is^2 + ks^2),$$

woraus für T_p wegen der Beziehungen:

$$s_1s^2 + s_2s^2 + s_3s^2 + s_4s^2 + 4\,sp^2 = s_1p^2 + s_2p^2 + s_3p^2 + s_4p^2,$$
$$es^2 + fs^2 + gs^2 + hs^2 + is^2 + ks^2 + 6\,sp^2 = ep^2 + fp^2 + gp^2 + hp^2 + ip^2 + kp^2$$

folgt

$$T_p = \tfrac{3}{20}\, m\,(s_1p^2 + s_2p^2 + s_3p^2 + s_4p^2) + \frac{m}{15}(ep^2 + fp^2 + gp^2 + hp^2 + ip^2 + kp^2).$$

Das Trägheitsmoment einer Pyramide kann für jede Achse durch das T. M. der sechs Kantenmitten und der vier Schwerpunkte der Begrenzungsflächen vertreten werden, wenn die Kantenmitten je $\frac{1}{15}$, die Schwerpunkte je $\frac{3}{20}$ der Körpermasse tragen.

3. Ausgehend von

$$T_s = \frac{m}{20}(as^2 + bs^2 + cs^2 + ds^2)$$

---

1) **Routh**: Dynamik 1896, S. 29; **Mehmke**: Einfache Darstellung der T. M. von Körpern. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **29**. 1884.

findet man mit Hilfe der nach dem ersten Hilfssatz bestehenden Gleichung:

$$as_4^2 + bs_4^2 + cs_4^2 + 3\, s_4 s^2 = as^2 + bs^2 + cs^2$$

für T_s den Wert

$$T_s = \frac{m}{20}(as_4^2 + bs_4^2 + cs_4^2 + 3\, s_4 s^2 + ds^2).$$

Werden nun für as_4, bs_4, cs_4 die Strecken $a_1 s, b_1 s, c_1 s$ in dem zu ABC parallelen Schnitt $A_1 B_1 C_1$ durch die Gleichungen

$$as_4 = \tfrac{4}{3}\, a_1 s,\ bs_4 = \tfrac{4}{3}\, b_1 s,\ cs_4 = \tfrac{4}{3}\, c_1 s$$

eingeführt, so ergibt sich

$$T_s = \tfrac{4}{45}\, m\,(a_1 s^2 + b_1 s^2 + c_1 s^2) + \tfrac{3}{20}\, m \cdot s_4 s^2 + \frac{m}{20} \cdot ds^2.$$

In der Projektion des Dreiecks $DS_4 P$, in welchem S die Strecke DS_4 so teilt, daß sich verhält $DS : SS_4 = 3:1$, besteht nun, wenn der zwischen sp und sd liegende spitze Winkel α heißt,

$$s_4 p^2 = s_4 s^2 + sp^2 + 2\, s_4 s \cdot sp \cdot \cos\alpha,$$
$$dp^2 = ds^2 + sp^2 - 2\, ds \cdot sp \cdot \cos\alpha.$$

Wird nun die erste Gleichung mit $\frac{3}{20}\, m$, die zweite mit $\frac{1}{20}\, m$ multipliziert und dann addiert, so kommt

$$\tfrac{3}{20}\, m \cdot s_4 p^2 + \tfrac{1}{20}\, m \cdot dp^2 = \tfrac{3}{20}\, m \cdot s_4 s^2 + \tfrac{1}{20}\, m \cdot ds^2 + \tfrac{1}{5}\, m \cdot sp^2.$$

Benutzt man die nach Hilfssatz 1 bestehende Beziehung

$$a_1 s^2 + b_1 s^2 + c_1 s^2 + 3\, sp^2 = a_1 p^2 + b_1 p^2 + c_1 p^2,$$

so findet man für $T_p = T_s + m \cdot sp^2$ den Ausdruck

$$T_p = \tfrac{4}{45}\, m\,(a_1 p^2 + b_1 p^2 + c_1 p^2) + \tfrac{3}{20}\, m \cdot s_4 p^2 + \tfrac{1}{20}\, m \cdot dp^2 + \tfrac{8}{15}\, m \cdot sp^2.$$

Da sowohl der Schwerpunkt der drei Massenpunkte A_1, B_1, C_1 bei gleicher Belastung, als auch der Schwerpunkt der Massenpunkte D und S_4, wenn dem zweiten dreimal soviel Masse zuerteilt wird als dem ersten, mit dem Schwerpunkte S der Pyramide zusammenfällt, so wird der Schwerpunkt des fünfpunktigen Systems $A_1 B_1 C_1 D S_4$ im Schwerpunkte der Pyramide liegen. Man kommt somit zu dem Satze:

Legt man durch den Schwerpunkt einer Pyramide die parallele Ebene zu einer Begrenzungsfläche und belegt die Schnittpunkte dieser Ebene und der drei Pyramidenkanten mit je $\frac{4}{45}$, den Schwerpunkt der genannten Begrenzungsfläche mit $\frac{3}{20}$, die gegenüberliegende Ecke der Pyramide mit $\frac{1}{20}$ und den Pyramidenschwerpunkt mit $\frac{8}{15}$ der Körpermasse, so hat dieses sechspunktige Massensystem für jede Achse mit der Pyramide gleiches Trägheitsmoment.

Es dürfte nach diesen Proben der zum Ergebnis führende Weg genügend gekennzeichnet sein. Es erübrigt deshalb nur noch die Resultate, die gefunden werden, summarisch aufzuzählen. Es sei erwähnt, daß die durch die Herren Mehmke und Routh schon bekannt gewordenen Zurückführungen in diese Zusammenstellung nicht aufgenommen wurden.

3. *Reduktion des Parallelepipedons.* — Jedes gerade oder schiefe homogene Parallelepipedon kann bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes bezüglich jeder Achse ersetzt werden durch ein System von:

1. 7 Punkten, wenn die Schwerpunkte der Grundflächen mit je $\frac{1}{6}$, die Mitten der Seitenkanten mit je $\frac{1}{12}$ und der Körperschwerpunkt mit $\frac{1}{3}$ der Gesamtmasse des Körpers belastet werden.

2. 9 Punkten, wenn die Ecken je $\frac{1}{24}$, der Körperschwerpunkt $\frac{2}{3}$ der Gesamtmasse trägt.

3. 9 Punkten, wenn die Mitten der Seitenkanten je $\frac{1}{24}$, der Körperschwerpunkt $\frac{1}{2}$, die Mittelpunkte eines Paares paralleler Grundkanten der unteren und des anderen Paares der oberen Grundfläche je $\frac{1}{12}$ der Gesamtmasse in sich bergen.

4. 9 Punkten, wenn im Körperschwerpunkt $\frac{1}{3}$, in den Schwerpunkten der Seitenflächen, sowie in den Mitten eines Paares paralleler Kanten der unteren und des anderen Paares der oberen Grundfläche je $\frac{1}{12}$ der gesamten Masse der Körper konzentriert liegt.

5. 11 Punkten, wenn die Mitten der Seitenkanten je $\frac{1}{24}$, die Schwerpunkte der Seitenflächen je $\frac{1}{12}$, die Schwerpunkte der Grundflächen und des Körpers je $\frac{1}{6}$ der Gesamtmasse enthalten.

6. 13 Punkten, wenn jede Kantenmitte $\frac{1}{24}$ und der Körperschwerpunkt $\frac{1}{2}$ der Gesamtmasse faßt.

4. *Reduktion des dreiseitigen Prismas.* — Jedes gerade oder schiefe homogene dreiseitige Prisma kann hinsichtlich seines Trägheitsmomentes für jede Achse ersetzt werden durch ein System von:

1. 8 Punkten, wenn die Mitten der Seitenkanten je $\frac{1}{27}$, die Schwerpunkte der Seitenflächen je $\frac{5}{27}$ und die Schwerpunkte der Grundflächen je $\frac{1}{6}$ der Körpermasse tragen.

2. 9 Punkten, wenn die Schwerpunkte aller Begrenzungsflächen mit je $\frac{1}{6}$, die Mittelpunkte der Seitenkanten und der Körperschwerpunkt mit je $\frac{1}{24}$ der Gesamtmasse belastet werden.

3. 9 Punkten, wenn die Mittelpunkte der Grundkanten je $\frac{1}{18}$, die Schwerpunkte der Seitenflächen je $\frac{2}{9}$ der Körpermasse enthalten.

4. 9 Punkten, wenn in den Mitten der Seitenkanten je $\frac{1}{18}$, in den Schwerpunkten der Seitenflächen je $\frac{1}{9}$, in den Schwerpunkten der Grundflächen und des Körpers je $\frac{1}{6}$ der Gesamtmasse konzentriert liegt.

5. 10 Punkten, wenn der Körperschwerpunkt $\frac{1}{2}$, die Mitten aller Kanten je $\frac{1}{18}$ der Körpermasse in sich vereinigen.

5. *Reduktion des Cylinders.* — Jeder gerade oder schiefe homogene Kreis- oder elliptische Cylinder ist bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes für jede beliebige Achse zu ersetzen durch ein System von:

1. 6 Punkten, wenn die Schwerpunkte der Grundflächen, der Schwerpunkt der Mittelellipse, die im Schnitt einer Ebene durch den Körperschwerpunkt parallel den Grundflächen mit dem Cylinder erzeugt wird, und drei Punkte auf dem Umfang der Mittelellipse, die ein der Ellipse einbeschriebenes Dreieck vom größten Inhalt bilden, mit je $\frac{1}{6}$ der Cylindermasse belegt werden.

2. 8 Punkten, wenn in den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers der einen Grundfläche und in den Endpunkten des zu dieser Richtung konjugierten Durchmessers der anderen Grundfläche (über Kreuz liegender konjugierter Durchmesser in den Grundflächen) je $\frac{1}{12}$, im Körperschwerpunkt $\frac{1}{2}$ und in den Ecken eines größten Dreiecks der Mittelellipse je $\frac{1}{18}$ der Cylindermasse vereinigt ist.

3. 9 Punkten, wenn die Endpunkte irgend eines Paares über Kreuz liegender konjugierter Durchmesser in den Grundflächen mit je $\frac{1}{12}$, der Körperschwerpunkt mit $\frac{1}{2}$ und die Endpunkte irgend eines Paares konjugierter Durchmesser der Mittelellipse mit je $\frac{1}{24}$ der Cylindermasse belastet werden.

4. 10 Punkten, wenn der Körperschwerpunkt mit $\frac{1}{2}$, die Ecken beliebiger den Grundflächen und der Mittelellipse einbeschriebenen Dreiecke größten Inhaltes mit je $\frac{1}{18}$ der Gesamtmasse versehen werden.

5. 11 Punkten, wenn in den Ecken beliebiger den Grundflächen einbeschriebenen Dreiecke größten Inhaltes je $\frac{1}{18}$, im Körperschwerpunkt $\frac{1}{2}$ und in den Endpunkten eines beliebigen konjugierten Durchmesserpaares der Mittelellipse je $\frac{1}{24}$ der Gesamtmasse vereinigt liegt.

6. 13 Punkten, wenn der Körperschwerpunkt $\frac{1}{2}$ und die Endpunkte beliebiger konjugierter Durchmesser in den Grundflächen und der Mittelellipse je $\frac{1}{24}$ der Gesamtmasse in sich bergen.

6. *Reduktion der dreiseitigen Pyramide.* — Das Trägheitsmoment einer homogenen dreiseitigen Pyramide ist für jede Achse zu ersetzen durch das Trägheitsmoment eines Systemes von:

1. 6 Punkten, wenn der Grundflächenschwerpunkt mit $\frac{3}{20}$, die Spitze mit $\frac{1}{20}$, der Körperschwerpunkt mit $\frac{8}{15}$ und die Ecken eines Dreiecks, das im Schnitt einer der Grundfläche parallelen Ebene durch den Körperschwerpunkt mit der Pyramide entsteht, mit je $\frac{4}{45}$ der Körpermasse belastet werden.

2. 8 Punkten, wenn die Körperecken je $\frac{1}{40}$, die Schwerpunkte der Begrenzungsflächen je $\frac{9}{40}$ der Körpermasse tragen.

3. 10 Punkten, wenn in den Schwerpunkten der Begrenzungsflächen je $\frac{3}{20}$, in den Mitten der Kanten je $\frac{1}{15}$ der Körpermasse vereinigt ist.

4. 11 Punkten, wenn in den Körperecken und in den Mitten aller Kanten je $\frac{1}{30}$, im Körperschwerpunkt $\frac{2}{3}$ der Gesamtmasse vereinigt liegt.

5. 13 Punkten, wenn die beiden Teilpunkte jeder Kante, die dieselben nach dem Verhältnis 3 : 1 teilen, mit je $\frac{1}{30}$ und der Körperschwerpunkt mit $\frac{3}{5}$ der Körpermasse versehen werden.

7. *Reduktion des Kegels.* — Das Trägheitsmoment eines homogenen geraden oder schiefen Kegels mit kreisförmiger oder elliptischer Grundfläche ist für jede Achse zu ersetzen durch das Trägheitsmoment eines Systemes von:

1. 6 Punkten, wenn der Schwerpunkt der Grundfläche mit $\frac{3}{20}$, die Spitze mit $\frac{1}{20}$, der Körperschwerpunkt mit $\frac{4}{15}$ und die Ecken eines beliebigen größten Dreiecks, das der Schwerpunktsellipse, die im Schnitt der durch den Körperschwerpunkt parallel der Grundfläche gelegten Ebene mit dem Kegel entsteht, einbeschrieben werden kann, mit je $\frac{8}{45}$ der Körpermasse belegt werden.

2. 7 Punkten, wenn im Schwerpunkt der Grundfläche $\frac{3}{20}$, in der Spitze $\frac{1}{20}$, im Körperschwerpunkt $\frac{4}{15}$ und in den Endpunkten beliebiger konjugierter Durchmesser der Schwerpunktsellipse je $\frac{2}{15}$ der Körpermasse konzentriert liegt.

3. 8 Punkten, wenn den Ecken eines beliebigen Dreiecks größten Inhaltes in der Grundfläche und der Spitze je $\frac{1}{20}$, dem Körperschwerpunkt $\frac{8}{15}$ und den Ecken eines beliebigen Dreiecks größten Inhaltes in der Schwerpunktsellipse je $\frac{4}{45}$ der gesamten Körpermasse zuerteilt werden.

4. 9 Punkten, wenn die Ecken eines beliebigen Dreiecks größten Inhalts in der Grundfläche und die Spitze je $\frac{1}{20}$, der Körperschwerpunkt $\frac{8}{15}$ und die Endpunkte beliebiger konjugierter Durchmesser in der Schwerpunktsellipse je $\frac{1}{15}$ der Körpermasse enthalten.

Elberfeld, 10. Juni 1902.

Zusammenhang zwischen der Abwickelung eines Kreiscylinders und den Rotationsflächen konstanter Krümmung.

Von G. Scheffers in Darmstadt.

Wickelt man einen schiefen Kreiscylinder auf die Ebene ab, so geht aus jedem Kreise des Cylinders eine wellenförmige Kurve hervor, die man in den meisten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie abgebildet sieht.[1]) Daß diese Kurve nun die Meridiankurve einer Rotationsfläche konstanter Krümmung ist, ist jedoch unseres Wissens nirgends bemerkt worden. Der Beweis dafür ist sehr einfach:

Die xy-Ebene sei ein senkrechter Querschnitt des Cylinders. Die große Achse der Querschnitt-Ellipse sei als y-Achse, die kleine als x-Achse gewählt, sodaß etwa:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (b < a)$$

die Gleichung der Querschnitt-Ellipse ist. Wir setzen

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = c^2$$

und stellen die Ellipse mittels des Parameters φ so dar:

$$x = a\sqrt{1 - c^2}\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi.$$

Der Bogen s der Ellipse von $\varphi = 0$ bis zu beliebigem φ ist das elliptische Integral zweiter Gattung:

$$s = a\int_0^\varphi \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = aE(c, \varphi).$$

Ein Kreisschnitt des auf der xy-Ebene längs der Ellipse senkrecht stehenden Cylinders und zwar derjenige Kreisschnitt, der mit der Ellipse seinen Durchmesser gemein hat, geht hervor, wenn wir durch die große Achse der Ellipse (die y-Achse) eine Ebene legen, deren Winkel mit der Ellipsenebene die Tangente $c : \sqrt{1 - c^2}$ hat, sodaß über dem Punkte (φ) der Ellipse derjenige Punkt des Kreises liegt, dessen Höhe über der xy-Ebene ist:

$$z = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}x = ac\cos\varphi.$$

---

1) Z. B. bei Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 2. Bd., Leipzig 1887, S. 47; Rohn und Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 1. Bd., 2. Aufl., Leipzig 1901, S. 366.

Wird nun der Cylinder auf eine Ebene abgewickelt, so geht die Querschnitt-Ellipse in eine Gerade über, die wir etwa als $\mathfrak{y}$-Achse in dieser Ebene wählen. Alsdann liefert der ausgewählte Kreis des Cylinders in den rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Kurve:

$$\mathfrak{x} = z = ac \cos \varphi, \quad \mathfrak{y} = s = aE(c, \varphi),$$

ausgedrückt mittels des Parameters φ. Diese Gleichungen[1]) aber lehren sofort:

Wickelt man einen schiefen Kreiscylinder auf die Ebene ab und hat man auf dem Cylinder einen Kreis sowie diejenige Querschnitt-Ellipse markiert, die mit dem Kreis einen Durchmesser gemein hat, so geht die Ellipse in eine Gerade, der Kreis aber in eine solche Kurve über, die durch Drehung um die Gerade eine Rotationsfläche konstanter positiver Krümmung erzeugt. Die Krümmung ist $1 : a^2$, und die Fläche konstanter Krümmung ist eine solche von der bekannten Spindelform.

Auf diesen Zusammenhang wird man naturgemäß geführt, wenn man den Umstand, daß der Bogen der Ellipse als elliptisches Integral zweiter Gattung darstellbar ist, mit dem Umstand verbindet, daß die Meridiankurve jener spindelförmigen Fläche mittels eines ebensolchen Integrals darstellbar ist.

Es ist aber leicht, diesen Zusammenhang auch geometrisch nachzuweisen, d. h. zu zeigen, daß die Kurve, die der Kreis bei der Abwickelung liefert, eine solche Kurve ist, bei der das Produkt aus Krümmungsradius und Normale, letztere gerechnet bis zu der Geraden, in die die Ellipse verwandelt wird, den konstanten Wert a^2 hat. Am bequemsten geschieht dies, wenn man den Satz von P. Serret[2]) benutzt: Bei der Ausbreitung einer abwickelbaren Fläche auf die Ebene ist das Verhältnis des Krümmungsradius einer Kurve k der Fläche zum Krümmungsradius derjenigen ebenen Kurve k', in die die gewählte Kurve k dabei übergeht, gleich dem Kosinus des Winkels der Schmiegungsebene von k und der Tangentialebene der abwickelbaren Fläche.[3]) — Vgl. auch Encyklopädie der mathem. Wissenschaften III D 4, Anm. 108 zu Nr. 27.

Darmstadt, Juli 1903.

---

1) Vgl. z. B. des Verfassers Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, S. 123 und Fig. 32, S. 125.

2) Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860, S. 129.

3) Chr. Wiener stellt a. a. O. S. 40 diesen Satz auf, unterläßt es aber, ihn wenige Seiten später auf die in Rede stehende Kurve anzuwenden, wodurch er sofort zu unserem Ergebnis gelangt wäre.

Über die Krümmung einer beliebigen Mannigfaltigkeit.

Von H. KÜHNE in Dortmund.

1. *Einleitung.* — Ein Punkt P einer ebenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_n$ sei bestimmt durch n Koordinaten x_h $(h=1,\dots n)$. In $\mathfrak{M}_n$ verlaufe eine ν-fache Mannigfaltigkeit M_ν, dadurch gegeben, daß die Koordinaten ihrer Punkte Funktionen von ν unabhängigen Variablen y_f $(f=1,\dots \nu)$ sind.

Zunächst sei wegen der Schreibweise bemerkt, daß die Zeiger h, k stets die Reihe $1, \dots n$; die Zeiger f, g, p, q die Reihe $1, \dots \nu$; die Zeiger r, s die Reihe $\nu+1, \dots n$ durchlaufen sollen.

Es sei

$$\frac{\partial x_h}{\partial y_f} = x_{hf}, \quad \frac{\partial^2 x_h}{\partial y_f \partial y_g} = x_{hfg}; \qquad (h, f, g);$$

ferner seien x_{hr} $n(n-\nu)$ Größen von der Beschaffenheit:

$$\sum_h x_{hr} x_{hf} = 0, \quad \sum_h x_{hr} x_{hs} = \delta_{rs}. \qquad \left(\delta_{rs} = \begin{cases} 0, & r \neq s \\ 1, & r = s \end{cases}\right).$$

Dann stehen die Geraden

$$\bar{x}_h - x_h = x_{hf}\, t \qquad (h)$$

senkrecht auf den Geraden

$$\bar{x}_h - x_h = x_{hr}\, t, \qquad (h),$$

und die Geraden der letzten Gruppe stehen auf einander senkrecht. Die erste Gruppe bestimmt die Tangentialmannigfaltigkeit $\mathfrak{T}_\nu$ von M_ν, die zweite Gruppe die Normalmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}_{n-\nu}$. Die Gleichungen von $\mathfrak{N}$ lauten also

$$\bar{x}_h - x_h = \sum_r x_{hr}\, t_r; \qquad (h);$$

und die t_r können als Cartesische Koordinaten eines Punktes von $\mathfrak{N}$ aufgefaßt werden für ein Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt P ist, und dessen Achsen die Geraden

$$\bar{x}_h - x_h = x_{hr}\, t \qquad (h)$$

sind.

Wir setzen weiter

$$\sum_h x_{hf} x_{hg} = a_{fg}, \quad \sum_h x_{hfg} x_{hr} = b_{fg}^{(r)},$$

dann wird das Quadrat des Linienelementes von M_ν

$$ds^2 = \sum_{fg} a_{fg}\, dy_f\, dy_g.$$

Das zu (a_{fg}) reziproke System werde mit (α_{gf}) bezeichnet.

Nun sei P' ein Punkt in der Nachbarschaft von P, (x_h') seien seine Koordinaten und $\mathfrak{N}'$ seine Normalmannigfaltigkeit, so ist, wenn noch $dy_f = \eta_f$ gesetzt wird:

$$x_h' = x_h + \sum_f x_{hf}\eta_f + \tfrac{1}{2}\sum_{fg} x_{hfg}\eta_f\eta_g + \cdots.$$

Die beiden Normalmannigfaltigkeiten $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ können drei verschiedene Lagen gegen einander haben. Entweder schneiden sie sich in einer von einem Punkt verschiedenen Mannigfaltigkeit, oder sie schneiden sich in einem Punkt, oder sie haben im allgemeinen keinen Schnittpunkt gemein, sondern schneiden sich nur unter gewissen Bedingungen. Diese Fälle werden unterschieden durch

$$a)\ 2\nu < n, \qquad b)\ 2\nu = n, \qquad c)\ 2\nu > n.$$

2. *Die Krümmungsspur.* — a) $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ sind durch je ν Gleichungen bestimmt, also ihr Schnittgebilde durch 2ν Gleichungen, es ist also eine ebene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ von der Ordnung $n - 2\nu$. Läßt man P' alle Nachbarpunkte von P durchlaufen, so erhält man eine Schar von $\mathfrak{S}$, die in $\mathfrak{N}$ eine Mannigfaltigkeit $S_{n-\nu-1}$ umhüllt. Die Gleichung von S soll abgeleitet werden.

Ein Schnittpunkt von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ $(\bar{x}_h)$ erfüllt die Gleichungen:

$$\bar{x}_h = x_h + \sum_r x_{hr}t_r = x_h' + \sum_r x_{hr}'t_r'.$$

Aus ihnen folgt

$$x_h - x_h' + \sum_r x_{hr}t_r - \sum_r x_{hr}'t_r' = 0,$$

und nach Multiplikation mit x_{hf}' und Summation über h:

$$\sum_{hr} t_r x_{hr}x_{hf}' - \sum_h (x_h' - x_h)x_{hf}' = 0,$$

$$\sum_{hr} t_r x_{hr}\Big[x_{hf} + \sum_g x_{hfg}\eta_g\Big] - \sum_{hg} x_{hg}\eta_g x_{hf} = 0,$$

$$(\mathfrak{S}) \qquad \sum_g \eta_g\Big(\sum_r b_{fg}^{(r)}t_r - a_{fg}\Big) = 0 \qquad (f)$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit α_{gf} und summiert über f, setzt man ferner

$$\sum_p \alpha_{fp} b_{pg}^{(r)} = k_{fg}^{(r)},$$

so erhält man die Gleichungen von $\mathfrak{S}$ in der andern Gestalt:

$$(\mathfrak{S}) \qquad \sum_g \eta_g \Big(\sum_r k_{fg}^{(r)} t_r - \delta_{fg}\Big) = 0 \qquad (f).$$

Diese ν Gleichungen enthalten die t_r als Unbekannte. Entfernt man aus ihnen die η, so erhält man die Gleichung von S als

$$(\mathrm{S}) \qquad \Big|\sum_r b_{fg}^{(r)} t_r - a_{fg}\Big| = 0 \quad \text{oder} \quad \Big|\sum_r k_{fg}^{(r)} t_r - \delta_{fg}\Big| = 0.$$

b) $2\nu = n$. In diesem Falle bestimmen die Gleichungen ($\mathfrak{S}$) die t_r vollständig, sodaß $\mathfrak{S}$ in einen Punkt ausartet. Den Ort S dieser Punkte erhält man wieder, wenn man die η aus den Gleichungen ($\mathfrak{S}$) entfernt. Man gelangt zu derselben Gleichung, wie im Falle *a*).

c) $2\nu > n$. Die Gleich. ($\mathfrak{S}$) sind nur dann durch ein Wertsystem (t_r) zu erfüllen, sobald zwischen den η gewisse Bedingungen bestehen, deren Anzahl $2\nu - n$ ist. Dadurch wird in der ν-fachen Mannigfaltigkeit, welche die η bilden, eine $\nu - (2\nu - n) = (n - \nu)$-fache Mannigfaltigkeit ausgesondert. Diese bestimmt auf M_ν eine $(n-\nu)$-fache Mannigfaltigkeit $K_{n-\nu}$, die durch P geht. Eliminiert man dann wieder die η aus den Gleichungen ($\mathfrak{S}$), so bekommt man für S dieselben Gleichungen, wie im Falle *a*).

Fassen wir die Ergebnisse zusammen.

Auf der Normalmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ eines Punktes P von M_ν entsteht in allen Fällen durch die Nachbarnormalmannigfaltigkeiten eine Mannigfaltigkeit $S_{n-\nu-1}$. Diese soll die *Krümmungsspur des Punktes P* heißen. Ihre Gleichung lautet:

$$\Big|\sum_r b_{fg}^{(r)} t_r - a_{fg}\Big| = 0 \quad \text{oder} \quad \Big|\sum_r k_{fg}^{(r)} t_r - \delta_{fg}\Big| = 0.$$

Für den Fall $2\nu > n$ tragen nicht alle Nachbarnormalmannigfaltigkeiten zur Bildung von S bei, sondern nur diejenigen, deren η den Gleichungen genügen, die man durch Elimination der t_r aus den Gleichungen

$$\sum_g \eta_g \Big(\sum_r b_{fg}^{(r)} t_r - a_{fg}\Big) = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_g \eta_g \Big(\sum_r k_{fg}^{(r)} t_r - \delta_{fg}\Big) = 0$$

bildet. Die dazu gehörigen Punkte P' erfüllen in M_ν eine Mannigfaltigkeit $K_{n-\nu}$. Diese soll die *Krümmungsmannigfaltigkeit im Punkte P* heißen.

Wir führen zur Veranschaulichung einige besondere Fälle an:

$n=3$, $\nu=1$. Kurve im Raum. S_1 ist die Krümmungsachse.

$\nu=2$. Fläche im Raum. S_0 ist die Gesamtheit der beiden Krümmungsmittelpunkte.
K_1 ist die Gesamtheit der beiden Krümmungslinien.

$n=4$, $\nu=1$. Kurve in $\mathfrak{M}_4$. S_2 ist eine in $\mathfrak{N}_3$ gelegene Ebene.

$\nu=2$. Fläche „ „ . S_1 ist ein in $\mathfrak{N}_2$ gelegener Kegelschnitt.

$\nu=3$. Raum „ „ . S_0 ist die Gesamtheit der 3 Krümmungsmittelpunkte in der Normalgeraden $\mathfrak{N}_1$.
K_1 ist das System der 3 Krümmungslinien in M_3.

$n=5$, $\nu=1$. Kurve in $\mathfrak{M}_5$. S_3 ist ein in $\mathfrak{N}_4$ gelegener Raum.

$\nu=2$. Fläche „ „ . S_2 ist eine in $\mathfrak{N}_3$ gelegene Fläche zweiten Grades.

$\nu=3$. Raum „ „ . S_1 ist eine in $\mathfrak{N}_2$ gelegene Kurve dritten Grades.
K_2 ist eine durch P in M_3 gelegte Fläche.

$\nu=4$. M_4 in $\mathfrak{M}_5$. S_0 ist die Gesamtheit der 4 Krümmungsmittelpunkte in der Geraden $\mathfrak{N}_1$.
K_1 ist das System der 4 Krümmungslinien in M_4.

3. *Krümmungsmittelpunkt, Krümmungsradien, Centralhyperfläche.* — Es sei Γ irgend eine Richtung in $\mathfrak{N}$, bestimmt durch einen Punkt, dessen Koordinaten $t_r = \gamma_r$ $(r=\nu+1,\dots n)$ sind, mit der Bedingung

$$\sum_r \gamma_r^2 = 1.$$

Dann liegen alle Punkte (t_r), die der Gleichung

$$\sum_r \gamma_r t_r = t$$

genügen, auf einer ebenen $(n-\nu-1)$-fachen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'$, die in $\mathfrak{N}$ normal zum Strahl Γ verläuft. t bedeutet den Abstand des Punktes P von $\mathfrak{M}'$. Bei Änderung von t verschiebt sich $\mathfrak{M}'$ parallel zu sich selbst. Durch $\mathfrak{M}'$ legen wir parallel zu $\mathfrak{T}$ eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}''$ von der Ordnung $n-1$. Sie schneidet die gegebene Mannigfaltigkeit M_ν in einer Mannigfaltigkeit von Punkten. Wir nehmen jetzt t als sehr klein an, so liegen alle Punkte in der Nachbarschaft

von P; und zu jedem Punkt gehört eine bestimmte Bogenlänge ds, die allerdings für die verschiedenen Punkte verschieden ist. Jetzt kehren wir das Verfahren um. Durch alle Nachbarpunkte von P, zu denen derselbe Wert von ds gehört, legen wir normal zu Γ die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}''$. Dadurch ergibt sich auch $\mathfrak{M}'$ und t. Zu den verschiedenen Nachbarpunkten gehören verschiedene Werte von t. Es soll untersucht werden, wann t ein Extremum wird. Da ds konstant ist, so stimmt die Frage nach dem Extremum von t überein mit der Frage nach dem Extremum des Ausdrucks

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2t}{ds^2}.$$

Nach den Vorschriften der Variationsrechnung sind dann die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \eta_f}\left(t - \frac{ds^2}{2\varrho}\right) = 0 \qquad (f)$$

zu erfüllen. Nun ist für einen Nachbarpunkt

$$x_h' = x_h + \sum_f x_{hf}\eta_f + \tfrac{1}{2}\sum_{fg} x_{hfg}\eta_f\eta_g \cdots.$$

Die zugehörigen t_r findet man aus der Vergleichung mit

$$x_h' = x_h + \sum_s x_{hs} t_s.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit x_{hr} und summiert über h, so kommt

$$t_r = \sum_h (x_h' - x_h) x_{hr} \qquad (r),$$

$$t_r = \sum_{hf} x_{hf}\eta_f x_{hr} + \tfrac{1}{2}\sum_{hfg} x_{hfg}\eta_f\eta_g x_{hr},$$

$$t_r = \tfrac{1}{2}\sum_{fg} b_{fg}^{(r)}\eta_f\eta_g;$$

also

$$t = \tfrac{1}{2}\sum_{fg}\eta_f\eta_g\sum_r \gamma_r b_{fg}^{(r)}.$$

Folglich bestehen für das Extremum die Bedingungen:

$$\sum_g \eta_g\left(\sum_r \gamma_r b_{fg}^{(r)} - \frac{1}{\varrho}a_{fg}\right) = 0,$$

aus denen zur Bestimmung von ϱ die Gleichung folgt

$$\left|\sum_r \gamma_r b_{fg}^{(r)} - \frac{1}{\varrho}a_{fg}\right| = 0.$$

Durch Multiplikation mit $|\alpha_{gf}|$ nimmt sie noch die Gestalt an:

$$\left|\sum_r \gamma_r k_{fg}^{(r)} - \frac{\delta_{fg}}{\varrho}\right| = 0.$$

Diese Gleichung hat ν Wurzeln $\varrho_1, \ldots \varrho_\nu$; sie sollen auf dem Strahl Γ von P aus abgetragen werden, je nach ihrem Vorzeichen in der einen oder anderen Richtung. Dadurch entstehen auf jedem Strahl Γ ν Punkte. Diese ν Punkte sollen die *Krümmungsmittelpunkte des Punktes P für die Richtung Γ* heißen. Entsprechend sind die Größen ϱ die *ν Krümmungsradien des Punktes P für die Richtung Γ.* Die Koordinaten der Krümmungsmittelpunkte in $\mathfrak{R}$ sind $t_r = \gamma_r \varrho$. Diese Koordinaten erfüllen die Gleichung

$$\left|\sum_r t_r k_{fg}^{(r)} - \delta_{fg}\right| = 0,$$

die ohne weiteres aus der Gleichung für ϱ hervorgeht. Das ist aber die Gleichung der Krümmungsspur S. Somit haben wir den Satz:

Der Ort für die Krümmungsmittelpunkte eines Punktes P für die verschiedenen Richtungen Γ ist die Krümmungsspur.

Läßt man P die ganze Mannigfaltigkeit M_ν durchlaufen, so erzeugt die Krümmungsspur S eine $(n-1)$-fache Mannigfaltigkeit C_{n-1}. Diese heißt die *Centrahyperfläche von M_ν.*

4. *Eine Funktion der Krümmungsradien als Biegungsinvariante.* — Entwickelt man die Gleichung für ϱ nach Potenzen von $1/\varrho$, so nimmt der Koeffizient von $1/\varrho^2$, d. h. die zweite elementare symmetrische Funktion der reziproken Radien

$$S_2\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \sum_{f<g} \frac{1}{\varrho_f \varrho_g}$$

den Wert an

$$\sum_{f<g} \begin{vmatrix} \sum_r k_{ff}^{(r)} \gamma_r, & \sum_r k_{fg}^{(r)} \gamma_r \\ \sum_s k_{gf}^{(s)} \gamma_s, & \sum_s k_{gg}^{(s)} \gamma_s \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt

$$S_2\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \sum_{rs} \gamma_r \gamma_s \sum_{f<g} (k_{ff}^{(r)} k_{gg}^{(s)} - k_{fg}^{(r)} k_{gf}^{(s)}).$$

Zu jedem Strahl Γ gehören ν Größen ϱ. Jeder Strahl Γ bestimmt auf der Einheitssphäre $\sum_r \gamma_r^2 = 1$ zwei gegenüberliegende Flächenelemente $d\omega$, bei denen sich die γ_r durch die Vorzeichen unterscheiden. Zu jedem Element $d\omega$ gehört also ein System der ϱ und damit ein

Wert $S_2\left(\frac{1}{\varrho}\right)$. Zu gegenüberliegenden $d\omega$ gehört dasselbe S_2. Bildet man für sämtliche Geraden Γ den Mittelwert von S_2, so wird er geliefert durch die Gleichung

$$\mathsf{M} S_2\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{\int S_2\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\omega}{\int d\omega}.$$

Diese Integrale sind zunächst nur über eine Halbsphäre zu erstrecken, da sonst jedes System ϱ zweimal gezählt wird. Da aber für die beiden Halbsphären jedes Mal S_2 und der Integrand des Nenners denselben Wert hat, so multiplizieren sich Zähler und Nenner des Bruches M nur mit 2. Man darf also in beiden Integralen über die ganze Sphäre integrieren. Es sei $\int d\omega = \varpi$; dann handelt es sich um die Bestimmung der beiden Integrale

$$\int \gamma_r \gamma_s \, d\omega \;\; (r \neq s) \quad \text{und} \quad \int \gamma_r^2 \, d\omega.$$

Bedenkt man, daß γ_s bei festem r sowohl positiv als negativ sein kann, so sieht man ein, daß das erste Integral verschwindet. Für das zweite gilt:

$$\varpi = \int d\omega = \int d\omega \sum_r \gamma_r^2 = \sum_r \int d\omega \, \gamma_r^2 = (n - \nu) \int \gamma_r^2 \, d\omega.$$

Daraus findet man allgemein

$$\int \gamma_r \gamma_s \, d\omega = \frac{\varpi \delta_{rs}}{n - \nu}.$$

Demnach ergibt sich

$$\mathsf{M} S_2\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{n-\nu} \sum_r \sum_{f<g} \left(k_{ff}^{(r)} k_{gg}^{(r)} - k_{fg}^{(r)} k_{gf}^{(r)}\right).$$

Die rechts auftretende Summe ist bei der Bedeutung der k

$$= \sum_r \sum_{f<g} \begin{vmatrix} \sum_p b_{fp}^{(r)} \alpha_{pf}, & \sum_p b_{fp}^{(r)} \alpha_{pg} \\ \sum_q b_{gq}^{(r)} \alpha_{qf}, & \sum_q b_{gq}^{(r)} \alpha_{qg} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_r \sum_{f<g} \sum_{p<q} \begin{vmatrix} b_{fp}^{(r)} & b_{fq}^{(r)} \\ b_{gp}^{(r)} & b_{gq}^{(r)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{pf}, & \alpha_{pg} \\ \alpha_{qf}, & \alpha_{qg} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{f<g} \sum_{p<q} B_{fg,\,pq} (\alpha_{pf} \alpha_{qg} - \alpha_{pg} \alpha_{qf}),$$

wobei die Bedeutung der B leicht ersichtlich ist.

Nach den Grundgleichungen der Mannigfaltigkeit[1]) ist

$$B_{fg,\,pq} = (fg,\ pq),$$

nämlich gleich dem Christoffelschen Symbol der quadratischen Differentialform $\sum_{fg} a_{fg}\,dy_f\,dy_g$. Also hängt die Doppelsumme

$$J = \sum_{f<g}\sum_{p<q} B_{fg,\,pq}(\alpha_{pf}\alpha_{qg} - \alpha_{pg}\alpha_{qf})$$

allein von den a und ihren Ableitungen ab und ist demnach eine Biegungsinvariante.[2]) Es folgt schließlich

$$\mathsf{M} S_2\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{J}{n-\nu}.$$

Das gibt den Satz:

Der Mittelwert der zweiten elementaren symmetrischen Funktion der reziproken zu einer bestimmten Richtung gehörenden Krümmungsradien, genommen für alle Richtungen, ist eine Biegungsinvariante von M_ν, allein abhängig vom Punkte P.

Für $n = 3$, $\nu = 2$ wird M_2 zur Fläche im Raume, dann wird S_2 zu $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$ und $\mathsf{M} S_2$ wird gleich J, dem Gaußischen Krümmungsmaß.

5. *Krümmungsspur der Minimalmannigfaltigkeiten.* — Eine Minimalmannigfaltigkeit ist dadurch gekennzeichnet, daß das Integral

$$F = \int \sqrt{A}\,dy_1 \ldots dy_\nu = \int \sqrt{|a_{fg}|}\,dy_1 \ldots dy_\nu$$

ein Minimum werde. Wenn die x_h um δx_h sich ändern, so ändert sich a_{fg} um

$$\delta a_{fg} = \sum_h (x_{hf}\,\delta x_{hg} + x_{hg}\,\delta x_{hf}).$$

Ferner ändert sich A um

$$\delta A = \sum_{fg} A\alpha_{gf}\,\delta a_{fg} = 2\sum_{fgh} A\alpha_{gf}\,x_{hg}\,\delta x_{hf},$$

und $\sqrt{A}$ um

$$\delta\sqrt{A} = \sum_{fgh}\sqrt{A}\,\alpha_{gf}\,x_{hg}\,\delta x_{hf}.$$

Nun ist

$$\delta\sqrt{A} = \sum_{fgh}\frac{\partial}{\partial y_f}(\sqrt{A}\,\alpha_{gf}\,x_{hg}\,\delta x_h) - \sum_{fgh}\delta x_h\frac{\partial}{\partial y_f}(\sqrt{A}\,\alpha_{gf}\,x_{hg}),$$

---

1) Archiv Bd. 4, S. 309, Gl. 9a. Die c_{hk} sind gleich δ_{hk} zu setzen.

2) Man vergl. darüber Math. Ann. Bd. 56, S. 260 ff.

folglich muß

$$\delta F = -\int dy_1 \ldots dy_\nu \sum_{fgh} \delta x_h \frac{\partial}{\partial y_f}(\sqrt{A}\,\alpha_{gf} x_{hg}) = 0$$

sein für willkürliche δx_h. Statt der Größen δx_h führen wir ebenfalls unendlich kleine Größen w_k ein, vermöge der Gleichungen

$$\delta x_h = \sum_p x_{hp} w_p + \sum_r x_{hr} w_r.$$

Dann zerfällt der Integrand in 2 Teile. Der erste wird

$$\sum_p w_p \sum_{fgh} x_{hp} \frac{\partial}{\partial y_f}(\sqrt{A}\,\alpha_{gf} x_{hg})$$

$$= \sum_p w_p \sum_{fgh} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_f}(\sqrt{A}\,\alpha_{gf} x_{hg} x_{hp}) - \sqrt{A}\,\alpha_{gf} x_{hg} x_{hpf} \right\}$$

$$= \sum_p w_p \left\{ \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial y_p} - \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial y_p} \right\} = 0.$$

Der zweite Teil wird

$$\sum_r w_r \sum_{fgh} x_{hr} \frac{\partial}{\partial y_f}(\sqrt{A}\,\alpha_{gf} x_{hg})$$

$$= \sum_r w_r \sum_{fgh} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_f}(\sqrt{A}\,\alpha_{gf} x_{hg} x_{hr}) - \sqrt{A}\,\alpha_{gf} x_{hg} \frac{\partial x_{hr}}{\partial y_f} \right\}$$

$$= -\sum_r w_r \sum_{fg} \sqrt{A}\,\alpha_{gf} \left(-\sum_h x_{hr} \frac{\partial x_{hg}}{\partial y_f} \right)$$

$$= \sum_r w_r \sum_{fg} \sqrt{A}\,\alpha_{gf} b_{fg}^{(r)}$$

$$= \sum_r w_r \sum_f \sqrt{A}\, k_{ff}^{(r)}.$$

Somit lauten die Bedingungen für das Verschwinden der Variation von F

$$\sum_f k_{ff}^{(r)} = 0.$$

Entwickelt man aber die Gleichung für die Krümmungsspur

$$\left| \sum_r t_r k_{fg}^{(r)} - \delta_{fg} \right| = 0$$

nach Potenzen der t_r, so lauten die linearen Glieder

$$\sum_{rf} k_{ff}^{(r)} t_r .$$

Also haben wir den Satz:

Für eine Minimalmannigfaltigkeit verschwinden die linearen Glieder in der Gleichung der Krümmungsspur.

Wie man leicht sieht, ist die Krümmungsspur ein Gebilde vom Grade v, also ist stets für eine Fläche (M_2) in einer beliebigen $\mathfrak{M}_n$ die Krümmungsspur ein Gebilde zweiten Grades. Dessen Mittelpunkt ist dann stets der Punkt P. Im besonderen wird für eine Fläche im 4-dimensionalen Raum die Krümmungsspur ein *Kegelschnitt und P dessen Mittelpunkt.*

Dortmund, den 3. Februar 1903.

Über die Deformation gekrümmter elastischer Platten.

Von L. MAURER in Tübingen.

Fortsetzung.

Dritter Teil.

Genauere Untersuchung des speziellen Falles, daß die Mittelfläche eine Rotationsfläche ist.

15. *Definition der Fläche. Wahl des Koordinatensystems.* — Wir wenden die allgemeine Theorie auf den Fall an, daß die Mittelfläche eine Rotationsfläche ist. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß die Kurve, deren Rotation die Fläche erzeugt, ein Oval ist, dessen Symmetrieachse auf der Rotationsachse senkrecht steht. Die Rotationsachse wählen wir als z-Achse und denken sie vertikal stehend; als Ebene $z = 0$ wählen wir die Symmetrieebene der Fläche, die „Äquatorebene". Den Abstand eines Punktes der Fläche von der Rotationsachse bezeichnen wir mit r. Die Größen r und z werden als Funktionen eines Parameters p betrachtet. Die Derivierten von r und z nach p bezeichnen wir mit r', z' u. s. w., die Derivierte des Linienelementes der Meridiankurve mit s'. Die Größen r und s' sind beständig positiv. Der Parameter p werde derart gewählt, daß im höchsten Punkt der Meridiankurve r' positiv, im tiefsten r' negativ ist. Der reziproke Wert des positiv genommenen Krümmungshalbmessers der Meridiankurve ist somit $R = \frac{z'r'' - r'z''}{s'^3}$.

Als zweiten Parameter benützen wir den Winkel, den ein beliebiger Meridian mit dem durch die x-Achse gehenden Anfangsmeridian bildet. Diesen zweiten Parameter bezeichnen wir — abweichend von der bisher gebrauchten Bezeichnungsweise — mit q.

Für die Koordinaten eines Punktes der Mittelfläche und die Richtungskosinus der nach außen gerichteten Normalen erhalten wir nun die Darstellung:

$$(1)\quad \begin{cases} x = r\cos q, \qquad y = r\sin q, \\ X = -\frac{z'}{s'}\cos q, \quad Y = -\frac{z'}{s'}\sin q, \quad Z = \frac{r'}{s'}. \end{cases}$$

Man verifiziert leicht, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p_1} & \frac{\partial y}{\partial p_1} & \frac{\partial z}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x}{\partial p_2} & \frac{\partial y}{\partial p_2} & \frac{\partial z}{\partial p_2} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = rs',$$

also positiv ist, wie dies der früher getroffenen Festsetzung entspricht (vergl. den Anfang des Art. 2).

Für die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung ergeben sich die Werte:

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11} = s'^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = r^2, \quad a = r^2 s'^2; \\ c_{11} = \frac{z'r'' - r'z''}{s'} = s'^2 R, \quad c_{12} = 0, \quad c_{22} = -\frac{rz'}{s'}, \quad c = -rz's'R. \end{cases}$$

Es ist zweckmäßig, an Stelle der Verrückungskomponenten u, v die Komponenten der Verrückung, geschätzt nach der Richtung der wachsenden r und der Richtung der wachsenden q, einzuführen. Wir setzen

$$u = \varrho\cos q - \sigma\sin q, \quad v = \varrho\sin q + \sigma\cos q.$$

Es ist alsdann (s. **11**, 6 und **14**, 2):

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha_{11} = \sum \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial p} = r'\frac{\partial \varrho}{\partial p} + z'\frac{\partial w}{\partial p}, \\ \alpha_{22} = \sum \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial q} = r\frac{\partial \sigma}{\partial q} + r\varrho, \\ \alpha_{12} - rs'\eta = \sum \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} = r\frac{\partial \sigma}{\partial p}, \\ \alpha_{12} + rs'\eta = \sum \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial p} = r'\frac{\partial \varrho}{\partial q} - r'\sigma + z'\frac{\partial w}{\partial q}, \\ \eta_1 = \sum X\frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{z'}{s'}\frac{\partial \varrho}{\partial p} + \frac{r'}{s'}\frac{\partial w}{\partial p}, \\ \eta_2 = \sum X\frac{\partial u}{\partial q} = -\frac{z'}{s'}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial q} - \sigma\right) + \frac{r'}{s'}\frac{\partial w}{\partial q}. \end{cases}$$

Die Gleichungen **14**, (9) ergeben:

$$(4) \qquad \begin{cases} \eta_1 = -\frac{s'^2}{r'}\frac{\partial \eta}{\partial q} + \frac{1}{E} r \frac{s'}{z'}\frac{\partial H}{\partial p}, \\ \eta_2 = -\frac{r}{s' R}\frac{\partial \eta}{\partial p} - \frac{1}{E}\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

Hier ist rechts an Stelle der Kirchhoffschen Konstanten K, ϑ der Elastizitätsmodul $E = 2K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}$ eingeführt (Art. **1**, Schluß).

Die weitere Untersuchung gestaltet sich wesentlich verschieden, je nachdem die Mittelfläche von der Rotationsachse geschnitten wird oder nicht. Im ersten Fall ist die Fläche nach außen überall konvex, im zweiten Fall haben wir es mit einer Röhrenfläche zu tun.

16. *Mittelfläche mit überall positiver Krümmung.* — Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Mittelfläche eine einfach zusammenhängende, nach außen überall konvexe Fläche ist. Um die elastische Deformation von der Bewegung des als starr betrachteten Körpers zu trennen, nehmen wir an — was offenbar zulässig ist — daß die Verbindungslinie der beiden Pole der Fläche bei der elastischen Deformation keine Drehung erfahre, und daß ihr Halbierungspunkt festgehalten werde. Ferner möge das durch den oberen Pol gehende Flächenelement keine Drehung um die Vertikale erfahren. Es wird dann offenbar jeder Punkt der Fläche nur in seiner Meridianebene verschoben, und alle Meridiankurven werden in derselben Weise deformiert.

Daraus folgt: die Größen γ_{11}, γ_{12}, γ_{22}, ϱ und w hängen nur vom Parameter p ab, die Größen σ, η und η_2 verschwinden (vergl. die Bemerkung zu **14**, 2). Die dritte der Gleichungen (3) des vorigen Artikels zeigt, daß infolge dessen auch α_{12} und damit auch γ_{12} verschwindet.

Um zunächst die Größen γ_{11}, γ_{12}, γ_{22} zu bestimmen, benützen wir die Gleichungen (8) und (9) des Art. **11**. Sie ergeben:

$$(1) \qquad \frac{d}{dp}\left(\frac{s'\gamma_{22}}{r}\right) - \frac{s''}{r}\gamma_{22} - \frac{r'}{s'}\gamma_{11} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dp}\left(\frac{r\gamma_{12}}{s'}\right) = 0,$$

und hierzu kommt die Gleichung

$$(3) \qquad \frac{(c, \gamma)}{a} = \frac{R}{r^2}\gamma_{22} - \frac{z'}{rs'^3}\gamma_{11} = Q.$$

Die Gleichung (2) erfordert, da γ_{12} in den Polen der Rotationsfläche nicht unstetig werden darf, $\gamma_{12} = 0$ im Einklang mit der oben gemachten Bemerkung.

Aus (1) folgt:

$$s' \frac{d \frac{\gamma_{22}}{r}}{dp} - \frac{r'}{s'} \gamma_{11} = 0.$$

Führen wir den aus (3) folgenden Wert von γ_{11} in diese Gleichung ein, so ergibt sich

$$s' \frac{d \frac{\gamma_{22}}{r}}{dp} - \frac{s'^2 r' R}{z'} \frac{\gamma_{22}}{r} + \frac{r r' s'^2}{z'} Q = 0.$$

Multiplizieren wir mit $\frac{z'}{s'^2}$. Der Koeffizient von $\frac{\gamma_{22}}{r}$ wird

$$-\frac{r'(z'r'' - r'z'')}{s'^3} = -\frac{z'(r'r'' + z'z'') - s'^2 z''}{s'^3} = \frac{z''}{s'} - \frac{z's''}{s'^2} = \frac{d\frac{z'}{s'}}{dp}.$$

Wir erhalten somit $\frac{d}{dp}\left(\frac{z'\gamma_{22}}{s'r}\right) = -rr'Q$, folglich

$$\frac{z'\gamma_{22}}{s'r} = -\frac{Q}{2} r^2 + \text{Const.} \tag{4}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten ist zu bemerken: unser System von Flächenkoordinaten p, q verstößt gegen die frühere Festsetzung, daß die Determinante der quadratischen Form, die das Quadrat des Linienelementes darstellt, auf der ganzen Mittelfläche nicht verschwinden soll. Infolge dessen tritt zu den Stetigkeitsbedingungen, denen die Größen γ_{11}, γ_{22} genügen müssen, noch eine weitere Bedingung hinzu:

Die Differentialinvariante $H = \frac{(a, \gamma)}{a} = \frac{\gamma_{11}}{s'^2} + \frac{\gamma_{22}}{r^2}$ muß auch in den Polen stetig bleiben. Daraus folgt, daß die in Rede stehende Integrationskonstante gleich 0 zu setzen ist.

Wir erhalten also

$$\gamma_{22} = -\frac{Q}{2} \frac{r^3 s'}{z'},$$

$$\gamma_{11} = -\frac{Q}{2} s'^2 \left[2r \frac{s'}{z'} + r^2 \frac{s'^2}{z'^2} R\right],$$

$$H = -\frac{Q}{2}\left[3r\frac{s'}{z'} + r^2 \frac{s'^2}{z'^2} R\right].$$

Für $z' = 0$ ist auch $r = 0$, der Quotient $\frac{r}{z'}$ bleibt stetig, folglich sind γ_{11}, γ_{22} und H auf der ganzen Mittelfläche stetig.

Die Gleichungen **14**, (4) ergeben, wenn wir an Stelle der Konstanten K, ϑ die Konstanten $E = 2K\frac{1 + 3\vartheta}{1 + 2\vartheta}$ und $\mu = \frac{\vartheta}{1 + 2\vartheta}$ einführen (vergl. Art. **1**, Schluß):

$$\alpha_{11} = \frac{1}{E}\left[\mu\gamma_{11} - \gamma_{22}\frac{s'^2}{r^2}\right], \quad \alpha_{22} = \frac{1}{E}\left[\mu\gamma_{22} - \gamma_{11}\frac{r^2}{s'^2}\right]. \tag{5}$$

Die beiden ersten der Gleichungen (3) des Art. **15** ergeben $r'\varrho' + z'w' = \alpha_{11}$, $r\varrho = \alpha_{22}$. Die Bestimmung von w wird vervollständigt durch die Bemerkung, daß diese Größe aus Gründen der Symmetrie in der Äquatorebene verschwinden muß.

Man verifiziert leicht, daß die gefundenen Werte von ϱ und w auf der ganzen Mittelfläche einwertig und stetig sind.

Der Kürze wegen sehe ich davon ab, die entwickelten allgemeinen Formeln auf Beispiele anzuwenden.

17. *Deformation einer Röhre.* — Wir nehmen nunmehr an, die Mittelfläche habe die Gestalt einer kreisförmig gebogenen Röhre; sie bilde aber keinen vollständig geschlossenen Ring, sondern werde durch zwei Meridianebenen begrenzt. Der Winkel, um den das gegebene Oval gedreht werden muß, um die Mittelfläche zu erzeugen, werde mit $2\pi - 2\beta$ bezeichnet.

Die offenen Enden der Röhre denken wir uns durch aufgesetzte Kappen geschlossen. Auf diese Kappen wirkt — wie auf die Röhre selbst — von außen der Normaldruck (P_3^+), von innen der Normaldruck (P_3^-). Dieser Druck überträgt sich auf die Ränder der Röhre: auf jeden dieser Ränder wirkt senkrecht zur Randebene eine Kraft, deren Gesamtgröße das Produkt aus der Druckdifferenz $(P_3^+) + (P_3^-)$ und der Fläche des Ovals ist, dessen Rotation die Mittelfläche erzeugt. Wie sich diese Kraft auf den Rand verteilt, hängt von der Gestalt der Schlußkappe ab, und ebenso hängen davon die auf den Rand wirkenden Druckkomponenten ab, deren Richtung in die Ebene des Randes fällt. Wenn der Abstand des erzeugenden Ovals von der Rotationsachse gegen die Dimensionen desselben einigermaßen beträchtlich ist, wird man annehmen dürfen, daß sich der Einfluß der Gestalt der Schlußkappen nur in nächster Nähe der Enden der Röhre bemerkbar macht, daß aber in einiger Entfernung von den Rändern die elastischen Spannungen, die in der Röhre herrschen, davon unabhängig sind. Soweit diese Vernachlässigung zulässig ist, gilt auch hier wieder die Bemerkung, daß die Spannungen — also die Größen $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ — von dem Parameter p, aber nicht von dem Parameter q abhängen. Die mittlere Meridianebene, in Bezug auf welche die Röhrenfläche symmetrisch ist, wählen wir als Anfangsmeridian (als Ebene $y = 0$). Den Schnittpunkt der Fläche mit der x-Achse, der der Rotationsachse zunächst liegt, denken wir festgehalten, und wir nehmen ferner an, daß bei der elastischen Deformation das durch diesen Punkt gehende Element der Meridiankurve seine Richtung und das durch ihn gehende Flächenelement seine Stellung nicht ändere — Annahmen, die offenbar zulässig sind.

Aus Gründen der Symmetrie ergibt sich, daß die Verrückungskomponente ϱ eine gerade Funktion des Parameters q, die Komponente σ eine ungerade Funktion von q ist. Die Komponente w muß von q unabhängig sein, da wir ja alle Kräfte, die eine Abhängigkeit dieser Komponente vom Parameter q bewirken könnten, vernachlässigt haben. Von den Komponenten der Drehung $\frac{\eta_1}{s'}$, $\frac{\eta_2}{r}$, η (vergl. die Bemerkung zu **14**, (2)) muß die erste — die Komponente der Drehung um den Parallelkreis — von q unabhängig sein, die beiden anderen — die Komponente der Drehung um den Meridian und die Komponente der Drehung um die Flächennormale — sind ungerade Funktionen von q.

Die erste der Gleichungen **15**, (4) zeigt, daß $\frac{\partial \eta}{\partial q}$ von q unabhängig ist. Folglich ist η das Produkt von q in eine Funktion von p. Die dritte der Gleichungen **15**, (3) zeigt, daß die Größe α_{12} — ebenso wie σ und η — ungerade Funktion von q ist. Da nun nach Voraussetzung die Größen $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ und folglich auch die Größen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ (s. **14**, (4)) von q unabhängig sind, so ist $\alpha_{12} = 0$ und folglich auch $\gamma_{12} = 0$.

Bezüglich des Parameters p sind bisher keine näheren Bestimmungen getroffen worden. Wir setzen nun fest, der Parameter p sei so gewählt, daß Punkten der Mittelfläche, die zur Äquatorebene symmetrisch liegen, entgegengesetzte Werte des Parameters p entsprechen. In dem Punkte der Meridiankurve, der der Rotationsachse zunächst liegt, sei $p = 0$; im höchsten Punkte der Meridiankurve sei $p = \frac{\pi}{2}$, in dem Punkte, der von der Rotationsachse am weitesten entfernt ist, sei $p = \pi$. Die genannten 3 Punkte bezeichnen wir der Reihe nach mit den Nummern 0, 1, 2. Die Werte, die irgend eine Funktion f von p in diesen Punkten annimmt, bezeichnen wir mit f_0, f_1, f_2.

Die Punkte 0 und 2 sind die Endpunkte der Symmetrieachse des Ovals, im Punkte 1 ist die Tangente der Symmetrieachse parallel. r und z sind periodische Funktionen von p mit der Periode 2π, und zwar ist r gerade, z ungerade Funktion.

Die Verrückungskomponenten ϱ und σ sind gerade Funktionen von p, w ist ungerade Funktion von p.

Nach der oben getroffenen Festsetzung ist $\varrho = 0$ für $p = 0$, $q = 0$.

18. *Integration der Differentialgleichungen des Problems.* — Die Integration der Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie verläuft im vorliegenden Fall zunächst ebenso wie im Fall des Art. **16**. Wir erhalten zunächst (Gleichung (4) des genannten Art.)

$$\frac{z'}{s'}\frac{\gamma_{22}}{r} = -\frac{Q}{2}r^2 + \text{Const.}$$

Damit γ_{22} im Punkte 1, wo $z'=0$, stetig bleibt, muß der Ausdruck auf der rechten Seite in diesem Punkte verschwinden. Es ist also

$$\gamma_{22} = -\frac{Q}{2}\frac{s'}{z'}r(r^2 - r_1^2). \tag{1}$$

Aus der Gleichung (s. **16**, (3))

$$\frac{(c,\gamma)}{a} = \frac{R}{r^2}\gamma_{22} - \frac{z'}{rs'^3}\gamma_{11} = Q$$

ergibt sich

$$\gamma_{11} = -\frac{Q}{2}s'^2\left[2\frac{s'}{z'}r + \frac{s'^2}{z'^2}R(r^2 - r_1^2)\right]. \tag{2}$$

Schreibt man γ_{11} in der Form

$$\gamma_{11} = -\frac{Q}{2}s'\left[2rz' + \frac{d}{dp}\left(\frac{r'}{z'}(r^2 - r_1^2)\right)\right], \tag{2a}$$

so erkennt man, daß γ_{11} längs des ganzen Ovals stetig ist.

Aus (1) und (2a) folgt:

$$H = \frac{\gamma_{11}}{s'^2} + \frac{\gamma_{22}}{r^2} = -\frac{Q}{2}\left[2r\frac{z'}{s'} + \frac{1}{s'}\frac{d}{dp}\left(\frac{r'}{z'}(r^2 - r_1^2)\right) + \frac{s'}{z'}\frac{r^2 - r_1^2}{r}\right]. \tag{3}$$

Es ist nun zunächst die Funktion η zu bestimmen.

In der partiellen Differentialgleichung, der diese Funktion genügt (**14**, (11)), verschwindet der Ausdruck auf der rechten Seite, weil $A_{21}=0$, $\gamma_{12}=0$ und H von q unabhängig ist; das zweite Glied links verschwindet, weil $c_{12}=0$ und η lineare Funktion von q ist (vergl. den vorigen Art.) Wir erhalten daher (vergl. **15**, (2))

$$\frac{1}{rs'}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{r}{Rs'}\frac{\partial\eta}{\partial p}\right) + \left(R - \frac{z'}{s'}\frac{1}{r}\right)\eta = 0. \tag{4}$$

Hierzu tritt nun eine weitere Bedingung. Für $p=\frac{\pi}{2}$ und beliebige Werte von q verschwindet die linke Seite der Gleichung **14**, (8). Es ist daher für $p=\frac{\pi}{2}$ und beliebige Werte von q

$$\frac{\partial\eta}{\partial q} = \frac{1}{2K}\frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}\frac{r}{s'}H' = \frac{1}{E}\frac{r}{s'}H'.$$

Den Wert, den die Derivierte $\frac{dH}{ds} = \frac{H'}{s'}$ für $p=\frac{\pi}{2}$ annimmt, bezeichnen wir mit Qh. Die Konstante h ist für die Deformation der Röhre charakteristisch.

Wir genügen der Differentialgleichung (4) und den Nebenbedingungen, indem wir

$$\eta = \frac{Q}{E}hr_1\frac{r'}{s'}q \tag{5}$$

setzen.

Nun folgt aus **14**, (8) mit Rücksicht auf **15**, (2):

$$(6)\qquad \eta_1 = -\frac{1}{E}\left[Qhr_1\frac{r's'}{z'} - \frac{rs'}{z'}H'\right].$$

Es ist ferner

$$\frac{d\frac{r}{s'}}{dp} = \frac{s'r'' - r's''}{s'^2} = \frac{(r'^2 + z'^2)r'' - r'(r'r'' + z'z'')}{s'^3} = z'R,$$

also

$$\frac{d\eta}{dp} = \frac{Qhr_1}{E}z'Rq.$$

Setzen wir diesen Wert in **14**, (7) ein, so folgt:

$$(7)\qquad \eta_2 = -\frac{Qhr_1}{E}r\frac{z'}{s'}q.$$

Die Größen α_{11}, α_{22} sind bestimmt durch die Gleichungen (s. Art. **16**, (5))

$$(8)\qquad \alpha_{11} = \frac{1}{E}\left[\mu\gamma_{11} - \frac{s'^2}{r^2}\gamma_{22}\right],\quad \alpha_{22} = \frac{1}{E}\left[\mu\gamma_{22} - \frac{r^2}{s'^2}\gamma_{11}\right].$$

Die Gleichungen (3) des Art. **15**, die die Komponenten der Verrückung bestimmen, erhalten die Form:

$$(9)\qquad r'\frac{\partial\varrho}{\partial p} + z'w' = \alpha_{11},$$

$$(10)\qquad r\frac{\partial\sigma}{\partial q} + r\varrho = \alpha_{22},$$

$$(11)\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial p} = -\frac{Qhr_1}{E}r'q,$$

$$(12)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial q} - \sigma = \frac{Qhr_1}{E}rq,$$

$$(13)\qquad -\frac{z'}{s'}\frac{\partial\varrho}{\partial p} + \frac{r'}{s'}w' = \eta_1.$$

Die letzte Gleichung des genannten Systems kann weggelassen werden, da sie mit (12) identisch wird.

Die Gleichung (9) zeigt, daß $\frac{\partial\varrho}{\partial p}$ von q unabhängig ist. Wir setzen $\varrho = \varrho_0 + \bar{\varrho}$. Hier bedeutet ϱ_0 den Wert, den ϱ für $p = 0$ annimmt, $\bar{\varrho}$ ist eine Funktion von p, die für $p = 0$ verschwindet. Da $\varrho = 0$ wird für $p = 0$, $q = 0$, so ist $\varrho_0 = 0$ für $q = 0$.

Aus (11) folgt:

$$(14)\qquad \sigma = -\frac{Qhr_1}{E}rq + \tau,$$

wo τ eine Funktion von q bedeutet.

Differentiieren wir die Gleichung (10) nach q und eliminieren ϱ und σ mittelst der Gleichungen (12) und (14), so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial q^2} + \tau = 0.$$

σ ist ungerade Funktion von q, dasselbe gilt für τ. Demnach ist

$$\tau = \text{Const.} \sin q.$$

Bezeichnen wir die Integrationskonstante mit $\varkappa r_0^2 \frac{Q}{E}$, so wird

$$\sigma = -\frac{Q}{E}[h r_1 r q - \varkappa r_0^2 \sin q]. \tag{15}$$

Um die Konstante $\varkappa$ zu bestimmen, setzen wir in der Gleichung (10) $p = 0$ und $q = 0$. Für dieses Wertsystem der Parameter ist $\varrho = 0$,

$$\frac{\gamma_{22}}{r^2} = -\frac{Q}{2}\frac{r_0^2 - r_1^2}{r_0}, \quad \frac{\gamma_{11}}{s'^2} = -\frac{Q}{2}[2r_0 + R_0(r_0^2 - r_1^2)], \quad ((1) \text{ u. } (2))$$

folglich (8):

$$\frac{\alpha_{22}}{r^2} = -\frac{Q}{2E}\left[\mu\frac{r_0^2 - r_1^2}{r_0} - 2r_0 - R_0(r_0^2 - r_1^2)\right].$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$\varkappa = h\frac{r_1}{r_0} + 1 + \frac{r_1^2 - r_0^2}{2r_0^2}(\mu - r_0 R_0). \tag{16}$$

Aus (10) folgt mit Rücksicht auf (15):

$$\varrho = \frac{\alpha_{22}}{r} + \frac{Q}{E}[h r_1 r - \varkappa r_0^2 \cos q]. \tag{17}$$

Insbesondere ist für $p = 0$

$$\varrho_0 = \frac{Q}{E}\varkappa r_0^2(1 - \cos q). \tag{18}$$

Multipliziert man die Gleichung (9) mit $\frac{s'}{s'^2}$, (13) mit $\frac{r'}{s'}$ und addiert, so folgt:

$$w' = \frac{s'}{s'^2}\alpha_{11} + \frac{r'}{s'}\eta_1,$$

also da $w = 0$ für $p = 0$:

$$w = \int_0^p \left[s'\frac{\alpha_{11}}{s'^2} + \frac{r'}{s'}\eta_1\right] dp.$$

Nun ist (6)

$$\int_0^p \frac{r'}{s'}\eta_1 \, dp = -\frac{1}{E}\int_0^p \left[Q h r_1 \frac{r'^2}{s'} - r\frac{r'}{s'}H'\right] dp.$$

Durch partielle Integration geht der Ausdruck auf der rechten Seite in

$$\frac{1}{E}\frac{rr'}{z'}(H-H_1)-\frac{1}{E}\int\limits_0^p\left[Qhr_1\frac{r'^2}{z'}+\frac{d\frac{rr'}{z'}}{dp}(H-H_1)\right]dp$$

über, wobei zu berücksichtigen ist, daß $r'=0$ im Punkte 0.

Wir erhalten somit

$$w=\frac{1}{E}\frac{rr'}{z'}(H-H_1)+\int\limits_0^p z'\frac{\alpha_{11}}{s'^2}\,dp-\frac{1}{E}\int\limits_0^p\left[Qhr_1\frac{r'^2}{z'}+\frac{d\frac{rr'}{z'}}{dp}(H-H_1)\right]dp.$$

Bevor wir in eine Diskussion der entwickelten Formeln eintreten, ist es notwendig, die Konstanten h und $\varkappa$ zu berechnen.

19. *Bestimmung der Konstanten h und $\varkappa$.* — Es ist zweckmäßig, zur Bestimmung der Konstante h als ersten Parameter die vom Punkt 0 an gezählte Bogenlänge der Meridiankurve zu wählen.

Es war h der Wert, den der Quotient $\frac{1}{Q}\frac{dH}{ds}$ im Punkt 1 annimmt, und es ist (**18**, (3)):

$$-\frac{H}{Q}=r\frac{dz}{ds}+\frac{1}{2}\frac{ds}{dz}\frac{r^2-r_1^2}{r}+\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\frac{dr}{dz}(r^2-r_1^2)\right].$$

Wir setzen $\dfrac{r^2-r_1^2}{\frac{dz}{ds}}=\psi$ und erhalten

$$-\frac{H}{Q}=r\frac{dz}{ds}+\frac{1}{2}\frac{\psi}{r}+\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{dr}{ds}\psi\right)}{ds}.$$

Im Punkt 1 ist $\frac{dz}{ds}=0$, $\frac{dr}{ds}=1$, $\frac{d^2r}{ds^2}=0$, folglich

$$(1)\qquad -h=r_1\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_1-\frac{1}{2}\frac{\psi_1}{r_1^2}+\frac{1}{2r_1}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)_1+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\psi}{ds^2}\right)_1+\frac{1}{2}\left(\frac{d^3r}{ds^3}\right)_1\psi_1.$$

Wir drücken zunächst die Derivierten von r und z durch die Krümmung R und ihre Derivierten aus. Es ist

$$R=\frac{d^2r}{ds^2}\frac{dz}{ds}-\frac{d^2z}{ds^2}\frac{dr}{ds}=\sqrt{\left(\frac{d^2r}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

$$\frac{dR}{ds}=\frac{d^3r}{ds^3}\frac{dz}{ds}-\frac{d^3z}{ds^3}\frac{dr}{ds},$$

$$\frac{d^2R}{ds^2}=\frac{d^4r}{ds^4}\frac{dz}{ds}-\frac{d^4z}{ds^4}\frac{dr}{ds}+\frac{d^3r}{ds^3}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{d^3z}{ds^3}\frac{d^2r}{ds^2}.$$

Ferner

$$\frac{d^2 r}{ds^2}\frac{dr}{ds} + \frac{d^2 z}{ds^2}\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^3 r}{ds^3}\frac{dr}{ds} + \frac{d^3 z}{ds^3}\frac{dz}{ds} = -R^2.$$

Folglich

$$\left(\frac{d^3 r}{ds^3}\right)_1 = -R_1^2,\ \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)_1 = -R_1,\ \left(\frac{d^3 z}{ds^3}\right)_1 = -\left(\frac{dR}{ds}\right)_1,\ \left(\frac{d^4 z}{ds^4}\right)_1 = -\left(\frac{d^2 R}{ds^2}\right)_1 + R_1^3.$$

Sodann ist $\frac{dz}{ds}\psi = r^2 - r_1^2$, folglich

$$\frac{dz}{ds}\frac{d\psi}{ds} + \frac{d^2 z}{ds^2}\psi = 2r\frac{dr}{ds},$$

$$\frac{dz}{ds}\frac{d^2\psi}{ds^2} + 2\frac{d^2 z}{ds^2}\frac{d\psi}{ds} + \frac{d^3 z}{ds^3}\psi = 2r\frac{d^2 r}{ds^2} + 2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2,$$

$$\frac{dz}{ds}\frac{d^3\psi}{ds^3} + 3\frac{d^2 z}{ds^2}\frac{d^2\psi}{ds^2} + 3\frac{d^3 z}{ds^3}\frac{d\psi}{ds} + \frac{d^4 z}{ds^4}\psi = 2r\frac{d^3 r}{ds^3} + 6\frac{d^2 r}{ds^2}\frac{dr}{ds}.$$

Für die Werte der Funktion ψ und ihrer Derivierten im Punkt 1 ergeben sich somit bei Berücksichtigung von (2) die Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \psi_1 = -2\frac{r_1}{R_1}, & \left(\frac{d\psi}{ds}\right)_1 = \frac{r_1}{R_1^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)_1 - \frac{1}{R_1}, \\ \left(\frac{d^2\psi}{ds^2}\right)_1 = \frac{2}{3}\frac{r_1}{R_1^2}\left(\frac{d^2 R}{ds^2}\right)_1 - \frac{r_1}{R_1^3}\left(\frac{dR}{ds}\right)_1^2 + \frac{1}{R_1^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)_1. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in (1) ein, so erhalten wir:

$$(4)\qquad h = -\frac{1}{3}\frac{r_1}{R_1^2}\left(\frac{d^2 R}{ds^2}\right)_1 + \frac{1}{2}\frac{r_1}{R_1^3}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - \frac{1}{R_1^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)_1 - \frac{1}{2}\frac{1}{r_1 R_1}.$$

Damit ist auch die Konstante $\varkappa$ bestimmt (s. Gleichung (16) des vorigen Art.).

Die Differentialinvariante, die in dem Ausdruck von h als Faktor von r_1 auftritt:

$$J = \frac{1}{2}\frac{1}{R^3}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{1}{R^2}\frac{d^2 R}{ds^2},$$

hängt von der Krümmung und ihren Derivierten erster und zweiter Ordnung ab. Im Berührungspunkt von zwei Kurven, die sich fünfpunktig berühren, hat daher diese Invariante für beide Kurven denselben Wert.

Um die Abhängigkeit der Invariante J von der Krümmung der Kurve genau zu übersehen, berechnen wir J für einen beliebigen Punkt einer Ellipse.

Die Koordinaten eines Punktes der Ellipse stellen wir in der Form $a\sin p,\ b\cos p$ dar. Es ergibt sich

$$J = -\frac{a^2 - b^2}{ab}\frac{\cos 2p}{s'} - \frac{3}{8}\frac{(a^2 - b^2)^2}{ab}\frac{\sin^2 2p}{s'^3}.$$

Hier ist $s' = \sqrt{a^2 \cos^2 p + b^2 \sin^2 p}$. Der absolute Wert von J erreicht in den Endpunkten der Achsen ein Maximum, und zwar ist in den Endpunkten der a-Achse $J = \frac{a^2 - b^2}{ab^2}$, in den Endpunkten der b-Achse $J = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b}$. Wenn der Abstand der Röhrenfläche von der Rotationsachse gegen die Dimensionen des Querschnitts der Fläche einigermaßen groß ist, so sind für die Bestimmung der Größenordnung von h diejenigen Glieder auf der rechten Seite von (4) maßgebend, die in r_1 multipliziert sind. Man wird daher, wenn es sich darum handelt, einen möglichst großen Wert von h zu erzielen, den Querschnitt der Röhre so wählen, daß er im höchsten und tiefsten Punkt dieselbe Art der Krümmung besitzt, wie eine Ellipse in den Endpunkten der großen oder kleinen Achse.

Unter der Voraussetzung, daß J einigermaßen groß ist, erhalten wir für h und $\varkappa$ die Näherungswerte (s. **18**, (16)) $h = r_1 J$, $k = h + 1 = r_1 J + 1$.

20. *Über die Stetigkeits- und Grenzbedingungen.* — Die in Art. **18** entwickelten Formeln zeigen, daß die Größen γ_{11}, γ_{22}, ϱ, σ und w' auf der ganzen Mittelfläche einwertig und stetig sind. Da aber die Mittelfläche *zweifachen* Zusammenhang besitzt, so genügt die Einwertigkeit und Stetigkeit der Derivierten w' noch nicht, um die Einwertigkeit der Funktion w sicher zu stellen. Hierzu ist vielmehr noch erforderlich, daß das über die Meridiankurve erstreckte Integral $\int_0^{2\pi} w' dp$ verschwindet. Mit Rücksicht darauf, daß w' gerade Funktion von p ist und daß die Derivierte r' für $p = \pi$ verschwindet, kann man diese Bedingung auch durch die folgende ersetzen (**18**, (19))

$$(1) \quad w_2 = \int_0^{\pi} z' \frac{\alpha_{11}}{s'^2} dp - \frac{1}{E} \int_0^{\pi} \left[Q h r_1 \frac{r'^2}{z'} + \frac{d \frac{r r'}{z'}}{dq} (H - H_1) \right] dp = 0.$$

Im allgemeinen ist der Periodizitätsmodul $2 w_2$ von Null verschieden, daher sind im allgemeinen Falle die Voraussetzungen, von denen wir in Art. **9** ausgegangen sind, nicht zulässig. Wir werden aber im folgenden nachweisen, daß der Querschnitt der Röhre in mannigfaltigster Weise so gewählt werden kann, daß der Periodizitätsmodul $2 w_2$ verschwindet; es gibt also eine ausgedehnte Klasse von Fällen, in denen die hier entwickelte Theorie Platz greift. Diese Fälle sind es gerade, die praktisch von Wichtigkeit sind. Denn es ist offenbar zweck-

mäßig, einer Röhre der hier betrachteten Art, die zu barometrischen oder thermometrischen Messungen dienen soll, eine solche Gestalt zu geben, daß die eintretenden Spannungen einen möglichst stetigen Verlauf zeigen — das Wort *stetig* im praktischen, nicht im rein abstrakten Sinn genommen.

Die Unregelmäßigkeit im Gang, die manche Aneroidbarometer zeigen, sind wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß die hier vorausgesetzten Stetigkeitsbedingungen nicht erfüllt sind.

Bei den folgenden Erörterungen setzen wir voraus, die Bedingung $w_2 = 0$ sei erfüllt.

Der Druck, den ein auf einem Parallelkreis senkrecht stehendes Flächenelement des Körpers von der Seite der abnehmenden q her erfährt, ist $= \frac{\gamma_{11}}{s'^2}$; er wirkt im Sinne der zunehmenden q (**10**, (5)).

Der Druck, den ein auf einem Meridian senkrecht stehendes Flächenelement von der Seite der abnehmenden p her erfährt, ist $\frac{\gamma_{22}}{r^2}$. Wenn der Abstand der Röhre von der Rotationsachse gegen ihre Dimensionen groß ist, so gelten in erster Annäherung die Werte

$$\frac{\gamma_{11}}{s'^2} = -Q\left[r_1 \frac{z'}{s'} + r_1 \frac{d}{dp}\left(\frac{r'(r-r_1)}{z'}\right)\right],$$

$$\frac{\gamma_{22}}{r^2} = -Q\frac{s'}{z'}(r - r_1) \qquad (\mathbf{18}, (1) \text{ u. } (2\text{a})).$$

Der in der Richtung der Parallelkreise wirkende Druck steigt also zu erheblich größeren Werten an, als der in der Richtung der Meridiane wirkende.

Auf ein Element des Randes, das auf der Seite der positiven q liegt, wirkt vom Innern des Körpers her die Kraft (**18**, (2a))

$$\frac{\gamma_{11}}{s'^2} \cdot 2\varepsilon ds = -2Q\varepsilon\left[r\frac{z'}{s'} + \frac{1}{s'}\frac{d}{dp}\left(\frac{r'}{z'}(r^2 - r_1^2)\right)\right]$$

im Sinne der zunehmenden q. Auf den gesamten Rand wirkt somit die Kraft

$$-2Q\varepsilon\int_0^{2\pi} rz'dp = 2Q\varepsilon\int_0^{2\pi}(r_1 - r)z'dp\,.$$

Das rechtsstehende Integral stellt die Fläche dar, die die Meridiankurve einschließt. Der vor dem Integralzeichen stehende Faktor $2Q\varepsilon$ ist (Art. **10**) $= -[(P_3^+) + (P_3^-)]$. Die auf den Rand wirkende, von der Elastizität der Röhre herrührende Kraft ergibt sich also — wie es die Theorie erfordert — als entgegengesetzt gleich der auf der Druckdifferenz beruhenden Kraft (vergl. Art. **17**).

Für die Verrückung des Röhrenendes, das auf der Seite der positiven q liegt ($q = \pi - \beta$), ergeben sich die Werte (Art. 18, (15) u. (18)):

$$\sigma_0 = -\frac{Q}{E} r_0 (h r_1 (\pi - \beta) - \varkappa r_0 \sin \beta), \quad \varrho_0 = \frac{Q}{E} \varkappa r_0^2 (1 + \cos \beta).$$

Ist r_1 gegen die Differenz $r_1 - r_0$ groß und β klein, so erhalten wir in erster Annäherung (s. Art. **19** Schluß) $\sigma_0 = -\frac{Q}{E} J r_1^3$, $\varrho_0 = \frac{Q}{E} J r_1^2$. Es ist somit die Verschiebung der Röhre in tangentialer Richtung erheblich größer, als die Verschiebung in radialer Richtung.

Die beiden Verschiebungskomponenten haben entgegengesetzte Vorzeichen.

Hat die Röhre im höchsten Punkt dieselbe Art der Krümmung wie eine Ellipse in den Endpunkten der großen Achse, so ist J positiv, das Röhrenende weicht, wenn Q positiv, also der äußere Druck größer als der innere ist, in tangentialer Richtung zurück; hat die Röhre im höchsten Punkt dieselbe Art der Krümmung wie eine Ellipse in den Endpunkten der kleinen Achse, so ist J negativ, das Röhrenende rückt vor.

21. *Analytische Darstellung der Meridiankurve.* — Es bleibt nachzuweisen, daß der Querschnitt der Röhre so gewählt werden kann, daß das Integral $w_2 = \int_0^\pi w' dp$ verschwindet. Zu diesem Zweck ist es notwendig, über die analytische Darstellung des Ovals, in dem die Röhrenfläche von einer Meridianebene geschnitten wird, bestimmte Annahmen zu machen.

Es läßt sich nachweisen, daß w_2 notwendig von Null verschieden ist, wenn für das Oval eine Ellipse gewählt wird, und soviel ich sehe, kann w_2 überhaupt nicht verschwinden, wenn das Oval *zwei* Symmetrieachsen besitzt; für den Fall, daß r_1 gegen die Dimensionen des Querschnitts sehr groß ist, läßt sich dies in aller Strenge beweisen. Zu Ovalen mit nur *einer* Symmetrieachse, die für unsere Zwecke brauchbar sind, gelangt man am einfachsten auf folgendem Wege: Wir nehmen eine Ellipse an, deren eine Achse in die r-Achse fällt — es kann dies die große oder die kleine Achse der Ellipse sein — und setzen fest, daß diese Ellipse in den Endpunkten der anderen, zur Rotationsachse parallelen Achse das Oval je fünfpunktig berühre. Wir ordnen nun jedem Punkt der Ellipse den Punkt des Ovals zu, in dem die nach außen gerichtete Normale dieselbe Richtung hat. Die Koordinaten eines Punktes der Ellipse lassen sich in der Form $r_1 - b \cos p$, $a \sin p$

darstellen. Für die Koordinaten des entsprechenden Punktes des Ovals gelten die Differentialgleichungen

$$(1) \qquad r' = b \sin p(1 + \nu m), \quad z' = a \cos p(1 + \nu m)$$

und die Anfangsbedingungen $r = r_1$ für $p = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$ für $p = 0$. Hier bedeutet m eine überall stetige periodische Funktion von p mit der Periode 2π und ν eine Konstante, deren absoluter Wert kleiner ist als das Maximum des absoluten Wertes von $1/m$. Weiterhin wird die Funktion m als gegeben, ν als verfügbarer Parameter betrachtet.

Damit die r-Achse Symmetrieachse des Ovals ist, muß m gerade Funktion von p, also eine einwertige Funktion von $\cos p$ sein. Wir wollen überdies annehmen, m sei ungerade Funktion von $\cos p$. Diese Annahme ist für die folgenden Betrachtungen nicht wesentlich, führt aber zu einer erheblichen Vereinfachung der Beweise.

Damit z periodische Funktion von p sei, ist erforderlich $\int\limits_0^{\pi} m \cos p\, dp = 0$. Da $m \cos p$ gerade Funktion von $\cos p$ ist, so kann diese Bedingung auch durch

$$(2) \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} m \cos p\, dp = 0$$

ersetzt werden. Aus dieser Gleichung folgt, daß $z = a$ für $p = \frac{\pi}{2}$, wie erforderlich. Die Differenzen zwischen den Koordinaten eines Punktes der Ellipse und des entsprechenden Punktes des Ovals bezeichnen wir mit $\nu b u \cos p$, $\nu a v \sin p$. Es ist also

$$(3) \qquad \begin{cases} r = r_1 - b \cos p(1 + \nu u), & z = a \sin p(1 - \nu v), \\ \dfrac{d(u \cos p)}{dp} = -m \sin p, & \dfrac{d(v \sin p)}{dp} = -m \cos p. \end{cases}$$

Aus der vorletzten Gleichung folgt, da $\frac{du}{dp} = -\frac{du}{d\cos p} \sin p$:

$$u + \frac{du}{d\cos p} \cdot \cos p = m,$$

und hieraus

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{d\cos p}\, dp = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m}{\cos p}\, dp - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\cos p}\, dp.$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\cos p}\,dp = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dp}{\cos^2 p} \int_p^{\frac{\pi}{2}} m(p_1)\sin p_1\,dp_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m(p_1)\sin p_1\,dp_1 \int_0^{p_1} \frac{dp}{\cos^2 p}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} m(p_1)\frac{\sin^2 p_1}{\cos p_1}\,dp_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m}{\cos p}\,dp - \int_0^{\frac{\pi}{2}} m\cos p\,dp\,.$$

Das zweite Integral verschwindet wegen (2), folglich ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{d\cos p}\,dp = 0. \tag{4}$$

Es bleibt noch zum Ausdruck zu bringen, daß das Oval von der zugeordneten Ellipse in den Punkten, die den Parameterwerten $p = \pm\frac{\pi}{2}$ entsprechen, fünfpunktig berührt wird.

Bezeichnen wir das Bogendifferential der Ellipse mit dt, ihre Krümmung mit P. Es ist also

$$t' = \sqrt{a^2\cos^2 p + b^2\sin^2 p}, \quad P = \frac{ab}{t'^3}.$$

Zwischen den Größen t', P und den entsprechenden auf das Oval bezüglichen Größen s', R bestehen die Beziehungen

$$s' = (1+\nu m)t', \quad R = \frac{P}{1+\nu m}. \tag{5}$$

Da m ungerade Funktion von $\cos p$ ist, so verschwinden für $p = \frac{\pi}{2}$ die Funktion m selbst und ihre Derivierten von gerader Ordnung. Wir setzen nun fest, für $p = \frac{\pi}{2}$ sei auch die erste Derivierte $m' = 0$. Unter dieser Annahme ist für $p = \frac{\pi}{2}$

$$R = P, \quad \frac{dR}{ds} = \frac{dP}{dt}, \quad \frac{d^2R}{ds^2} = \frac{d^2P}{dt^2};$$

es tritt also, wie gefordert ist, eine fünfpunktige Berührung ein. Aus der eben eingeführten Voraussetzung folgt, daß $\frac{m}{\cos^3 p}$ für $p = \frac{\pi}{2}$ endlich und stetig bleibt. Die Gleichungen (3) zeigen, daß u und v ebenso wie m ungerade Funktionen von $\cos p$ sind, und daß für $p = \frac{\pi}{2}$ die Quotienten $\frac{u}{\cos^3 p}$ und $\frac{v}{\cos^5 p}$ stetig bleiben.

Stellen wir die Eigenschaften der Funktionen m, u, v zusammen, die sich aus den bisher eingeführten Voraussetzungen ergeben:

(A)
1) **m, u, v sind einwertige und stetige, ungerade Funktionen von $\cos p$;**
2) **für $p = \frac{\pi}{2}$ bleiben $\frac{m}{\cos^3 p}$, $\frac{u}{\cos^3 p}$, $\frac{v}{\cos^5 p}$ stetig.**

   Außerdem wollen wir annehmen:
3) **Das Maximum des absoluten Wertes von $r - r_1$ ist kleiner als r_1.**

Hierzu kommen die Gleichungen (2) und (4).

Für den Beweis, daß w_2 durch geeignete Verfügung über den Parameter ν zum Verschwinden gebracht werden kann, reichen diese Annahmen aus. Für praktische Anwendungen wird man überdies verlangen, daß das Oval eine möglichst einfache Gestalt erhält. Um dies zu erreichen, führen wir eine zweite Gruppe von Voraussetzungen ein. Wir nehmen an:

(B)
1) **Die Funktionen m und $\frac{du}{d\cos p}$ wechseln nur an *einer* Stelle** des Intervalls $0, \frac{\pi}{2}$ das Vorzeichen. (***Ein*** Wechsel des Vorzeichens muß mindestens eintreten wegen (2) und (4).)
2) Im gleichen Intervall seien die Funktionen u und v beständig positiv, und zwar sei $u = 1$ für $p = 0$.

Weil u für $\cos p = 0$ gleich Null und für $\cos p > 0$ positiv ist, so ist $\frac{du}{d\cos p}$ für kleine positive Werte von $\cos p$ positiv, für $\cos p = 1$ negativ. Dasselbe gilt für die Funktion m.

Die einfachste Funktion m, die den gestellten Bedingungen genügt, ist $m = 20\cos^3 p - 24\cos^5 p$. In diesem Falle wird

$$u = 5\cos^3 p - 4\cos^5 p, \quad v = 4\cos^5 p.$$

22. *Beweis, daß es Formen des Querschnitts gibt, die den Voraussetzungen der Theorie entsprechen.* — Wir beweisen nun: nachdem über die Konstanten a, b und die Funktion m verfügt ist, kann man die Größen r_1 und ν in mannigfaltiger Weise so wählen, daß das Integral

(20, (1)) $w_2 = \int_0^{\pi} w' dp$ verschwindet.

Führen wir in die Gleichungen (1) und (2) des Art. **18** die im vorigen Artikel unter (3) angegebenen Werte ein und ordnen nach

Potenzen von r_1. $\frac{\gamma_{11}}{s'^2}$ ist lineare Funktion von r_1. $\frac{\gamma_{22}}{r^2}$ läßt sich — da nach Voraussetzung (A, 3 des letzten Artikels) der absolute Wert von $r - r_1$ kleiner als r_1 ist — in eine nach fallenden Potenzen von r_1 fortschreitende Reihe entwickeln. Diese Reihe beginnt mit einem von r_1 unabhängigen Glied. Die Reihenentwicklungen von H und $\frac{\alpha_{11}}{s'^2}$ beginnen mit einem Glied, das r_1 enthält (vergl. **18**, (3) u. (8)), die Reihenentwicklung von w' beginnt mit einem Glied, das r_1^2 enthält (vergl. **18**, (19)). Wir erhalten somit für w' eine Reihe der Form

$$w' = Ar_1^2 + Br_1 + C + \frac{D}{r_1} + \frac{E}{r_1^2} + \cdots, \tag{1}$$

und hieraus ergibt sich für w_2 eine analoge Reihenentwicklung

$$w_2 = (A)r_1^2 + (B)r_1 + (C) + \frac{(D)}{r_1} + \frac{(E)}{r_1^2} + \cdots. \tag{2}$$

In dieser Reihe sind die Koeffizienten gerader Potenzen von r_1 ungerade Funktionen des Parameters v, die Koeffizienten ungerader Potenzen von r_1 sind gerade Funktionen von v. Insbesondere ist (A) ungerade Funktion von v.

Zum Beweis ist zu bemerken: Ersetzen wir in den Gleichungen (3) des vorigen Artikels gleichzeitig r_1 durch $-r_1$, v durch $-v$, p durch $\pi - p$, so treten an Stelle der Größen m, u, v die Größen $-m, -u, -v$ und dementsprechend $-r, -z'$ an Stelle von r, z'; die Größen z, r', s' bleiben ungeändert. Bei den angegebenen Vertauschungen bleiben auch die Größen $\frac{\gamma_{11}}{s'^2}$ und $\frac{\gamma_{22}}{r^2}$ ungeändert, dagegen tritt $-w'$ an Stelle von w'.

Die Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ der w' darstellenden Reihe denken wir uns nun in Reihen entwickelt, die nach steigenden Potenzen von v fortschreiten. Die Koeffizienten der zweifach unendlichen Reihe, durch die nunmehr w' dargestellt wird, sind einwertige Funktionen von $\cos p$, und zwar ist der Koeffizient von $r_1^i v^j$ gerade oder ungerade Funktion von $\cos p$, je nachdem die Exponentensumme $i + j$ eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, weil bei gleichzeitigem Zeichenwechsel von r_1, v und $\cos p$ auch w' das Vorzeichen wechselt.

Das von 0 bis π erstreckte Integral einer ungeraden Funktion von $\cos p$ hat den Wert Null. In der Reihenentwicklung der Größe w_2, die wir durch gliedweise Integration erhalten, kommen daher nur solche Produkte $r_1^i v^j$ vor, für die die Summe der Exponenten $i + j$ eine ungerade Zahl ist, w. z. b. w. Nunmehr ist es leicht, den eingangs genannten Beweis zu führen.

Zu dem Zweck erteilen wir dem Parameter ν einen beliebig zu wählenden positiven Wert τ, der nur der einen Bedingung genügen muß, daß $1/\tau$ kleiner als das Maximum des absoluten Wertes der Funktion m ist. Sodann wählen wir die Konstante r_1 so groß, daß der absolute Wert des ersten Gliedes der Reihe (2) größer als die Summe der absoluten Werte aller folgenden Glieder ist. Alsdann hat w_2 dasselbe Vorzeichen wie (A). Diesen Wert von r_1 halten wir fest und lassen ν von τ bis $-\tau$ abnehmen. Der Endwert von w_2 hat, weil (A) ungerade Funktion von ν ist, das entgegengesetzte Vorzeichen wie der Anfangswert; folglich muß w_2 als stetige Funktion von ν mindestens für einen zwischen τ und $-\tau$ liegenden Wert von ν verschwinden. Damit ist bewiesen: es gibt Formen des Querschnitts, für die die Voraussetzungen unserer Theorie erfüllt sind.

23. *Näherungsweise Bestimmung der Konstante ν.* — Im Vorangehenden haben wir nur von den Voraussetzungen (A) des Art. **21** Gebrauch gemacht; wir ziehen nunmehr auch die Voraussetzungen (B) heran und nehmen überdies an, die Dimensionen des Querschnitts der Röhre seien gegen ihren Abstand von der Rotationsachse klein, es seien also die Halbachsen a, b klein gegen r_1.

Wir erhalten einen Näherungswert des Parameters ν, wenn wir in der Gleichung (2) des vorigen Artikels

$$w_2 = (A) r_1^2 + (B) r_1 + (C) + \cdots = 0$$

nur die beiden ersten Glieder rechts beibehalten. Die Größen (A) und (B) entwickeln wir in Reihen, die nach steigenden Potenzen von ν fortschreiten, und behalten von jeder Reihe nur das erste Glied bei, also von der ungeraden Funktion (A) das in ν multiplizierte Glied, von der geraden Funktion (B) das absolute Glied.

Wir haben nun zunächst Näherungswerte für die einzelnen in der Gleichung (**20,** (1)) auftretenden Größen zu berechnen. Es ist

$$w_2 = \int_0^\pi z' \frac{\alpha_{11}}{s'^2} dp - \frac{1}{E} \int_0^\pi \left[Q h r_1 \frac{r'^2}{z'} + \frac{d \frac{r r'}{z'}}{dp} (H - H_1) \right] dp.$$

Nach Art. **18,** (1) und (2a) ist:

$$\frac{\gamma_{11}}{s'^2} = - Q \left[r \frac{z'}{s'} + \frac{1}{2s'} \frac{d}{dp} \left(\frac{r'}{z'} (r^2 - r_1^2) \right) \right],$$

$$\frac{\gamma_{22}}{r^2} = - Q \frac{s'}{z'} \frac{r + r_1}{2r} (r - r_1).$$

Wir führen hier die in Art. **21,** (1), (3) und (5) angegebenen Werte ein und unterdrücken sofort alle die Glieder, die für die Be-

rechnung unserer Näherungswerte nicht in Betracht kommen. Wir erhalten

$$\frac{r'}{z'}(r^2 - r_1^2) = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} p\,[2r_1 b\cos p(1+\nu u) - b^2\cos^2 p + \cdots]$$

$$= -2\frac{b^2}{a}[r_1 \sin p - \tfrac{1}{4} b\sin 2p + \nu r_1 u \sin p + \cdots],$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dp}\left[\frac{r'}{z'}(r^2 - r_1^2)\right]$$

$$= -2\frac{b^2}{a}\left[r_1\cos p - \tfrac{1}{2} b\cos 2p + \nu r_1\left(m\cos p - \frac{du}{d\cos p}\right)\cdots\right],$$

Hier ist im letzten angeschriebenen Glied rechts von der Identität

$$m = u + \frac{du}{d\cos p}\cdot\cos p,$$

$$\frac{du\sin p}{dp} = u\cos p - \frac{du}{d\cos p}\sin^2 p = m\cos p - \frac{du}{d\cos p}$$

Gebrauch gemacht. Wir haben ferner

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{(1+\nu m)t'} = \frac{1}{t'}(1 - \nu m + \cdots).$$

Folglich

$$\frac{1}{2}\frac{1}{s'}\frac{d}{dp}\left[\frac{r'}{z'}(r^2 - r_1^2)\right]$$

$$= -\frac{b^2}{a}\left[r_1\cos p - \tfrac{1}{2} b\cos 2p + \nu r_1\left(m\cos p - \frac{du}{d\cos p}\right) + \cdots\right].$$

Sodann ist

$$r\frac{z'}{s'} = [r_1 - b\cos p + \cdots]\frac{a\cos p}{t'} = r_1\frac{a\cos p}{t'} - ab\frac{\cos^2 p}{t'},$$

demnach

$$(1)\quad \frac{\gamma_{11}}{s'^2} = -\frac{Q}{at'}\left[r_1(a^2-b^2)\cos p - b(a^2-b^2)\cos^2 p - \tfrac{1}{2}b^3 - \nu r_1 b^2\frac{du}{d\cos p}\cdots\right].$$

Ferner

$$(2)\qquad \frac{\gamma_{22}}{r^2} = Q\frac{b}{a}t' + \cdots = \frac{Qb}{t'a}[(a^2 - b^2)\cos^2 p + b^2 + \cdots].$$

Daraus ergibt sich

$$)\ H = -\frac{Q}{at'}\left[r_1(a^2-b^2)\cos p - 2(a^2-b^2)b\cos^2 p - \tfrac{3}{2}b^3 - \nu r_1 b^2\frac{du}{d\cos p}\cdots\right],$$

$$H_1 = \tfrac{3}{2}\,Q\frac{b^2}{a}.$$

Nun ist

$$\frac{rr'}{z'} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}p\,[r_1 - b\cos p] = r_1\frac{b}{a}\operatorname{tg}p - \frac{b^2}{a}\sin p,$$

$$\frac{d\frac{rr'}{z'}}{dp} = r_1\frac{b}{a}\frac{1}{\cos^2 p} - \frac{b^2}{a}\cos p.$$

Folglich

$$\frac{d\frac{rr'}{z'}}{dp}(H - H_1) = -\frac{Qb}{t'a^2}\Big[r_1^2(a^2-b^2)\frac{1}{\cos p} - 3r_1(a^2-b^2)b \tag{4}$$
$$+ \tfrac{3}{2}r_1 b^3\frac{t'-b}{\cos^2 p} - \nu r_1^2 b^2\frac{1}{\cos^2 p}\frac{du}{d\cos p} + \cdots\Big].$$

Ferner ist (Art. 19)

$$Qhr_1\frac{r'^2}{z'} = Qr_1^2\frac{a^2-b^2}{a^2}\frac{\sin^2 p}{\cos p}(1+\nu m).$$

Folglich

$$Qhr_1\frac{r'^2}{z'} + \frac{d\frac{rr'}{z'}}{dp}(H - H_1) \tag{5}$$
$$= -\frac{Q}{a^2 t'}\Big[r_1^2(a^2-b^2)\frac{b - t'\sin^2 p}{\cos p} - 3r_1(a^2-b^2)b^2 + \tfrac{3}{2}r_1 b^3\frac{t'-b}{\cos^2 p}\Big]$$
$$+ Qr_1^2\nu\left[\frac{a^2-b^2}{a^2}\left(\frac{m}{\cos p} - m\cos p\right) + \frac{b^3}{a^2 t'}\frac{\frac{du}{d\cos p}}{\cos^2 p}\right].$$

Endlich ist (18, (8) u. Gl. (1) dieses Art.)

$$z'\frac{\alpha_{11}}{s'^2} = a\cos p\frac{\mu}{E}\cdot\frac{\gamma_{11}}{s'^2}\cdots = -\mu\frac{Q}{E}r_1\frac{(a^2-b^2)\cos^2 p}{t'}.$$

Wir erhalten also mit Rücksicht darauf, daß das von 0 bis π erstreckte Integral einer ungeraden Funktion von $\cos p$ verschwindet und das von 0 bis π erstreckte Integral einer geraden Funktion gleich dem Doppelten des von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ erstreckten Integrals ist (vergl. auch 21, (2))

$$w_2 = -2\frac{Q}{E}r_1^2\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{a^2-b^2}{a^2}\frac{m}{\cos p} + \frac{b^3}{a^2 t'}\frac{\frac{du}{d\cos p}}{\cos^2 p}\right]dp \tag{6}$$
$$-2\frac{Q}{E}r_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\mu\cdot\frac{(a^2-b^2)\cos^2 p}{t'} + \frac{3(a^2-b^2)b^2}{a^2 t'} - \frac{3}{2}\frac{b^3}{a^2}\frac{t'-b}{t'\cos^2 p}\Big]dp.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$w_2 = -2\frac{Q}{E} r_1 [r_1 \nu L + M] + \cdots,$$

wo nun L und M von r_1 und ν unabhängig sind. Nach Voraussetzung (Art. **21**, B) sind die beiden Funktionen m und $\frac{du}{d\cos p}$ an der unteren Integrationsgrenze negativ, an der oberen positiv und wechseln im Integrationsintervall nur einmal das Vorzeichen. Ferner ist (Art. **21**, (2) und (4))

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} m \cos p \, dp = 0 \text{ und } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{d\cos p} dp = 0.$$

Da die Funktion $\frac{1}{\cos^2 p}$ im Integrationsintervall beständig zunimmt, so ist das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 p} \cdot m \cos p \, dp$ positiv. Ist $a > b$, so nimmt im Integrationsintervall die Funktion $\frac{1}{t'} = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2 p + b^2 \sin^2 p}}$ beständig zu, daher ist das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t'\cos^2 p} \cdot \frac{du}{d\cos p} dp$ ebenfalls positiv. Daraus folgt: für $a > b$ ist L positiv. Dies gilt auch noch für $a = b$.

Ist $a < b$, so kann das Vorzeichen von L nicht von vornherein bestimmt werden. Es ist aber leicht zu sehen, daß L für sehr kleine Werte des Quotienten $\frac{a}{b}$ negativ wird. Bezeichnen wir nämlich mit p_1 den Wert von p, für den $\frac{du}{d\cos p} = 0$, so ist das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t'\cos^2 p} \frac{du}{d\cos p} dp = \int_0^{p_1} \frac{1}{t'\cos^2 p} \frac{du}{d\cos p} dp + \int_{p_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t'\cos^2 p} \frac{du}{d\cos p} dp$$

negativ und wächst dem absoluten Wert nach über alle Grenzen, wenn man den Wert von b festhält und a gegen Null konvergieren läßt; das zweite Integral rechts behält einen endlichen positiven Wert. Folglich hat das Integral links für hinreichend kleine Werte von a einen negativen Wert, und dasselbe gilt für L.

Aus der Identität

$$\frac{d}{dp}[\operatorname{tg} p \cdot (t' - b)] = \frac{t' - b}{\cos^2 p} - \frac{(a^2 - b^2)\sin^2 p}{t'}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)\cos^2 p + b^2}{t' \cos^2 p} - \frac{b}{\cos^2 p} - \frac{a^2 - t'^2}{t'}$$

$$= -\frac{b^2}{t'} + t' - \frac{1}{\cos^2 p}\left(b - \frac{b^2}{t'}\right)$$

folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 p}\left(b - \frac{b^2}{t'}\right) dp = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(t' - \frac{b^2}{t'}\right) dp = (a^2 - b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 p\, dp}{t'}.$$

Wir erhalten somit

$$M = (a^2 - b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\mu \frac{\cos^2 p}{t'} + \frac{3b^2}{a^2}\frac{1 - \frac{1}{2}\cos^2 p}{t'}\right] dp.$$

M hat dasselbe Vorzeichen wie $a^2 - b^2$.

Die Größen L und M haben also sowohl in dem Fall, daß $a > b$ als auch in dem Fall, daß $a < b$ und gleichzeitig der Quotient $\frac{a}{b}$ klein ist, dasselbe Vorzeichen.

Nun ergibt die Gleichung $w_2 = 0$ in erster Annäherung $\nu = -\frac{1}{r_1}\frac{M}{L}$, es ist also ν negativ. Demnach ist das Oval, in dem die Meridianebene die Röhre schneidet, auf der Seite der Rotationsachse abgeplattet, auf der entgegengesetzten Seite zugespitzt.

München, im September 1902.

Inhalt.

Zur Theorie der Krümmung nach den Methoden der darstellenden Geometrie.

Von C. HEUMAN in Stockholm.

Die Kenntnis der Krümmungsverhältnisse einer Kurve gibt nicht nur ein tieferes Verständnis für die Form derselben, sondern ist auch für die zeichnerische Darstellung von praktischem Nutzwert. Somit muß auch die darstellende Geometrie die Krümmungstheorie in den Bezirk ihrer Entwicklungen hineinziehen, wie es auch längst in den größeren Lehrbüchern geschehen ist. Die dabei verwendeten Methoden sind von sehr verschiedener Art; meistenteils sind sie aus anderen, wenn auch verwandten Zweigen der geometrischen Wissenschaft — wie der Differentialgeometrie, der Kinematik oder der synthetischen Geometrie — entliehen. Obschon die gewünschten Einzelresultate dadurch vollständig abgeleitet werden können, scheint mir dieses Verfahren nicht ganz befriedigend zu sein, und zwar aus zwei Gründen.

Erstens scheinen diese Methoden dem elementaren Unterricht nicht ganz gut angepaßt werden zu können. Die nötigen Vorkenntnisse aus irgend einer der erwähnten Disziplinen zu entwickeln, ist für den fraglichen Zweck zu umständlich; dieselben vorauszusetzen, paßt auch nicht für die meisten Lehrpläne. Die elementar angelegten Lehrbücher gehen daher meistenteils an diesen Fragen ganz stillschweigend vorüber oder begnügen sich damit, einige besonders brauchbaren Ergebnisse

ohne Ableitung anzuführen, was in einer exakten Wissenschaft stets unerfreulich auffällt.

Zweitens wird nach meiner Meinung die Eigenart der darstellenden Geometrie durch die erwähnten Methoden nicht gebührend berücksichtigt. Die darstellende Geometrie leitet durch ihre fundamentalen Operationen: *Projizieren, Schneiden, Abwickeln,* aus den einfachst definierten Gebilden — seien es Kurven oder Flächen — andere weniger einfache Gebilde der genannten Gattungen ab. Will man dann auch die Krümmungseigenschaften in Betracht ziehen, so scheint die natürliche Fragestellung diese zu sein: *Welche Beziehungen verbinden die Krümmungen zweier Gebilde, die durch irgend eine jener Operationen aus einander abgeleitet sind?* Eine Untersuchung der Krümmung in echt darstellend-geometrischem Sinn muß somit, scheint mir, die Beantwortung dieser Frage in den Vordergrund stellen und sodann aus den aufgestellten allgemeinen Beziehungen die Ergebnisse in Einzelfällen ableiten.

Inwiefern dieser Vorgang mit der Forderung elementarer Hilfsmittel in Einklang gebracht werden kann, lasse ich dahingestellt sein; die folgenden Zeilen wollen allerdings als ein Versuch in dieser Richtung beurteilt werden. Von einer sehr bekannten planimetrischen Formel ausgehend, leite ich zunächst die Krümmungsbeziehungen bei der überaus wichtigen *Orthogonalprojektion* ab (**1.**), und suche dann durch einige Beispiele die Verwendbarkeit der erhaltenen Formeln zu zeigen (**1.**, **2.**). Gelegentlich wird dabei auch die einfache Beziehung bei der *Abwickelung* als ein Folgesatz erhalten (**1.** c.). In der Fortsetzung gehe ich zur Betrachtung allgemeinerer *Projektions*arten über (**3.**); endlich zeige ich (**4.**), wie auch die Frage nach den Krümmungsbeziehungen beim *Schneiden* einer Fläche in besonderen Fällen — nämlich für sämtliche abwickelbaren Flächen — durch denselben Ansatz erledigt werden kann.[1])

1. Den Ausgangspunkt der folgenden Entwickelungen bildet die elementare Formel für den Radius des Umkreises eines Dreiecks:

$$r = \frac{abc}{4\Delta}, \tag{1}$$

wo a, b, c die Seitenlängen, Δ den Flächeninhalt des Dreiecks bezeichnen. Aus dieser kann zunächst die Beziehung zwischen der

1) Mein verehrter, ehemaliger Lehrer, Lektor P. Henriques, als dessen Assistent ich jetzt wirke, hat seit einigen Jahren mehrere der nachstehenden Ableitungen in seine Vorlesungen an der hiesigen technischen Hochschule aufgenommen und sich auch für die vorliegende Publikation derselben gefälligst interessiert, wofür ich ihm hier ergebenst Dank sage.

Krümmung einer Kurve und derjenigen ihrer *orthogonalen Projektion* in entsprechenden Punkten in einfacher Art abgeleitet werden.

Es werde irgend eine Kurve k in die Kurve k_1 der Projektionsebene Π orthogonal projiziert. (Fig. 1.) Drei Punkte P, Q, R der Kurve k projizieren sich in drei Punkte P_1, Q_1, R_1 der Kurve k_1. Betrachten wir den Umkreis des Dreiecks PQR (Seitenlängen a, b, c, Flächeninhalt Δ) sowie denjenigen des Dreiecks $P_1 Q_1 R_1$ (Seitenlängen a_1, b_1, c_1, Flächeninhalt Δ_1), so haben ihre Radien r, r_1 nach (1) das Verhältnis

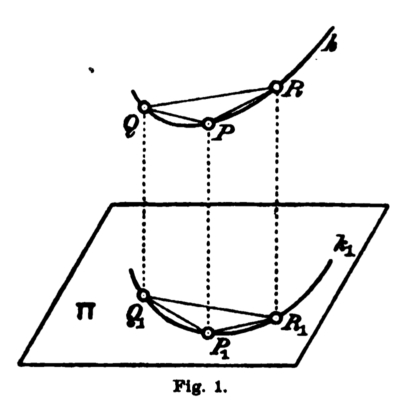


Fig. 1.

$$\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot \frac{c_1}{c} : \frac{\Delta_1}{\Delta}. \tag{2}$$

Lassen wir jetzt die Punkte Q, R sich nach P bis zu unendlicher Nähe hinbewegen, wobei auch die Projektionspunkte Q_1, R_1 nach P_1 fortrücken, so gehen die erwähnten Umkreise in die Krümmungskreise der Kurven k und k_1 über. Zugleich nehmen aber die Strecken QR, RP, PQ alle die Richtung der Kurventangente im Punkte P an, während die Ebene PQR in die Schmiegungsebene übergeht, oder — falls k eben ist — mit der Ebene der Kurve fortwährend zusammenfallend bleibt. Somit ergibt sich zwischen dem Krümmungsradius ϱ einer Kurve k und dem Krümmungsradius ϱ_1 ihrer orthogonalen Projektion in entsprechenden Punkten aus (2) die Beziehung

$$\varrho_1 = \varrho \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\cos \omega}, \tag{I}$$

worin α den Neigungswinkel der Tangente, ω denjenigen der Schmiegungsebene (bezw. Ebene) der Originalkurve im betreffenden Punkte gegen die Projektionsebene bezeichnet.

Von dieser allgemeinen Formel erwähnen wir zuerst einige speziellen Fälle. Ist $\omega = 90^0$, was für eine Kurve doppelter Krümmung bedeutet, daß die Schmiegungsebene senkrecht oder die Binormale parallel zur Projektionsebene steht, so gibt (I) $\varrho_1 = \infty$, d. h. die Projektionskurve hat im entsprechenden Punkte im allgemeinen einen Wendepunkt. Nur wenn auch $\alpha = 90^0$ ist, d. h. wenn die Tangente senkrecht oder die Normalebene parallel zur Bildebene ist, zeigt die Projektionskurve in der Regel einen Rückkehrpunkt vor, indem ϱ_1 wegen der größeren Potenz im Zähler im allgemeinen gleich Null wird.

Besonders hervorzuheben sind aber die Formeln, die aus (I) hervorgehen, wenn entweder die Tangente oder die Hauptnormale der Kurve zur Projektionsebene parallel ist. Wir erhalten so die beiden folgenden Hauptfälle:

α) *Die Tangente der Kurve k ist zur Projektionsebene parallel.* Dabei ist $\alpha = \omega$, und es ergibt sich

$$(\mathrm{I}\alpha) \qquad \varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos \omega},$$

wo ω zugleich die Neigung der Hauptnormale gegen die Projektionsebene angibt.

β) *Die Hauptnormale der Kurve k ist zur Projektionsebene parallel.* Dabei ist $\alpha = \omega$, und es ergibt sich

$$(\mathrm{I}\beta) \qquad \varrho_1 = \varrho \cos^2 \alpha = \varrho \cos^2 \omega.$$

Diese einfachen Relationen sind von häufigem Gebrauch. Als Beispiele greifen wir heraus:

a) Die Scheitelkrümmungsradien einer Ellipse.

Ein Kreis werde in eine Ellipse mit den Halbachsen a, b orthogonal projiziert. Dabei ist $\varrho = a$, $\cos \omega = \frac{b}{a}$. In den Scheitelpunkten der Hauptachse tritt der Fall β) ein, und es wird nach ($\mathrm{I}\beta$) $\varrho_{1a} = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a}$; in den Scheitelpunkten der Nebenachse dagegen liegt der Fall α) vor, und es wird nach ($\mathrm{I}\alpha$) $\varrho_{1b} = a : \frac{b}{a} = \frac{a^2}{b}$. Oder: Eine Ellipse mit den Halbachsen a, b werde in einen Kreis projiziert. Es ist $\varrho_1 = b$, $\cos \omega = \frac{b}{a}$. Bei den Scheitelpunkten der Hauptachse liegt der Fall α) vor, und es wird nach ($\mathrm{I}\alpha$) $\varrho_a = \varrho_1 \cos \omega = \frac{b^2}{a}$; bei denjenigen der Nebenachse hat man dagegen den Fall β), und es wird nach ($\mathrm{I}\beta$) $\varrho_b = \frac{\varrho_1}{\cos^2 \omega} = \frac{a^2}{b}$, wie vorher.

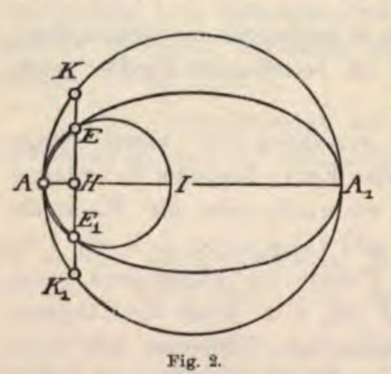


Fig. 2.

[Wegen der Wichtigkeit der fraglichen Größen für praktische Zeichnung mag hier noch eine einfache Ableitung Platz finden, deren Kern allerdings einem anderen Ideenkreise angehört. Im Punkte H der Hauptachse AA_1 und in der Nähe des Scheitelpunktes A errichten wir eine Senkrechte, welche die Ellipse in E, E_1 und den über der Hauptachse als Durchmesser beschriebenen Kreis in K, K_1 schneidet. (Fig. 2.) Der Umkreis des

Dreiecks AEE_1 geht, wenn H nach A fortrückt, in den Krümmungskreis im Scheitel A über. Es ist aber

$$\frac{HI}{HA_1} = \frac{AH \cdot HI}{AH \cdot HA_1} = \frac{HE^2}{HK^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

und

$$\lim_{H=A} HA_1 = 2a; \quad \lim_{H=A} HI = 2\varrho_a;$$

mithin bekommen wir

$$\frac{2\varrho_a}{2a} = \frac{b^2}{a^2} \text{ und } \varrho_a = \frac{b^2}{a},$$

wie zuvor. Ganz analog kann die Ableitung bezüglich der Scheitel der Nebenachse geführt werden.]

b) Der Krümmungsradius der gemeinen Schraubenlinie; die Scheitelkrümmungsradien der Sinuskurve und der Cykloide.

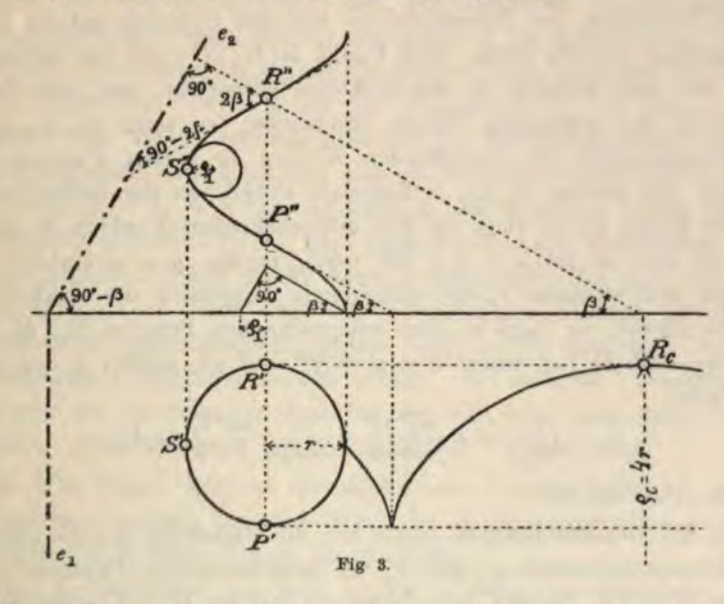


Fig 3.

Eine gemeine Schraubenlinie mit zur Grundrißebene senkrechter Achse sei in Fig. 3 in Grund- und Aufriß abgebildet. Es sei r der Radius des tragenden Kreiscylinders und β der konstante Neigungswinkel der Tangente gegen die Grundrißebene. Die orthogonale Projektion der Kurve auf diese Ebene ist ein Kreis, für den $\varrho_1 = r$; die Hauptnormale ist in jedem Punkte zu der genannten Projektionsebene parallel und $\alpha = \omega = \beta$; somit wird nach (Iβ) der Krümmungsradius der Schraubenlinie in jedem Punkte $\varrho = \frac{r}{\cos^2\beta}$.

Die Aufrißprojektion ist eine Sinuskurve, deren Krümmungsradius im Scheitel S'' leicht bestimmbar ist. Es ist nämlich die Hauptnormale der Schraubenlinie im entsprechenden Punkte auch zur Aufrißebene parallel und der Neigungswinkel der Tangente oder der Schmiegungsebene gegen die Ebene $\alpha = \omega = 90^0 - \beta$. Also wird nach (I β) der gesuchte Radius $\varrho_1 = \varrho \sin^2 \beta$, oder, wenn der soeben ermittelte Wert von ϱ eingesetzt wird, $\varrho_1 = r \operatorname{tg}^2 \beta$; die Konstruktion ist in Fig. 3 eingetragen.

Bei einer Lichtrichtung, die zu der Tangente in einem Punkte $P'P''$ parallel ist, wird bekanntlich der Schlagschatten der Schraubenlinie auf die Grundrißebene eine gemeine (gespitzte) Cykloide, deren Scheitelkrümmungsradius wir noch bestimmen wollen. Zu diesem Zwecke führen wir eine Ebene $\mathsf{E}\,(e_1, e_2)$ ein, die gegen die Lichtrichtung senkrecht steht. Der projizierende Lichtstrahlencylinder schneidet diese Ebene in einer Kurve k_e, die als gemeinsame orthogonale Projektion der Schraubenlinie und der Cykloide auf die Ebene E angesehen werden kann. Der Punkt $R(R', R'')$ auf der Schraubenlinie, der dem Scheitel R_c der Cykloide entspricht, mag sich in den Punkt R_e der genannten Ebene projizieren; es seien ϱ, ϱ_c, ϱ_e die Krümmungsradien der betreffenden Kurven in diesen Punkten. Betrachten wir erstens k_e als orthogonale Projektion der Schraubenlinie auf die Ebene E, so liegt in den entsprechenden Punkten R, R_e der Fall β) vor; es ist $\alpha = \omega = 90^0 - 2\beta$, mithin $\varrho_e = \varrho \cdot \sin^2 2\beta$. Betrachten wir zweitens k_e als orthogonale Projektion der Cykloide auf dieselbe Ebene, so liegt in den entsprechenden Punkten R_c, R_e ebenfalls der Fall β) vor, wobei $\alpha = \omega = 90^0 - \beta$ ist, mithin $\varrho_e = \varrho_c \sin^2 \beta$. Also wird

$$\varrho_c = \frac{\varrho_1}{\sin^2 \beta} = \varrho \cdot \frac{\sin^2 2\beta}{\sin^2 \beta} = \frac{r}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\sin^2 2\beta}{\sin^2 \beta} = 4r,$$

was zu ermitteln war.

c) Als weiteres Beispiel leiten wir die Beziehung ab, die zwischen den Krümmungsradien ϱ und ϱ_0 in entsprechenden Punkten zweier Kurven k und k_0 besteht, von denen die letztere eine Verwandelte der ersteren ist, d. h. durch *Abwickelung* einer die Kurve k tragenden abwickelbaren Fläche in eine Ebene aus dieser entstanden ist.

Es seien (Fig. 4) CD und DE zwei auf einander folgende Elemente der Kurve k, Γ und Δ diejenigen Berührungsebenen der Fläche, die diese Elemente bezw. enthalten, und d die Schnittlinie der gegenannten Ebenen oder die durch D gehende Erzeugende der Fläche. Bei der Abwickelung rotiert die Ebene Δ um die Gerade d, bis der in Δ enthaltene Elementarstreifen der Fläche in die Ebene Γ gelangt

t. Dabei gelangt der Punkt E in eine neue Lage E_0, die wegen ɪr Kleinheit des Drehungswinkels mit der orthogonalen Projektion ɪs Punktes E auf die Ebene Γ als zusammenfallend betrachtet werden ɪnn. Es ist also die Figur CDE_0 mit der Figur zweier auf einander lgenden Elemente der Kurve k_0 kongruent und zugleich als die orthoɪnale Projektion der entsprechenɪn Elemente der Kurve k auf die bene Γ zu betrachten; da das eine Element in der Projektionsebene selbst ɪlegen ist, liegt der Fall α) vor, und ir bekommen sogleich nach (Iα)

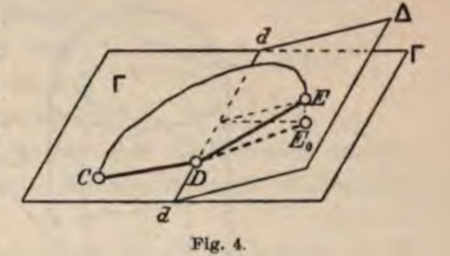


Fig. 4.

I) $$\varrho_0 = \frac{\varrho}{\cos \omega}.$$

ier ist ω der Neigungswinkel ɪischen der Berührungsebene der abwickelbaren Fläche und der ɪhmiegungsebene (bezw. Ebene) der Kurve k im betreffenden Punkte.

Unter den Anwendungen dieser Formel sind besonders die folgenɪn zu bemerken, die sich auf die Einzelwerte $\omega = 0$ und $\omega = 90^0$ ɪziehen. Für eine *Tangentenfläche* ist die Berührungsebene zugleich ɪhmiegungsebene der *Gratlinie*, also ist für jeden Punkt dieser Kurve $= 0$ und $\varrho_0 = \varrho$, d. h. die Krümmung der Gratlinie bleibt bei der bwickelung unverändert. — Die Verwandelte einer *geodätischen Linie* uß als Gerade in jedem Punkt einen Krümmungsradius $\varrho_0 = \infty$ haben, ithin gibt (II) $\omega = 90^0$, was für abwickelbare Flächen die Hauptgenschaft der Geodätischen beweist, daß die Hauptnormale mit der lächennormale beständig zusammenfällt. Bei anderen Flächenkurven, o dieses nur in einzelnen Punkten der Fall sein kann, geben solche unkte zu Wendepunkten der Verwandelten Veranlassung.

2. Wir kehren jetzt zu der allgemeinen Formel (I) zurück, welche ir benutzen wollen, um den Wert des Krümmungsradius in einem ɪliebigen Punkt einer Ellipse zu ermitteln.

Ein Kreiscylinder mit dem Radius b stehe mit lotrechter Achse ɪf der Grundrißebene Π und werde von einer Ebene E geschnitten, e mit Π einen Winkel ω bildet. Die Schnittkurve ist eine Ellipse, ɪren Halbachsen $a = \frac{b}{\cos \omega}$ und b sind. Wir knüpfen an den beɪnnten Dandelinschen Satz an, nach welchem zwei in den Kreisɪlinder einbeschriebene Kugeln die Schnittebene E in den Brennɪnkten der Ellipse, F_1 und F_2 berühren. (Fig. 5.) Es sei P ein ɪliebiger Punkt der Ellipse und t die Tangente dieser Kurve, sowie die Mantellinie des Cylinders in demselben Punkte. Die Tangente t

ist die Schnittlinie zwischen der Ebene E und der Berührungsebene B des Cylinders längs m; diese Ebene B berührt auch die beiden Kugeln in den Punkten K_1 und K_2 bezw. Wenn aber zwei Berührungsebenen einer Kugel — wie hier E und B — gegeben sind, so müssen die zwei Geraden, die von irgend einem Punkte der Schnittlinie nach den Berührungspunkten gezogen werden können, mit dieser Schnittlinie denselben Winkel einschließen. Hier bilden demnach die Mantellinie PK_1 und der Leitstrahl PF_1 mit der Tangente t denselben Winkel; ebenso die Geraden PK_2 und PF_2.[1]) Bezeichnen wir mit φ den halben Winkel der Leitstrahlen oder den Winkel der Ellipsennormale mit jedem der Leitstrahlen, so ist daher der Winkel zwischen t und m gleich $90^0 - \varphi$, und folglich der Neigungswinkel α der Tangente mit der Projektionsebene Π gleich φ. Der Krümmungsradius ϱ der Ellipse im Punkte P kann also nach (I) durch die Gleichung bestimmt werden $b = \varrho \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{\cos \omega}$, oder weil $\cos \omega = \frac{b^2}{a}$,

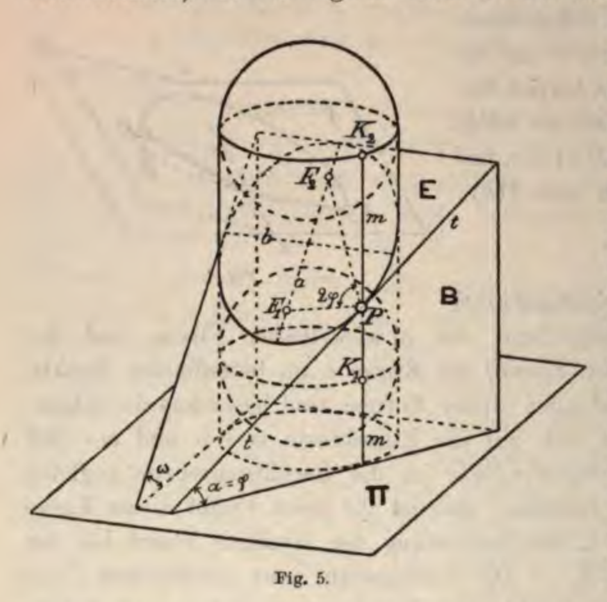


Fig. 5.

$$\varrho \cos^3 \varphi = \frac{b^2}{a}. \tag{3}$$

Das links stehende Produkt ist mithin für alle Punkte derselben Ellipse konstant und gleich dem Krümmungsradius im Scheitel der Hauptachse oder gleich der Ordinate im Brennpunkte.

Nachdem diese Beziehung gefunden ist, kann die ganze Reihe bekannter Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes durch einfache planimetrische Betrachtungen begründet werden. Die unmittelbare Konstruktion der Formel (3) nach Fig. 6 — wo PK die Normale ist, $PM = \frac{b^2}{a}$, $MN_a \perp PF_1$, $N_aR \perp PK$, $RK \perp PF_1$, K der gesuchte

1) Da K_1PK_2 eine Gerade ist, so folgt beiläufig die bekannte Eigenschaft der Tangente, daß sie mit den Leitstrahlen PF_1, PF_2 denselben Winkel einschließt

Krümmungsmittelpunkt — wird durch die Beobachtung vereinfacht, daß der Punkt N_a auf der Hauptachse liegt[1]); es können demnach das Absetzen der Strecke PM und das Ziehen der Geraden MN_a unterdrückt werden.

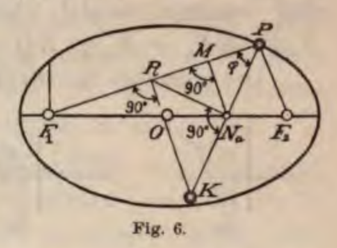


Fig. 6.

Übrigens beschränken wir uns hier auf die Herleitung eines Satzes, der eine Menge der fraglichen Konstruktionen — und zwar die einfachsten — in sich faßt und der so ausgesprochen werden kann: *Die von den Achsen begrenzten Abschnitte der Tangente und der Normale werden, jener vom Kurvenpunkt, dieser vom Krümmungsmittelpunkt in demselben Verhältnisse geteilt.*

Es seien wieder P (Fig. 7) ein beliebiger Punkt der Ellipse, F_1, F_2 die beiden Brennpunkte. Die Halbierende des Winkels F_1PF_2 ist die Normale n, welche die Hauptachse F_1F_2 im Punkte N_a schneidet und mit jedem der Leitstrahlen den Winkel φ bildet. Die gegen n senkrechte Gerade durch P ist die Tangente t, welche die Hauptachse im Punkte T_a schneidet. Wir zeichnen noch den Umkreis des Dreiecks F_1PF_2; dieser Kreis wird von den Geraden t, n in zwei Punkten T_b, N_b bezw. geschnitten, welche die Endpunkte eines Durchmessers bilden. Wegen der Bogengleichheit $F_1N_b = N_bF_2$ muß jener Durchmesser senkrecht zur Geraden F_1F_2 stehen und fällt daher mit der (verlängerten) Nebenachse der Ellipse zusammen. — Durch die Geraden $N_aR \perp PN_a$ und $RK \perp PR$ wird der Krümmungsmittelpunkt K wie früher auf der Normale bestimmt. Verlängern wir jetzt N_aR, bis sie F_2F_b in Q schneidet, so ist die Figur $N_aN_bF_2Q$ wegen

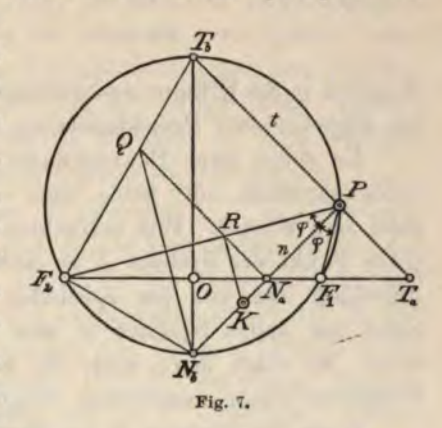


Fig. 7.

1) In einem beliebigen Dreieck ist die Projektion einer Winkelhalbierenden auf eine von demselben Eckpunkt ausgehende Seite $=\frac{s^2-l^2}{2s}$, wo l die Länge der Gegenseite, s die Summe der umfassenden Seiten des halbierten Winkels bezeichnet. Mit $l = F_1F_2 = 2\sqrt{a^2-b^2}$, $s = F_2P + PF_2 = 2a$ wird demnach die Projektion der Halbierenden des Winkels F_1PF_2 auf $PF_1 = \frac{b^2}{a}$, woraus die Behauptung folgt.

der rechten Winkel bei N_a und F_2 ein Kreisviereck, also $\sphericalangle N_a Q N_b = \sphericalangle N_a F_2 N_b = \sphericalangle F_1 P N_b = \varphi = \sphericalangle N_a R K$. Die Geraden $N_b Q$ und RK sind demnach parallel, ebenso die Geraden $N_a Q$ und $T_a T_b$; also folgt $N_a K : K N_b = N_a R : R Q = T_a P : P T_b$, was zu beweisen war.

Die einfachen Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes, welche die Figuren 8—13 mit genügender Deutlichkeit wiedergeben, können alle fast unmittelbar auf diesen Satz zurückgeführt werden.[1])

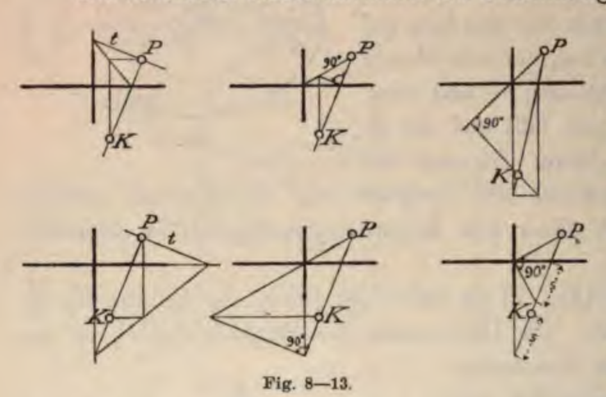


Fig. 8—13.

3. Indem wir jetzt die Orthogonalprojektion verlassen, suchen wir durch dieselbe Methode wie in **1.** einen Einblick in die Krümmungsbeziehungen zwischen entsprechenden Kurven bei allgemeineren Projektionsarten zu erhalten.

Es seien zwei Punktsysteme Σ und Σ_1 gegeben, die entweder beide räumlich oder beide eben oder das erste räumlich, das zweite eben sein können. Wir betrachten irgend eine Transformation, welche jeden Punkt des Systems Σ in einen bestimmten Punkt des Systems Σ_1 überführt und von der speziellen Art ist, daß jede gerade Punktreihe des ersten Systems in eine ebensolche des zweiten übergeführt wird. Es folgt dann auch für räumliche Systeme, daß jedes ebene Punktfeld einem ebensolchen entspricht.

Wenn im Systeme Σ die Gerade g den Punkt P enthält, so muß auch in Σ_1 die entsprechende Gerade g_1 den entsprechenden Punkt P_1 enthalten. Unter dem Linienelement (P, g) verstehen wir dann eine kleine Strecke, die von P ausgeht und von g getragen wird, deren Länge aber übrigens nach Willkür angenommen werden kann. Das

1) Die Konstruktionen stammen von Mannheim, Pelz und Geisenheimer her. Bezüglich der Beweise bemerken wir, daß in den Mittelfiguren die mit der Tangente parallelen Geraden bis zum Schnitt mit der zweiten Achse zu verlängern sind; in den Abbildungen rechts findet man leicht ein mit $O T_a P T_b$ (Fig. 7) ähnliches Punktgebilde wieder. — Die Konstruktionen werden gewöhnlich aus dem Steinerschen Satze gefolgert, daß eine Parabel, welche dem von Tangente, Normale und Achsen gebildeten Viereck einbeschrieben ist, die Normale im Krümmungsmittelpunkt berührt. Von diesem Satz kommt man auch sogleich zu dem oben bewiesenen Satz, der aber einfacher und für den Zweck genügend ist.

entsprechende Gebilde in Σ_1 ist das Linienelement (P_1, g_1), dessen Länge von derjenigen der ersten Strecke abhängig ist. Das Verhältnis zwischen der Länge der Bildstrecke und derjenigen der erst angenommenen Strecke nähert sich, wenn wir diese unbegrenzt verkleinern, einem bestimmten Grenzwert λ, welchen wir den zu dem Linienelement (P, g) gehörigen *Längenänderungskoeffizienten* nennen.

Wenn eine Ebene E den Punkt P in Σ enthält, so muß ebenso auch die entsprechende Ebene E_1 den entsprechenden Punkt P_1 in Σ_1 enthalten. Ist irgend eines der Systeme eben, so kommt als E, bezw. E_1, natürlich nur die Ebene des betreffenden Systems in Betracht. Unter dem Flächenelement (P, E) verstehen wir dann eine kleine ebene Fläche, deren begrenzende Kontur in der Ebene E enthalten ist und den Punkt P einschließt oder durch denselben geht, aber übrigens nach Willkür angenommen werden kann. Das entsprechende Gebilde in Σ_1 ist das Flächenelement (P_1, E_1), das von der entsprechenden Kontur in E_1 begrenzt wird. Wenn wir jetzt die erste Kontur unbegrenzt verengern, so nähert sich das Verhältnis zwischen den Inhalten der in die Elemente (P_1, E_1) und (P, E) eingehenden Flächen einem bestimmten Grenzwert η, welchen wir den zu dem Flächenelement (P, E) gehörigen *Flächenänderungskoeffizienten* nennen.

Es sei jetzt k irgend eine Kurve im Systeme Σ, P ein beliebiger Punkt derselben, t die Tangente und E die Schmiegungsebene der Kurve in diesem Punkt, sowie k_1, P_1, t_1, E_1 die entsprechenden Gebilde im Systeme Σ_1. Indem wir zwei benachbarte Punkte Q, R auf der Kurve k annehmen und den Umkreis des Dreiecks PQR, sowie denjenigen des entsprechenden Dreiecks $P_1 Q_1 R_1$ betrachten, können wir offenbar denselben Grenzübergang wie in 1. vollführen. Wenn wir mit ϱ, ϱ_1 die Krümmungsradien der Kurven k, bezw. k_1 in den Punkten P, bezw. P_1 bezeichnen, so leuchtet ein, daß wir durch das genannte Verfahren zu der Beziehung

$$\text{(III)} \qquad \varrho_1 = \varrho \cdot \frac{\lambda^3}{\eta}$$

geführt werden, wo λ den zum Linienelement (P, t) gehörigen Längenänderungskoeffizienten, η den zum Flächenelement (P, E) gehörigen Flächenänderungskoeffizienten bezeichnet. Die Krümmungsänderung ist also von den Gesetzen für die Längen- und Flächenänderungen in einfacher Art abhängig.

Dieser allgemeine Ansatz ist, bei der oben gemachten Beschränkung, für die Reliefperspektive, die Zentralprojektion und die Parallelprojektion sowie für die allgemeineren kollinearen oder affinen Verwandtschaften

zwischen räumlichen oder ebenen Systemen verwertbar. Wir führen ihn hier für einige spezielle Fälle weiter aus.

Bei allgemeiner (schiefer) *Parallelprojektion* ist die Längenänderung für ein Linienelement (P, g) nur von der tragenden Geraden g, nicht von der speziellen Lage des Punktes P in derselben abhängig. Wenn γ und γ_1 die Winkel der entsprechenden Geraden g und g_1 mit der Richtung der Projektionsstrahlen bezw. bezeichnen, so ist nach Fig. 14 $P_1 Q_1 \sin\gamma_1 = PQ \sin\gamma$, und der Längenänderungskoeffizient für das Linienelement (P, g) demnach

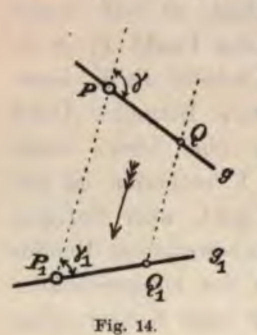


Fig. 14.

$$\lambda = \frac{P_1 Q_1}{PQ} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_1}. \tag{4}$$

— Ebenso ist die Flächenänderung für alle Punkte derselben Ebene konstant. Zwei entsprechende Flächenelemente (P, E), (P_1, E_1) haben auf eine gegen die Richtung der Projektionsstrahlen senkrechte Ebene dieselbe orthogonale Projektion, d. h. es ist $A \sin\varepsilon = A_1 \sin\varepsilon_1$, wenn wir mit ε, ε_1 die Winkel der Ebenen E, bezw. E_1 gegen die Projektionsrichtung und mit A, A_1 die Inhalte der Flächenelemente bezeichnen. Der zu dem Flächenelement (P, E) gehörige Flächenänderungskoeffizient wird demnach

$$\eta = \frac{A_1}{A} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon_1}. \tag{5}$$

Die Formel (III) gibt dann nach (4) und (5)

$$\varrho_1 = \varrho \cdot \frac{\sin^3\gamma}{\sin^3\gamma_1} \cdot \frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\varepsilon}$$

oder

$$\frac{\varrho_1 \sin^3\gamma_1}{\sin\varepsilon_1} = \frac{\varrho \sin^3\gamma}{\sin\varepsilon}. \tag{IV}$$

Von dieser Formel ist (I) in **1.** ein spezieller Fall, der für $\gamma_1 = \varepsilon_1 = 90^0$ eintritt, weil dann $\gamma = 90^0 - \alpha$, $\varepsilon = 90^0 - \omega$ wird.[1])

Bei *Zentralprojektion* ist sowohl die Längen- wie die Flächenänderung nicht nur von der tragenden Geraden, bezw. Ebene, sondern auch von der speziellen Lage des Punktes abhängig. Es seien O das Projektionszentrum, (P, g) und (P_1, g_1) zwei entsprechende Linien-

---

1) Andererseits kann — wie wir in 1. b) bei einem speziellen Beispiele gezeigt haben — das fragliche Problem bei der schiefen Projektion, durch Einschieben einer gegen die Projektionsrichtung senkrechten Ebene, in jedem vorliegenden Fall mit der für die Orthogonalprojektion aufgestellten Formel (I) erledigt werden.

elemente und γ, γ_1 die Winkel der Geraden g, bezw. g_1, mit dem Projektionsstrahle $O P P_1$ (Fig. 15). Durch einen benachbarten Strahl $O Q Q_1$, der mit dem ersten den kleinen Winkel α einschließt, wird ein zweites Paar entsprechender Punkte Q, Q_1 bestimmt. Weil

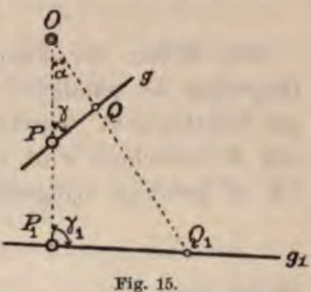


Fig. 15.

$$P_1 Q_1 : O P_1 = \sin \alpha : \sin (\gamma_1 + \alpha),$$
$$P Q : O P = \sin \alpha : \sin (\gamma + \alpha),$$

so folgt

$$\frac{P_1 Q_1}{P Q} = \frac{O P_1}{O P} \cdot \frac{\sin (\gamma + \alpha)}{\sin (\gamma_1 + \alpha)}.$$

Wenn α gegen Null konvergiert, geht das links stehende Verhältnis in den zum Linienelemente (P, g) gehörigen Längenänderungskoeffizienten über, der also den Wert

$$\lambda = \frac{O P_1}{O P} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_1} \tag{6}$$

bekommt.

Um jetzt auch das Gesetz für die Flächenänderung abzuleiten, betrachten wir zwei entsprechende Flächenelemente (P, E), (P_1, E_1). Es sei s (Fig. 16) die Schnittlinie der beiden Ebenen E und E_1, Δ die durch O gelegte gegen s senkrechte Ebene, welche E und E_1 in den Geraden d, bezw. d_1 schneide. In der Ebene Δ ziehen wir die durch O gehenden, mit d_1 und d parallelen Geraden, welche E, E_1 in den Punkten V, bezw. V' schneiden. Als Grundfigur in der Ebene E nehmen wir ein kleines Rechteck an, dessen Seiten zu s parallel und senkrecht sind. Die entsprechende Figur in E_1 ist ein Paralleltrapez, in welchem zwei Seiten mit s parallel sind, während die anderen zwei nach dem Punkte V' gerichtet sind. Wegen der kleinen Dimensionen kann das Trapez hinsichtlich der Inhaltsberechnung als Parallelogramm betrachtet werden. Der gesuchte Flächenänderungskoeffizient η ist dann als Produkt zweier Längenänderungskoeffizienten λ' und λ'' gebildet, von denen λ' die Änderung der mit s parallelen Grundseite, λ'' diejenige der gegen s senkrechten Höhendimensionen angibt. Weil die

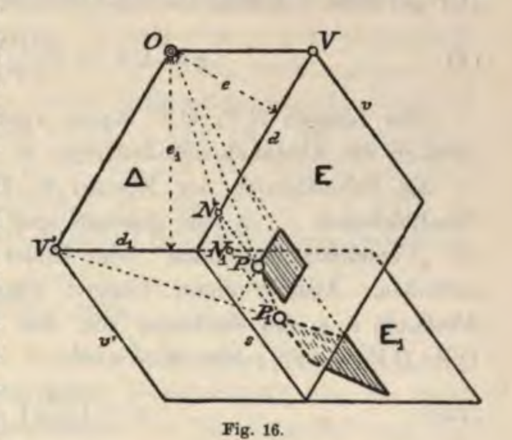


Fig. 16.

beiden Grundseiten in E und E_1 parallel sind, ist sogleich nach (6) $(\gamma = \gamma_1)$

$$\lambda' = \frac{OP_1}{OP}.$$

— Die Höhen der Figuren sind die Abschnitte, welche durch Verlängerung der parallelen Seiten auf d und d_1 bestimmt werden; wenn der Schnittpunkt zwischen d und der durch P gehenden Grundseite mit N bezeichnet wird, so ist demnach λ'' der zu dem Linienelemente (N, d) gehörige Längenänderungskoeffizient. Also folgt nach (6)

$$\lambda'' = \frac{ON_1}{ON} \cdot \frac{\sin ONV}{\sin ON_1 V'}.$$

Es ist aber

$$\frac{\sin ONV}{\sin ON_1 V'} = \frac{V'N_1}{OV'} = \frac{V'N_1}{OV} \cdot \frac{OV}{OV'} = \frac{ON_1}{ON} \cdot \frac{OV}{OV'},$$

mithin

$$\lambda'' = \left(\frac{ON_1}{ON}\right)^2 \cdot \frac{OV}{OV'},$$

oder weil $ON_1 : ON = OP_1 : OP$,

$$\lambda'' = \left(\frac{OP_1}{OP}\right)^2 \cdot \frac{OV}{OV'}.$$

Der gesuchte Flächenänderungskoeffizient wird demnach

$$\eta = \lambda' \lambda'' = \left(\frac{OP_1}{OP}\right)^3 \cdot \frac{OV}{OV'}. \tag{7}$$

Die Längen OV, OV' haben eine einfache Bedeutung; sie sind nämlich die Abstände des Zentrums O von den Geraden v, v', welche — als Schnittlinien der Ebenen E, E_1 mit den durch O gelegten Parallelebenen — in dem gegenseitigen Entsprechen der beiden Ebenen als „Verschwindungslinien" oder Bilder der unendlich fernen Geraden auftreten. Anstatt dieser Längen können wir auch die senkrechten Abstände e, e_1 des Zentrums von den Ebenen E, E_1 einführen, weil $OV : OV' = e : e_1$; also wird auch

$$\eta = \left(\frac{OP_1}{OP}\right)^3 \cdot \frac{e}{e_1}. \tag{7a}$$

Werden die gefundenen Werte von λ und η nach (6) und (7a) in die Formel (III) eingesetzt, so heben sich die Kuben des Verhältnisses $OP_1 : OP$ gegenseitig auf, und es ergibt sich

$$\varrho_1 = \varrho \cdot \frac{\sin^3 \gamma}{\sin^3 \gamma_1} \cdot \frac{e}{e_1},$$

was wir so schreiben:

$$\frac{\varrho_1 \sin^3 \gamma_1}{e_1} = \frac{\varrho \sin^3 \gamma}{e}. \tag{V}$$

In dieser Formel bezeichnet nach obigem γ den Winkel zwischen Projektionsstrahl und Kurventangente, e den senkrechten Abstand des Projektionszentrums von der Schmiegungsebene (bezw. Ebene) der Kurve k. Zufolge ihrer Ableitung ist die Formel gültig für die Abbildung eines räumlichen Systems im Raume durch Reliefperspektive oder für die Abbildung eines räumlichen Systems auf eine Ebene durch Zentralprojektion, oder endlich für die ebenfalls durch Zentralprojektion vermittelte Abbildung eines ebenen Systems auf eine Ebene, die mit derjenigen des Originalsystems nicht zusammenfällt.[1])

Ein besonders einfaches Beispiel für die Anwendung der Formel (V) bieten die Kurven auf einem Umdrehungskegel, da der Kreisschnitt als Zentralprojektion einer jeden solchen Kurve für die Kegelspitze als Zentrum betrachtet werden kann. Ist μ der konstante Winkel zwischen der Mantellinie und der Achse des Kegels, so hat der im Abstand h von der Spitze geführte Kreisschnitt den Radius $r = h \operatorname{tg} \mu$. Es ist dann $\varrho_1 = r$, $\gamma_1 = 90^0$, $e_1 = h$; also folgt für jede Kegelkurve

$$\frac{\varrho \sin^3 \gamma}{e} = \frac{r}{h} = \operatorname{tg} \mu, \tag{8}$$

wo γ den Winkel zwischen Mantellinie und Kurventangente, e den senkrechten Abstand der Spitze von der Schmiegungsebene (bezw. Ebene) bedeutet. Für die ebenen Schnitte des Umdrehungskegels ziehen wir noch den Dandelinschen Satz herbei, nach welchem die Brennpunkte des Kegelschnittes durch berührende Kugeln bestimmt werden können. Wir finden dann sofort — und zwar durch dieselben Schlüsse wie für den Zylinder in 2. — daß der Winkel zwischen Tangente und Leitstrahl auch gleich γ ist. Es ist also $\gamma = 90^0 - \varphi$, wenn φ wieder den halben Winkel zwischen den Leitstrahlen bezeichnet, und wir bekommen aus (8)

$$\varrho \cos^3 \varphi = e \operatorname{tg} \mu.$$

Das links stehende Produkt ist somit wie für die Ellipse auch für jeden Kegelschnitt konstant; aus dieser Beziehung können die Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes für die Hyperbel und die Parabel in analoger Art abgeleitet werden, wovon wir jedoch hier abstehen.

Wir wollen noch die Verhältnisse bei der geodätischen Linie desselben Kegels kurz erwähnen. Es sei P ein beliebiger Punkt dieser

---

1) Bei der zentrischen Kollineation zwischen zwei in *derselben* Ebene vereinigten Systemen bleibt die Formel noch gültig, wenn e, e_1 gegen die oben definierten Längen OV, OV' vertauscht werden, welche in diesem Falle noch ihre Bedeutung behalten.

Kurve; m die Länge der Mantellinie von der Spitze O bis P. Die Schmiegungsebene E der Kurve steht senkrecht zur Berührungsebene des Kegels; die von O auf E gefällte Senkrechte muß daher ihren Fußpunkt auf der Tangente haben. Dann wird aber, wie die Abwickelung sogleich zeigt, der Abstand e der Spitze von der Schmiegungsebene $= m \sin \gamma$ und für jeden Punkt konstant, nämlich gleich der Länge, die in der Abwickelung den Abstand der Spitze von der als Verwandelte auftretenden Geraden mißt. Bisher gelten die Entwickelungen für jede Kegelfläche. Für den Umdrehungskegel gibt (8)

$$\varrho = \frac{\operatorname{tg} \mu}{e^2} \cdot m^3,$$

d. h. ϱ variiert proportional dem Kubus der Mantellinienlänge, da die übrigen Größen konstant sind. In dem Scheitel wird $m = e$ und $\varrho = m \operatorname{tg} \mu$.

4. In den Formeln (IV) und (V) des vorigen Paragraphen sind zwei flächentheoretische Sätze enthalten, die wir noch besonders hervorheben wollen. Dieselben erledigen nämlich für einige wichtige Flächenfamilien die Frage, wie die Eigenschaften der Fläche die Krümmung der Kurven beeinflussen, die auf ihr durch *Schneiden* mit anderen Flächen bestimmt werden können.

Um die Sätze einfacher aussprechen zu können, führen wir die folgenden Benennungen ein. Unter dem *Krümmungsmodul* in einem Punkt P einer Kurve *bezüglich einer festen Richtung* verstehen wir die Größe $\frac{\varrho \sin^3 \gamma}{\sin \varepsilon}$, wo ϱ der Krümmungsradius der Kurve in P ist, während γ den Winkel der Kurventangente, ε denjenigen der Schmiegungsebene (bezw. Ebene) der Kurve mit der festen Richtung bezeichnen. — Unter dem *Krümmungsmodul* in einem Punkt P einer Kurve *bezüglich eines festen Punktes* O verstehen wir die Größe $\frac{\varrho \sin^3 \gamma}{e}$, wo ϱ wieder der Krümmungsradius der Kurve ist, während γ den Winkel zwischen der Kurventangente und dem Strahl OP, e den senkrechten Abstand des Punktes O von der Schmiegungsebene (bezw. Ebene) der Kurve bezeichnen.

Nach den Formeln (IV) und (V) gelten dann die folgenden Sätze:

Der Krümmungsmodul in den verschiedenen Punkten einer Kurve bezüglich einer festen Richtung wird durch Parallelprojektion in dieser Richtung nicht verändert.

Der Krümmungsmodul in den verschiedenen Punkten einer Kurve bezüglich eines festen Punktes wird durch Zentralprojektion von diesem Punkte aus nicht verändert.

Weil aber dabei die projizierenden Strahlen allgemeine Zylinder-, bezw. Kegelflächen erzeugen, bekommen wir die folgenden Sätze:

Bei einer beliebigen Cylinderfläche haben die Krümmungsmoduln bezüglich der Richtung der Erzeugenden in Punkten derselben Mantellinie für alle auf der Fläche liegenden Kurven stets denselben Wert $\varkappa$.

Bei einer beliebigen Kegelfläche haben die Krümmungsmoduln bezüglich der Spitze des Kegels in Punkten derselben Mantellinie für alle auf der Fläche liegenden Kurven stets denselben Wert $\varkappa$.

Wir betrachten auch eine abwickelbare Fläche allgemeiner Art. die von den Tangenten einer Kurve doppelter Krümmung erzeugt wird. Es sei g diese Kurve oder die Gratlinie der Fläche, O ein beliebiger Punkt auf g und t die Tangente daselbst, die eine Erzeugende der Fläche ist. Wir nehmen O als Spitze eines „Richtungskegels", dessen Mantellinien zu den einzelnen Erzeugenden der Fläche bezw. parallel sind. Der Kegel und die Fläche haben die Erzeugende t gemein; die beiden Elementarstreifen der Fläche, welche an t anstoßen, können auch als dem Kegel zugehörig betrachtet werden, weil die entsprechenden Elementarstreifen des Kegels mit jenen kongruent sind und einen Winkel einschließen, der auch gegen den Winkel der Erzeugenden un endlich klein ist. Mithin oskulieren sich die Flächen längs der Geraden t, d. h. eine beliebige Ebene schneidet aus den beiden Flächen zwei Kurven aus, die in dem auf t liegenden gemeinschaftlichen Punkt dieselbe Krümmung aufweisen.[1]) Es muß dann auch der Satz gelten:

Bei einer allgemeinen abwickelbaren Fläche haben die Krümmungsmoduln bezüglich eines Punktes O der Gratlinie in Punkten der durch O gehenden Erzeugenden für alle auf der Fläche liegenden Kurven stets denselben Wert $\varkappa$.

In diesem Sinne gelten also die Gleichungen:

(VI) für Cylinderflächen $\qquad \frac{\varrho \sin^3 \gamma}{\sin \varepsilon} = \varkappa,$

(VII) für die übrigen abwickelbaren Flächen $\qquad \frac{\varrho \sin^3 \gamma}{e} = \varkappa.$

---

1) Man könnte auch die abwickelbare Fläche mit einem anderen Kegel vergleichen, demjenigen nämlich, welcher aus O die Gratlinie projiziert, d. h. den Punkt O als Spitze hat und die Kurve g enthält. Dieser Kegel hat freilich mit der Fläche die Berührungsebene längs t gemein, welche die Schmiegungsebene der Gratlinie in O ist; entsprechende Elementarstreifen sind aber nicht kongruent, und die Flächen oskulieren sich auch nicht. Vielmehr haben zwei Kurven, die von derselben Ebene aus dem Kegel und aus der Fläche ausgeschnitten werden, in dem gemeinsamen Punkt auf t Krümmungsradien, die sich wie 3 : 4 verhalten (Siehe die nachstehende Mitteilung: *Über einige Krümmungseigenschaften* etc.)

Den Wert $\varkappa$ wollen wir in den verschiedenen Fällen den *Krümmungsmodul der Fläche* längs der betreffenden Mantellinie nennen. Derselbe ist vollständig bestimmt, wenn man in irgend einem Punkte P auf der Mantellinie die Krümmung einer auf der Fläche liegenden, durch diesen Punkt gehenden Kurve kennt. Es liegt am nächsten, den Hauptschnitt in P zu betrachten, d. h. diejenige Kurve, die von einer durch P gelegten, zur Mantellinie senkrechten Ebene ausgeschnitten wird. Wir bezeichnen mit R den Krümmungsradius dieser Kurve in P. Bei einer Cylinderfläche wird dann schlechthin $\varkappa = R$, bei den übrigen Flächen $\varkappa = \frac{R}{m}$, wenn m die Länge der Mantellinie von P bis zur Spitze des Kegels, bezw. zu dem Berührungspunkte auf der Gratlinie bezeichnet. Bei besonderen Flächen kann es einfacher sein, andere Schnitte zu betrachten, z. B. bei dem Umdrehungskegel den Kreisschnitt, wobei man — wie in (8) 3. — findet, daß $\varkappa$ für die ganze Fläche *konstant* ist, und zwar $\varkappa = \operatorname{tg} \mu$, wenn μ den Winkel zwischen Mantellinie und Achse bezeichnet. Dieselbe Eigenschaft muß auch denjenigen abwickelbaren Flächen zukommen, deren Richtungskegel Umdrehungskegel sind; es sind diese die abwickelbaren Schraubenflächen, deren Gratlinien beliebige Schraubenlinien, d. h. geodätische Linien auf beliebigen Cylinderflächen sind. Bei diesen Flächen bekommt dann $\varkappa$ in jedem Punkte denselben Wert $\cot\beta$, wo β der Winkel zwischen den Erzeugenden der Fläche und der Hauptschnittebene der zugehörigen Cylinderfläche ist.

Die Krümmungseigenschaften einer abwickelbaren Fläche sind als bekannt anzusehen, wenn der Wert des Krümmungsmoduls für jede Mantellinie gegeben ist. Dieses vorausgesetzt, wird die Krümmung einer Flächenkurve in irgend einem Punkte von der Richtung der Tangente und der Schmiegungsebene bestimmt. Um die Verhältnisse besser zu übersehen, können wir die Ausdrücke für den Krümmungsmodul in eine andere Form bringen.

Die Lage der Schmiegungsebene E einer durch den Punkt P gehenden Flächenkurve k in diesem Punkte kann durch zwei Winkel bestimmt werden, und zwar 1) den Winkel γ zwischen der Kurventangente und der durch P gehenden Erzeugenden, 2) den Winkel ν zwischen E und der Flächennormale in P, oder zwischen E und der Ebene desjenigen Normalschnitts, der mit k gemeinschaftliche Tangente hat. Ist O die Spitze des Kegels, bezw. der Berührungspunkt der Erzeugenden mit der Gratlinie, und bezeichnen wir wieder mit m die Länge der Mantellinie OP, so hat OP auf diejenige Richtung, die in der Berührungsebene der Fläche senkrecht zur Kurventangente steht,

die Projektion $m \sin \gamma$, also auf die zur Schmiegungsebene senkrechte Richtung die Projektion $m \sin \gamma \cos \nu$, was also gleich e ist. Bei einer Cylinderfläche ist $\sin \varepsilon$ die Projektion einer auf der Mantellinie abgetragenen Einheitsstrecke auf die zur Schmiegungsebene senkrechte Richtung, was für $m = 1$ aus dem vorigen Ausdruck fließt, also $\sin \varepsilon = \sin \gamma \cos \nu$. Infolgedessen erhalten wir aus (VI) und (VII)

(VIa) für Cylinderflächen $\dfrac{\varrho \sin^2 \gamma}{\cos \nu} = R$,

(VIIa) für übrige abwickelbare Flächen $\dfrac{\varrho \sin^2 \gamma}{m \cos \nu} = R$.

Aus diesen Formeln ziehen wir unmittelbar folgende Schlüsse:

1) Beim Vergleich verschiedener Schnitte durch denselben Punkt und mit derselben Tangente, unter denen der Normalschnitt ($\nu = 0$) mit dem Krümmungsradius ϱ_n auftritt, finden wir $\dfrac{\varrho}{\cos \nu} = \varrho_n$. Dies ist der Meuniersche Satz.

2) Beim Vergleich verschiedener Normalschnitte ($\nu = 0$) durch denselben Punkt, unter denen der Hauptschnitt ($\gamma = 90^0$) mit dem Krümmungsradius R auftritt, finden wir $\varrho_n \sin^2 \gamma = R$. Dies ist der für die abwickelbaren Flächen spezialisierte Eulersche Satz.

3) Beim Vergleich verschiedener Hauptschnitte durch Punkte längs derselben Mantellinie finden wir

für die Cylinderfläche $R = \text{const.}$,

für die übrigen abwickelbaren Flächen $\dfrac{R}{m} = \text{const.}$

Wir sehen somit, daß der gemachte Ansatz ausreicht, um die Krümmungsverhältnisse bei allen abwickelbaren Flächen vollständig zu erledigen, womit wir hier abbrechen.

Stockholm, 25. Oktober 1902.

Über einige Krümmungseigenschaften bei abwickelbaren Flächen und bei Kegelkurven.

Von C. HEUMAN in Stockholm.

Wir betrachten eine allgemeine abwickelbare Fläche **F**; es sei g die Gratlinie derselben, O ein Punkt auf g, t die Tangente daselbst, welche eine Erzeugende von **F** ist, und P ein Punkt auf t; der Abstand OP werde mit m bezeichnet. Durch P gehe eine beliebige Flächenkurve k, deren Tangente in P mit OP den Winkel γ einschließt und deren Schmiegungsebene daselbst von O den senkrechten Abstand e hat. Es sei ϱ der Krümmungsradius von k in P. In dem vorigen Aufsatze habe ich auf geometrischem Wege bewiesen, daß die Größe

$$\frac{\varrho \sin^3 \gamma}{e} = M \tag{1}$$

für alle durch P gehenden Flächenkurven konstant ist und auch von der Lage des Punktes P auf t unabhängig; ich nenne M den *Krümmungsmodul* der Fläche längs der Erzeugenden t. Übrigens kann der Ausdruck (1) in eine andere Form gebracht werden, wodurch der Zusammenhang mit bekannten Flächensätzen zum Vorschein kommt. Bezeichnen wir nämlich mit ν den Winkel zwischen der Schmiegungsebene der Kurve k in P und der Flächennormale daselbst, so ist $e = m \sin \gamma \cos \nu$, mithin wird (1)

$$\frac{\varrho \sin^2 \gamma}{m \cos \nu} = M. \tag{2}$$

In dieser Form erkennt man eine Zusammenfassung des Eulerschen und des Meunierschen Satzes mit dem Satze von der homothetischen Änderung des Krümmungsradius in parallelen Schnittten längs derselben Erzeugenden.

Eine gegen t senkrechte Ebene in P schneidet den Hauptschnitt k_m in diesem Punkte aus. Ist R der Krümmungsradius von k_m in P, so gibt (1) oder (2)

$$M = \frac{R}{m}; \tag{3}$$

wird also OP oder m gleich 1 gewählt, so wird schlechthin $M = R$. — Wir bezeichnen noch mit ϱ_0, r_0 den Krümmungs-, bezw. Torsions-

radius von g in O; wählt man dann $m = \varrho_0$, so findet man leicht, daß $R = r_0$, also

$$M = \frac{r_0}{\varrho_0} \tag{4}$$

ist. Für den im Abstand ϱ_0 gelegten Hauptschnitt k_{ϱ_0} ist nämlich das Bogenelement gleich dem Produkt von ϱ_0 mit dem Winkel zweier unendlich benachbarten Erzeugenden oder dem Kontingenzwinkel von g, also gleich dem Bogenelement ds_0 von g in O. Dagegen ist der Kontingenzwinkel von k_{ϱ_0} in P gleich dem Winkel zweier unendlich benachbarten Berührungsebenen von F oder Schmiegungsebenen von g, d. h. $= \frac{ds_0}{r_0}$. Durch Division erhält man $R = r_0$.

Für eine Kegelfläche gilt obiger Satz (1) unverändert; die Gratlinie schrumpft zu einem Punkte O, der Spitze des Kegels, zusammen. Bei dem Umdrehungskegel findet man durch Betrachtung des Kreisschnittes, sofort nach (1) $M = \operatorname{tg} \mu$, wo μ den Winkel zwischen Mantellinie und Achse bedeutet.

Kehren wir zur Fläche F zurück. Wird O als Spitze eines *Richtungskegels* K_r angenommen, so oskulieren sich die Flächen F und K_r längs t; es hat demnach auch für K_r der Krümmungsmodul längs t den Wert $\frac{r_0}{\varrho_0}$. Die Form von K_r ist von der Lage der Spitze unabhängig; die Krümmungsmoduln sind daher für F und K_r überall längs entsprechenden Erzeugenden einander gleich. — In dem besonderen Falle, wenn g eine Schraubenlinie (allgemeiner Art) ist, wird K_r ein Umdrehungskegel; also ist der Krümmungsmodul für K_r und sodann auch für F überall konstant und $= \operatorname{tg} \mu$, wenn μ der Winkel zwischen den Tangenten der Schraubenlinie und den Mantellinien der tragenden Cylinderfläche ist; denn die Mantellinien und die Achse von K_r schließen auch diesen Winkel ein. Somit ist nach (4) $\frac{r_0}{\varrho_0}$ in jedem Punkte der Gratlinie konstant und $= \operatorname{tg} \mu$; auf solche Art kann demnach auch diese bekannte Eigenschaft der Schraubenlinien hergeleitet werden.

Wir wollen noch die Fläche F mit einer anderen Kegelfläche vergleichen, dem Projektionskegel K_p, welcher mit O als Spitze die Gratlinie g enthält. Dieser Kegel hat auch t als Mantellinie und längs derselben die Berührungsebene mit F gemein; wir wollen den Wert M_p des Krümmungsmoduls für K_p längs t ableiten. Zu diesem Zwecke nehmen wir auf g einen zu O benachbarten Punkt P an; die Werte von ϱ, γ und e bezüglich der Flächenkurve g in dem Punkte P bestimmen nach (1) den Wert von M_p längs OP und durch Grenzübergang längs t. Es sei h der kleine Bogenabstand PO; die Projektionen

der Strecke PO auf die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale von g in P seien h_1, h_2, h_3 bezw. Diese Größen können in Potenzreihen nach h entwickelt werden, die mit den Gliedern

$$h, \quad \frac{h^2}{2\varrho}, \quad \frac{h^3}{6\varrho\tau}$$

bezw. anfangen (τ der Torsionsradius von g in P). Für die Projektion γ_0 des Winkels γ auf die Schmiegungsebene in P gilt $\operatorname{tg}\gamma_0 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h}{2\varrho} \pm$ etc; wegen der Kleinheit von h_3 ist aber γ von γ_0 und $\sin\gamma$ von $\operatorname{tg}\gamma_0$ nicht sehr verschieden, sodaß die Entwickelung von $\sin\gamma$ auch mit dem Gliede $\frac{h}{2\varrho}$ beginnen muß. Weil e schlechthin $= h_3$ ist, bekommen wir

$$\frac{\sin^3\gamma}{e} = \left[\frac{h^3}{8\varrho^3} \pm \text{etc.}\right] : \left[\frac{h^3}{6\varrho\tau} \pm \text{etc.}\right] = \frac{3}{4}\frac{\tau}{\varrho^2} \pm \text{etc.}$$

und

$$\lim_{h=0} \frac{\varrho \sin^3\gamma}{e} = \frac{3}{4}\frac{\tau_0}{\varrho_0} = \frac{3}{4} M = M_p. \tag{5}$$

Der Krümmungsmodul von K_p längs t ist also $\frac{3}{4}$ von dem Werte des Krümmungsmoduls der Flächen K_r und F längs derselben Erzeugenden.

Weil die Kurve g beliebig angenommen werden kann, ist damit auch folgender Satz bewiesen: *Wenn eine auf einer beliebigen Kegelfläche liegende Kurve g durch die Spitze O geht, so ist das Verhältnis $\frac{\tau}{\varrho}$ für die Kurve g in O* gleich $\frac{4}{3}$ *von dem Wert des Krümmungsmoduls der Kegelfläche längs derjenigen Mantellinie, die g in O berührt.* Speziell kommt: *Für eine Kurve auf einem Umdrehungskegel, die durch die Kegelspitze geht, ist das Verhältnis $\frac{\tau}{\varrho}$ daselbst $= \frac{4}{3}\operatorname{tg}\mu$, wenn μ den Winkel zwischen Mantellinie und Achse bezeichnet.*

Um dies auch durch Rechnung nachzuweisen, schreiben wir die Gleichungen einer beliebigen Kegelfläche in der Form

$$x = \alpha_1 v, \quad y = \alpha_2 v, \quad z = \alpha_3 v, \tag{6}$$

wo α_1, α_2, α_3 drei Funktionen eines Parameters u sind, welche die Bedingung $\Sigma\alpha_i^2 = 1$ erfüllen mögen. Wir können dann α_i als die Richtungskosinus der Tangente einer Hilfskurve deuten, deren Bogenlänge u ist. Bezeichnen wir die Richtungskosinus der Hauptnormale, bezw. der Binormale derselben Kurve mit β_i, bezw. γ_i, sowie den Krümmungs- und Torsionsradius mit ϱ und τ bezw., so bekommen wir aus (6)

$$x'_u = \beta_1 \cdot \frac{v}{\varrho}, \quad x'_v = \alpha_1,$$

$$x''_{uu} = -\alpha_1 \cdot \frac{v}{\varrho^2} + \beta_1 v \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \gamma_1 \cdot \frac{v}{\varrho\tau}, \quad x''_{uv} = \frac{\beta_1}{\varrho}, \quad x''_{vv} = 0,$$

wonach die Fundamentalgrößen der Kegelfläche die Werte bekommen

$$E = \frac{v^2}{\varrho^2}, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

$$L = \pm \frac{v}{\varrho\, r}, \quad M = N = 0$$

und der Hauptkrümmungsradius

$$R = -\frac{E}{L} = \mp \frac{r}{\varrho} \cdot v,$$

also weil v die Länge der Mantellinie ist:

$$\text{Krümmungsmodul } \varkappa = \left|\frac{R}{v}\right| = \left|\frac{r}{\varrho}\right|.$$

— Eine Kurve auf der Kegelfläche wird durch die Annahme $v = f(u)$ festgestellt. Wenn wir die Differentiation nach u mit Accenten andeuten, bekommen wir aus (6):

$$x' \;= \alpha_1 \cdot v' + \beta_1 \cdot \frac{v}{\varrho},$$

$$x'' = \alpha_1 \left(v'' - \frac{v}{\varrho^2}\right) + \beta_1 \left(2 \frac{v'}{\varrho} - \frac{\varrho'}{\varrho^2} v\right) - \gamma_1 \cdot \frac{v}{\varrho\, r},$$

$$x''' = \alpha_1 \cdot \varphi_1 + \beta_1 \cdot \varphi_2 + \gamma_1 \left(-3 \frac{v'}{\varrho\, r} + \varphi_3 \cdot v\right),$$

wo die φ Funktionen von u bezeichnen, die für $v = 0$ endlich bleiben. Mithin wird für die Kegelspitze oder $v = 0$

$$\Sigma x'^2 = v'^2; \quad \begin{Vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{Vmatrix}^2 = 4 \cdot \frac{v'^4}{\varrho^2}; \quad |x' x'' x'''| = -6 \cdot \frac{v'^3}{\varrho^2 r}.$$

Die Radien ϱ_k, r_k der Kurve k bekommen also daselbst die Werte

$$\varrho_k = \pm \tfrac{1}{2} \varrho \cdot v'; \quad r_k = -\tfrac{2}{3} r v',$$

mithin wird

$$\left|\frac{r_k}{\varrho_k}\right| = \tfrac{4}{3} \left|\frac{r}{\varrho}\right| = \tfrac{4}{3} \varkappa,$$

was zu beweisen war.

Stockholm, 25. Oktober 1902.

Rezensionen.

E. Mach. Die Prinzipien der Wärmelehre. Historisch kritisch entwickelt. 2. Auflage, Leipzig 1900, J. A. Barth. XII u. 484 S. gr. 8⁰.

Seiner Mechanik hatte Mach die Wärmelehre folgen lassen, deren zweite, nicht wesentlich veränderte Auflage erfreulicherweise schon nach wenigen Jahren nötig wurde.

Anlage und Durchführung des Buches entsprechen ganz seinem der Mechanik gewidmeten Vorgänger. Die historisch-kritische Darstellung gibt den Entwickelungsgang der Wärmelehre, und zwar ebenfalls in der Absicht, den *physikalischen* Inhalt des behandelten Gebietes herauszuheben, ohne das Eingehen auf rein mathematische Stoffe zu vermeiden, namentlich solcher, zu deren Ausbildung gerade physikalische Probleme Anlaß gegeben haben.

Wie in allen Machschen Schriften, so hier besonders in der Wärmelehre tritt die vornehme, ausgeprägte Persönlichkeit des Verfassers wohltuend hervor, wozu vermehrter Anlaß gegeben ist durch die umfangreichere Berücksichtigung von erkenntnistheoretischen Fragen, die nicht nur wie in der Mechanik eingeflochten sind, sondern zum Teil in besonderen Kapiteln behandelt. Der Verfasser will damit diese Erörterungen solchen Physikern ersparen, die derartige Lektüre nicht lieben. Diese Erleichterung, gewisse Teile auszuschalten, ist allerdings in mancher Hinsicht zu bedauern. Denn die leider wohl große Zahl derjenigen zu vermindern, die einer vertieften Betrachtung der Dinge abgeneigt sind, müssen gerade die Machschen Darlegungen ganz besonders geeignet erscheinen.

Der Verfasser beschränkt den physikalischen Inhalt seines Buches auf die Entwickelung der Prinzipien, gibt also nicht etwa einen bis auf die Gegenwart fortgeführten Bericht selbst nur des Wichtigeren. Gar nicht aufgenommen sind die mechanische Gastheorie und die Thermochemie. Die Gliederung des Inhaltes ergibt sich im übrigen bei einer vornehmlich historischen Darstellung in den Hauptzügen von selbst. Demgemäß ist zunächst die Thermometrie besprochen, darauf die Wärmeverbreitung, die Kalorimetrie und die Thermodynamik. Schon der erste Abschnitt hat in unserer physikalischen Buchliteratur reichlich Gelegenheit reinigend zu wirken, denn die Begriffe der Temperatur und der Temperaturskala pflegen in den Lehrbüchern gemeinhin nicht mit der erforderlichen Sorgfalt behandelt zu werden. So versetzen auch bessere den noch unkundigen Leser durch die Art der Darstellung leicht in den Glauben, daß dem Gasthermometer von vornherein die Eigenschaft beiwohne, die „wahre" Temperatur zu zeigen. Unverkennbar besteht ja hinsichtlich des Begriffes der Temperatur bei dem jetzigen Aufbau der Wärmelehre die Schwierigkeit, daß er schon im Anfange

eingeführt werden muß und sozusagen erst zuletzt genau definiert werden kann. Wie diese Schwierigkeit zu überwinden ist durch Hinweis auf die zunächst bestehenden Zweifel, ohne dabei aber den Baugrund für das Folgende ganz unsicher zu machen, dazu bietet die Machsche Darstellung die beste Anleitung.

Wie sich der Verfasser in seiner Mechanik veranlaßt sah, gelegentlich der Besprechung der formellen Entwicklung der Mechanik die Grundzüge der Variationsrechnung zu behandeln, so gibt ihm hier die Lehre von der Wärmeleitung Gelegenheit, auf das Wesen der partiellen Differentialgleichungen einzugehen, im Zusammenhange mit der Fourierschen Theorie, nachdem er in einem Kapitel vorher („das Continuum") in gewissem Sinne eine Einleitung dazu gegeben. Die Darstellungsweise entfernt sich dabei wie im ganzen Buche beträchtlich vom Schulmäßigen und wird manchen Physiker und Techniker bedauern lassen, daß der Verfasser solche Exkurse ins Gebiet der reinen Mathematik natürlich nicht oft machen kann.

In den folgenden Kapiteln ist die Entwickelung der Vorstellungen gegeben, die den Begriff der spezifischen Wärme und der Wärmemenge enthalten. Die Anlage des Werkes ergibt von selbst, daß hier manche Einzelheiten behandelt sind, die man jetzt gewöhnt ist in systematischen Darstellungen der Thermodynamik zu finden, so den Überströmungsversuch von Gay-Lussac, die Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen der Gase nach Clément und Desormes, die Laplace-Poissonsche Gleichung u. a. m. Da dieselben Abschnitte auch die Entwickelung der Kenntnisse von der Verdampfungs- und Schmelzwärme enthalten, so erscheinen sie etwas knapp gegenüber anderen Teilen. Mit besonderer Liebe sind die Verdienste von Black hervorgehoben, der wenigstens deutschen Lesern wenig bekannt ist und der, dauernd als vielbeschäftigter Arzt tätig, hinsichtlich verspäteter Anerkennung seiner physikalischen Leistungen manche Ähnlichkeit mit seinem engeren Fachgenossen Robert Mayer aufweist.

Die vorgehende Betrachtung der Erkenntnisse, die tatsächlich schon vor der Ausbildung der Thermodynamik vorhanden waren, läßt diese schon in der äußeren Gruppierung übersichtlicher erscheinen und regt Bedenken an, ob nicht überhaupt deren systematische Behandlung von andern Schriftstellern zu früh bevorzugt ist, und nicht besser der Anschluß an die historische Entwickelung wenigstens noch für lange Zeit allgemeiner hätte beibehalten werden sollen. Das soll hier rein praktisch gemeint sein, insofern als Ziel der Darstellung die Mitteilung des physikalischen Inhaltes der Thermodynamik verstanden wird. Denn die allgemeinere Verbreitung der thermodynamischen Lehren, die über die elementarsten hinausgehen, ist selbst hinter bescheidenen Wünschen zurückgeblieben. An diesem unerfreulichen Zustande wird allerdings mehr noch als die Gruppierung des Stoffes die meist beliebte Darstellungsweise die Schuld tragen. Die formale mathematische Behandlung hat nur für den Leser einen Sinn, der den physikalischen Inhalt übersieht. In diesen durch mathematische Operationen wirklich einzuführen wird erst möglich sein, „wenn einst die Wissenschaft vollendet sein wird", um mit Helmholtz zu reden. Man braucht andererseits nicht in das andere Extrem zu verfallen, wie Moutier in seiner Thermodynamique, der den Gebrauch der formalen Mathematik radikal ausschließt; denn diese ist doch wieder ein zu wertvolles Hilfsmittel, und der grundsätzliche Verzicht auf sie hat

nur schwerfällige Künsteleien und Beschränkungen zur Folge. Die einfache, klare, in jeder Hinsicht vorbildliche Darstellung Machs von der physikalischen Thermodynamik wird hoffentlich nach ihrem Werte gewürdigt und berücksichtigt werden. Sie nimmt naturgemäß einen breiten Raum des Werkes ein, und doch wird der Leser bedauern, sie nicht noch um einen Abschnitt ähnlich wie „die weitere Verwendung der Prinzipien" in der „Mechanik" des Verfassers vermehrt zu sehen. Die Anwendung der Prinzipien auf die Dämpfe wenigstens wird ungern vermißt werden. Auch würde mancher Leser vielleicht ein ausführlicheres Eingehen auf den in weiteren Kreisen bis jetzt mehr dem Worte als dem Sinne nach bekannten Begriff der „Entropie" gewünscht haben. Wohltuend berührt die Art, wie der Verfasser auf diesem für eine historische Darstellung immer noch gefährlichen Gebiete, auf dem Neid und Cliquenwesen längere Zeit eine so unschöne Rolle gespielt haben, den Leistungen der Einzelnen gerecht wird. Daß auch ein kräftiges Wort nicht vermieden wird, wenn es sich um die anschauliche Kennzeichnung eines gewissen Wissenschaftsbetriebes handelt, kann u. a. aus der Anmerkung S. 253 ersehen werden.

Aus der Fülle anregender Betrachtungen allgemeineren und besonders erkenntnistheoretischen und psychologischen Inhaltes, die teils eingestreut in den besprochenen Abschnitten, teils in den letzten, ihnen besonders gewidmeten Kapiteln enthalten sind, mögen noch einige Andeutungen gegeben werden. Dem Leser der „Mechanik" ist der vom Verfasser mit Vorliebe verwendete Begriff der „Ökonomie in der Wissenschaft" geläufig. Er wird deshalb nicht verwundert sein, hier ein besonderes Kapitel darüber zu finden. Der befreienden Kraft dieses Begriffes, der beispielsweise den Wert und die Rolle der Prinzipien in der Mechanik mit einem Schlage kennzeichnet, wird sich so leicht niemand entziehen und ebenso wie diesen so auch „die Vergleichung als wissenschaftliches Prinzip" hinterher wie etwas Selbstverständliches empfinden. Die vielgebrauchten und notwendigerweise sich von selbst einstellenden Bilder und Analogien sind Ausdrücke dieses Vergleichungsprinzipes. Unter Bild und Analogie wird aber von dem Verfasser, und das ist bezeichnend für seine naturwissenschaftlichen Anschauungen überhaupt, viel mehr verstanden, als wir sonst gewöhnt sind. Schon in der „Mechanik" wurde ausgesprochen, zur Verwunderung mancher, daß doch keineswegs gerade die mechanischen Vorstellungen am tiefsten zu gehen brauchten, daß doch also in der Zurückführung aller Naturerscheinungen auf die mechanische Erklärungsweise nicht das Endziel der Forschung erblickt werden könne. Viel nachdrücklicher noch wird in der Wärmelehre darauf hingewiesen, übrigens unter Anführung anderer namhafter Forscher, daß aus dem Parallelismus im Verhalten der verschiedenen Energieformen nicht einfach auf ihre Identität zu schließen ist. Die mechanischen Vorstellungen sind deshalb dem Verfasser auch nur Bilder, das einseitige Festhalten an dieser Vorstellung erscheint ihm als eine Art Befangenheit. Er geht noch weiter, auch die Formel ist ihm nur „eine Analogie zwischen einer Rechnungsoperation und einem physikalischen Prozeß, deren Bestehen oder Nichtbestehen in jedem besonderen Falle eben auch zu prüfen ist", und es solle vermieden werden, „daß an die Stelle der mechanischen Mythologie einfach eine algebraische gesetzt werde". Für dieses offene Aussprechen werden ihm besonders die dankbar sein, die mechanische Bilder jeder Art als berechtigtes

und unentbehrliches Forschungsmittel bewußt benutzen, ohne hinterher sich veranlaßt zu sehen, in unwahrer Darstellung die gewonnenen Erkenntnisse als Folgen formaler mathematischer Operationen auszugeben.

Diese wenigen Andeutungen müssen hier genügen. Mögen sie zu eingehendem Studium des Werkes anregen, das jedem aufmerksamen Leser Förderung physikalischer Erkenntnis bringt weit über den engeren Stoff hinaus. Umfassendes Wissen, kritische Schärfe, klare Darstellung und edle Offenheit geben auch diesem Werke Machs das Gepräge eines Kunstwerkes, dessen Bedeutung in geistiger wie gemütlicher Hinsicht nicht hoch genug gewürdigt werden kann.

Berlin. A. Rotth.

Ad. Wernickes Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung mit Anwendungen und Übungen aus den Gebieten der Physik und Technik. Erster Teil. Mechanik fester Körper. Von Alexander Wernicke. Vierte völlig umgearbeitete Auflage. Braunschweig 1901, Vieweg u. Sohn. XV u. 809 S. 10 Mk.

Dieses Werk, zuletzt 1877 in dritter Auflage erschienen, wird jetzt von dem Sohne des Verfassers in neuer Gestalt herausgegeben. Ursprünglich für die preußischen Gewerbeschulen bestimmt, soll es nunmehr außer den Technikern auch den Kandidaten des höheren Schulamts dienen, welche sich für das Prüfungsfach der angewandten Mathematik vorbereiten. Es soll eine technische Mechanik in dem üblichen Umfange der Lehrbücher, aber in elementarer Behandlung bieten. Nach der Vorrede werden nur soviel Kenntnisse vorausgesetzt, wie der Reifeprüfung der altsprachlichen Gymnasien entspricht, Differential- und Integralrechnung werden ausgeschlossen. Indessen wird die Bewegungsfreiheit bald dadurch vermehrt, daß durch Grenzbetrachtungen eine Tabelle hergeleitet wird, um von einfachen Funktionen (x^n, $\sin x$, e^x) zu den Ableitungen überzugehen und umgekehrt von letzteren zu den Stammfunktionen aufzusteigen. Eine Zurückführung von Integrationen auf elementare Summationen wird dadurch überflüssig. Ist hiermit ein gut Teil der Infinitesimalrechnung für die rechnerische Behandlung der Aufgaben gewonnen, so wird für die allgemeinen theoretischen Herleitungen, die den Hauptteil des Werkes bilden, ein uneingeschränkter Gebrauch von Grenzübergängen gemacht. Der Unterschied von der üblichen Darstellung besteht also nur darin, daß die Symbole und die ökonomische Bezeichnungsweise der Differentialrechnung bei Seite bleiben; sie werden durch eine neue konsequent ausgebildete Symbolik ersetzt, die nur den Nachteil hat, nicht die übliche zu sein. So sind s_x, s_y, s_z die Koordinaten, v_x, v_y, v_z die Komponenten der Geschwindigkeit, j_x, j_y, j_z die der Beschleunigung eines Punktes, $\sigma\,\varphi\,\iota$ sind entsprechende Größen für die Rotation eines Körpers. Der Differentialquotient einer Funktion von t wird als ihre Erzeugungsgeschwindigkeit eingeführt. Die Gleichung der lebendigen Kraft lautet für einen Punkt: $E - E_0 = F_{s_0}^{s}(K_T \perp w)$, d. h. die Änderung der Energie wird durch die entsprechende Fläche der Tangentialkraft-Weglinie dargestellt. Nach dem Verfasser soll diese Auffassung von „elementarer“ Behandlung sich in der angewandten Mathematik mehr und mehr einbürgern. Sie hat mit der bisher gültigen Bedeutung des Wortes nichts zu tun. Man verlangte bisher, daß eine mechanische Aufgabe direkt von den Elementen aus durch an-

schauliche, in ihrer Tragweite übersehbare Operationen gelöst würde ohne Anleihe bei den allgemeinen Prinzipien, die wohl richtige Resultate, aber keine Einsicht in das Zustandekommen einer Bewegung geben.

Die Grenzübergänge werden vielfach an sorgfältigen Figuren veranschaulicht, die nur dadurch ein etwas unruhiges Aussehen gewinnen, daß fast immer die betrachteten Kurvenbogen links und rechts von Inflexionspunkten eingeschlossen werden. Die mechanischen Begriffe, die meist in Komponenten zerpflückt durch drei Gleichungen gegeben werden, erhalten durch die Anwendung der Vektoren eine einheitliche Darstellung. Für die Zug- und Druckspannungen bei Dachkonstruktionen und Brückenträgern, auf die kürzlich Schülke als auf ein reiches Aufgabenmagazin hingewiesen hat, werden die Methoden der Graphostatik benutzt, ebenso für einige Schwerpunktsbestimmungen. So wird auch der Wert von Coriolis' fingierter Kraft geometrisch an Figuren entwickelt. Angewandt wird sie z. B. auf die Radialturbine und auf die östliche Abweichung fallender Körper.

Das Buch beansprucht zwar im ganzen als systematisch zu gelten, doch bezieht sich dies mehr auf die allgemeinen theoretischen Entwicklungen, z. B. über die allgemeinste Bewegung des starren Körpers, über die Reduktion der Kräfte am starren Körper, über die Eigenschaften der Trägheitsmomente. Die Anwendungen, die oft die wichtigsten Einzelprobleme behandeln, sind mehr methodisch geordnet.

In der Einleitung werden schwierige Fragen über die Grundlagen der Mechanik, über die Körper der Außenwelt, die Relativität der Bewegung, den Begriff der Kraft gestreift, ferner wird die Addition der Vektoren behandelt. Alsdann beschäftigt sich der erste Abschnitt des Werkes mit der Phoronomie oder Kinematik, der zweite mit dem materiellen Punkt, der dritte mit der Dynamik, d. h. Statik des starren Körpers, wobei die Reibung als tangentiale Reaktion sehr ausführlich behandelt wird, endlich der vierte mit der Kinetik, d. h. Bewegung unter dem Einfluß von Kräften.

Die gleichförmige Kreisbewegung wird im ersten Abschnitt nach den beiden möglichen Anschauungen behandelt, das eine Mal als gebrochene Linie mit Kraftimpulsen an den Eckpunkten, das andere Mal als Aneinanderreihung von Parabelbogen mit stetiger Kraftwirkung. Es wird gezeigt, daß beide Arten, die erste und die zweite Annäherung für das Zeitelement, beim Übergang zur Grenze auf dieselbe Bewegung führen.

Die Figuren zur schiefen Ebene sind so gezeichnet, daß man an eine rollende Bewegung des beweglichen Körpers denken muß. Er müßte die Gestalt eines Schlittens oder gleitenden Körpers haben, zumal im weitern Verlauf des Werkes die rollende Bewegung, sogar mit Rücksicht auf Reibung, als abweichend von der gleitenden genau erörtert wird.

Als Anwendung zur Phoronomie finden wir den Wurf, das Pendel, die Planetenbewegung, das Foucaultsche Pendel. Letzteres wird unter Zerlegung der Erdrotation in zwei Komponenten behandelt mittelst des Grundsatzes, daß Schwingungen, die in Richtung des Meridians eingeleitet werden, angenähert als eben gelten können. Wenn dieser Grundsatz richtig ist, so werden die Schwingungen auch nach einer Stunde noch als eben gelten können, also ist die in ihm enthaltene Voraussetzung unnütz.

Im zweiten Abschnitt wird die dynamische Grundgleichung „Kraft = Masse mal Beschleunigung" wenig befriedigend dadurch eingeführt, daß

sie das Analogon sei zu dem Satze: „Gewicht = Masse mal Beschleunigung", daß man sie seit Newtons Tagen allen einschlagenden Untersuchungen zu Grunde gelegt habe und dabei ohne Ausnahme mit der Erfahrung in Übereinstimmung geblieben sei.

„Bewege man einen Körper an einem Faden im Kreise, so wirke auf ihn die Spannung des Fadens als Zentripetalkraft; die Reaktion, als Zug an der Hand nach außen bemerkbar, sei die Zentrifugalkraft. Unglücklicherweise heiße so auch die fingierte Kraft der relativen Bewegung, deren Angriffspunkt aber der bewegliche Punkt sei." Dagegen ist zu bemerken, daß die fingierte Kraft der relativen Bewegung wegen ihrer Wichtigkeit Anspruch auf einen besondern Namen hat, und daß Zentrifugalkraft sachgemäß ist, selbst der Laie erkennt sie, irrt jedoch darin, daß er sie für eine wirkliche Kraft hält. Für die Reaktion ist ein besondrer Name überflüssig, der vorgeschlagene aber unberechtigt. Bildet der obige Faden eine Schleife, die um einen als Zentrum dienenden Stab herumgleitet, so erfährt der Stab eine zentripetale Reaktion. Bewegen sich Erde und Mond um ihren Schwerpunkt, so ist die Aktion, auf den Mond ausgeübt, zentripetal, die Reaktion gleichfalls.

Im dritten Abschnitt ist irrtümlich ein Körper, der mit seiner konvexen Grundfläche auf einem Tisch hin und her rollen kann, bezüglich der Gleichgewichtslagen als ein Beispiel der Befestigung in einem Punkte aufgeführt worden.

Der vierte Abschnitt bringt zum Schluß eine elementare Theorie des Kreisels, die ihrem wesentlichen Inhalte nach auch einen Teil der Festschrift zu Dedekinds siebzigstem Geburtstag bildet. Der Flächensatz und der Satz von der Energie liefern zwei Gleichungen zwischen den bekannten Größen p, q, r, hier φ_x, φ_y, φ_z, von denen die letzte, die Winkelgeschwindigkeit um die Kreiselachse, konstant ist. Ist ϑ der Winkel zwischen der Vertikalen und der Kreiselachse, so ergibt sich für $\varphi_x = d\vartheta/dt$ ein Wert als Funktion von ϑ, welcher zeigt, daß ϑ in engen Grenzen schwankt, und zwar in harmonischen Schwingungen. Zugleich ergibt sich φ_V, die Winkelgeschwindigkeit der durch die Achse gelegten Vertikal-Ebene, als nahezu proportional zur Abweichung des Winkels ϑ von seinem Anfangswert, so daß man die bekannte Präzession der Kreiselachse verbunden mit einer sog. Nutation erhält. Es ist nicht zu leugnen, daß diese „elementare" Behandlung im wesentlichen alle Erscheinungen beschreibt, welche auch bei einer genaueren Behandlung zur Darstellung kommen. Sie ist eben eine aus den genauen Formeln folgende „angenäherte", nicht aber im bisherigen Sinne „elementare" Darstellung. Daß sie irgendwie das leistete, was man in der analytischen Mechanik vermißt, daß sie das Paradoxon des Kreisels aufklärte, der bei schiefer Lage nicht umfällt, wäre durchaus in Abrede zu stellen. In der beigegebenen Figur für die Bahn des Kreiselschwerpunkts müßten die einzelnen Ranken die Gestalt von Zykloiden haben, sich daher berühren, nicht aber Winkel von etwa 90° bilden. Die nicht näher untersuchte Reibung hat nicht die Folge, daß der Kreisel umfällt, sondern zunächst die, daß seine Achse sich aufrichtet.

Zu der Figur für die Poinsotsche Herpoloide sei bemerkt, daß sie nach neueren Untersuchungen nicht die von Poinsot ihr beigelegten Inflexionspunkte besitzt, sondern nach außen konvex ist.

Berlin. M. Koppe.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. (Begründet von **Moritz Cantor**). 14. Heft mit 113 Figuren im Text. Inhalt: Axel Anthon Björnbo, Studien über Menelaos' Sphärik. Heinrich Suter, Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke." Karl Bopp, Antoine Arnauld als Mathematiker. 338 S. B. G. Teubner. Leipzig 1902.

Die drei in diesem Hefte der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik vereinigten Arbeiten stehen nicht in dem geringsten inneren Zusammenhange, sie werden, möchte man sagen, nur durch den Einband zusammengehalten.

Hr. Björnbo hat überaus verdienstvolle und mühsame Untersuchungen über Menelaos angestellt, für welche ihm auch derjenige dankbar sein wird, der nicht in alle gezogenen Folgerungen einzustimmen vermag. So viel erscheint gesichert, daß der griechische Text der zahlreichen von Menelaos unter Trajans Regierung verfaßten Schriften noch unbekannt ist, daß alles, was wir über ihn wissen, aus arabischen und hebräischen Übersetzungen herstammt, sowie noch mittelbarer aus einer von Gerhard von Cremona verfaßten mittelalterlichen Übersetzung aus dem Arabischen. Der Cremoneser war es auch, der die Verketzerung Mileus einführte, unter welcher der Name Menelaos sich lange verbarg. Zu der lateinischen Übersetzung Gerhards gesellte sich dann im 13. Jahrh. ein lateinischer Kommentar, dessen Verfasser Hr. Björnbo in Campanus von Novara erkannt hat, dem eine reichere kommentierende Tätigkeit zuzuschreiben scheint, als man bisher annahm. Die Sphärik war sicherlich nicht das einzige Werk des Menelaos, wenn auch das einzige, welches wir genauer kennen. Ihm dürfte der Begriff des aus Bögen größter Kreise gebildeten sphärischen Dreiecks, des τρίπλευρον im Gegensatze zu dem τρίγωνον (Dreieck überhaupt), entstammen. Menelaos wird mit höchster Wahrscheinlichkeit erkannt haben, daß sphärische Dreiecke mit lauter gleichen Stücken nicht kongruent zu sein brauchen, sondern symmetrisch gleich sein können. Er hat das 1. Buch seiner Sphärik, so weit es möglich war, dem 1. Buche der euklidischen Elemente nachgebildet und vielfach auf die allerdings nicht trigonometrisch sondern stereometrisch gehaltene Sphärik des Theodosius zurückgegriffen. Letztere selbst gründet sich auf eine schon voreuklidische Sphärik, Theodosius dürfte vor Hipparch gelebt haben oder dessen Zeitgenosse gewesen sein. Während wir diesen Ergebnissen des Hrn. Björnbo durchaus zustimmen, scheint uns seine wichtigste Behauptung weit mehr hypothetischer Natur zu sein. Hr. Björnbo stellt nämlich auf, der sogenannte Satz des Menelaos sei schon Hipparch bekannt gewesen. Wenn wir die Beweisführung recht verstanden haben, so besteht sie darin, daß uns berichtet ist, Hipparch habe διὰ τῶν γραμμῶν, d. h. mittels auf der Kugel gezeichneter Figuren, eine Untersuchung erledigt, bei deren Führung der Satz des Menelaos sich nützlich erweisen kann. Daraus schließen zu wollen, die Konstruktion des Hipparch habe in Ziehung der Transversalen des Menelaos bestanden, scheint uns doch allzukühn. Wir können den Beweis des Gegenteils nicht führen, aber irgend eine Tatsache ist keinenfalls auf unbelegte Behauptungen zu gründen. Wir durften mit diesem Zweifel nicht zurückhalten, da Hr. Björnbo allzusehr auf seiner Vermutung weiterbaut.

Über die zweite Abhandlung können wir uns sehr kurz fassen. Hr. Suter hat, wie die Überschrift es aussagt, in ihr Nachträge und Berichtigungen zu seiner rühmlich bekannten Monographie über die Mathematiker und Astronomen der Araber gesammelt. Wer jene frühere Schrift zu benutzen in der Lage ist, wird die Nachträge vergleichen müssen.

Hr. Bopp führt uns in wesentlich neuere Zeiten, in Zeiten von so häufiger Durchforschung, daß man es kaum für möglich hätte halten sollen, in ihnen einen als Mathematiker so gut wie unbekannten Schriftsteller an das Licht zu ziehen, und doch ist dieses Hrn. Bopp gelungen. Wir können deshalb seine Abhandlung, die ihm zur Erlangung der Doktorwürde an der Universität Heidelberg gedient hat, und die wir in allen Phasen ihrer Entstehung verfolgen durften, den Fachgenossen dringend empfehlen. Antoine Arnauld stand, wie man längst wußte, in freundschaftlichen Beziehungen zu Blaise Pascal. Er war es, der den letzteren veranlaßte die berühmten Provinzialbriefe gegen die Jesuiten zu schreiben, der ihm das theologische Material dazu lieferte. Was man aber nicht mehr wußte, das war die Tatsache, daß die beiden auch auf mathematischem Gebiete Gesinnungsgenossen gewesen sind, und daß hier Arnaulds Feder zu Papier brachte, was den Grundanschauungen nach beiden bis zu einem gewissen Grade gemeinsam gewesen sein mag. Von Pascals dahin zielenden Arbeiten hat sich nur das Bruchstück *De l'esprit géométrique* erhalten. Anderes hat Pascal vermutlich zum großen Teil selbst vernichtet, als er sah, wie weit Arnaulds ihm handschriftlich bekannt gegebene Ausarbeitungen seine eigenen überflügelten. Im Drucke erschien Arnaulds Logik allerdings erst im Todesjahre Pascals 1662, seine Geometrie gar erst 1667. In der Logik ist verhältnismäßig kurz geschildert, wie Form und Anordnung einer Elementargeometrie sein müssen, in der Geometrie selbst ist jener Plan zu vollendeter Ausführung gebracht. Man sollte es für unglaublich halten, wenn es nicht wahr wäre: die Geometrien von Malézieu, von Varignon haben sich erhalten, die von Arnauld, nach deren Muster beide Schriftsteller arbeiteten, war vergessen, bis Hr. Bopp sie neu entdeckte und in Arnauld den Euklid des 17. Jahrhunderts erkennen ließ. Auch auf dem Gebiete der sogen. Zauberquadrate hat Arnauld gearbeitet und Fortschritte erzielt, welche das Recht hatten der Vergessenheit entzogen zu werden. Wir dürfen darum Hrn. Bopp auch für diesen letzten Abschnitt seiner Abhandlung unseren Dank nicht vorenthalten.

Heidelberg. M. Cantor.

Schoute, P. H. Mehrdimensionale Geometrie. Erster Teil. Die linearen Räume. Mit 65 Figuren und 335 Aufgaben. Sammlung Schubert XXXV. Leipzig 1902. G. J. Göschen. 8⁰. VIII u. 295 S. Preis geb. 10 Mk.

Wie weit verbreitet heutzutage in mathematischen Kreisen das Operieren mit dem Begriffe mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten oder Räume ist, beweist (auch dem Nichtmathematiker) das vorliegende Buch, das bezweckt, die Studierenden der Mathematik in die Euklidische mehrdimensionale Geometrie systematisch einzuführen.

Diesen Zweck würde das Buch meines Erachtens viel vollkommener erfüllen, wenn der Verfasser in einem einleitenden Kapitel dem Leser an

Beispielen gezeigt hätte, wie man zu dem Begriff mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten gelangt ist oder dazu gelangen kann, und wie der Mathematiker, diese konkreten Fälle umfassend, völlig abstrakt definiert, was er unter einem n-dimensionalen linearen Raume verstanden wissen will. Dieses freilich nicht leicht zu schreibende Kapitel wäre auch für Nichtmathematiker von großem Interesse gewesen; denn ganz gebildete Männer stellen den Mathematiker, sobald er von einem vierdimensionalen Raume spricht, mit einem Spiritisten ungefähr auf gleiche Stufe. Ich fürchte, daß dieses Vorurteil durch die ersten Nummern dieses Buches eher verstärkt als zerstört werden wird. Denn wenn der Verfasser auf S. 1, nachdem er Linie, Fläche und Raum durch Bewegung von Punkt bezw. Linie und Fläche hat entstehen lassen, nun fortfährt: „Es leuchtet ein, wie man auf diese Weise weiter gehen kann, jedesmal ein neues Glied der Reihe «Punkt, Linie, Fläche, Raum u. s. w.» aus dem vorhergehenden ableitend", so muß ich gestehen, daß mir dies nicht einleuchtet und es auch dem Anfänger nicht einleuchten wird; denn er kann sich unseren dreidimensionalen Anschauungsraum nicht als Teil eines mehrdimensionalen, mithin auch keine Bewegung dieses Raumes „vorstellen", weil die betreffenden Erfahrungstatsachen fehlen. Auch die Bemerkung zu Nr. 6 (S. 7): „Anstatt darüber zu grübeln, ob es eine Welt gibt, in der man außerhalb eines gegebenen Raumes einen Punkt annehmen kann, sind wir hier schon ganz zufrieden mit der Tatsache, daß sich eine solche Welt überhaupt denken läßt", wird einem gewissenhaften Leser, der bisher nur dreidimensionale Geometrie getrieben hat, über die Klippe nicht hinweghelfen; denn er wird sich sagen, er könne sich eine solche Welt eben nicht denken. Ich meine, es gibt aus dieser Schwierigkeit kaum einen anderen Ausweg als den Leser vorerst auf einen höheren logisch-geometrischen Standpunkt zu leiten, bevor man mit Räumen beliebiger Dimensionenzahl operiert.

In diesem einleitenden Kapitel hätte sich auch die Gelegenheit gefunden, dem Studierenden eine wenigstens ungefähre Vorstellung von dem Nutzen der mehrdimensionalen Geometrie zu geben; jetzt, fürchte ich, wird mancher nach dem Lesen der ersten Seiten das Buch aus der Hand legen, indem er sich sagt, er verstehe es doch nicht und sehe nicht ein, welchen Zweck diese Hirngespinnste haben sollten. Und dies tut mir leid, da das Buch eine Menge interessanter Dinge enthält, die selbst Mathematikern, wenn sie sich nicht gerade speziell mit mehrdimensionaler Geometrie beschäftigen, unbekannt sein dürften.

Von den 9 Paragraphen des Buches behandeln die ersten drei die Erzeugung der (stets linearen) Räume, ihren Parallelismus und ihre Orthogonalität, der vierte Abstand und Winkel zweier Räume. In ihnen erscheint mir besonders erwähnenswert die Definition der verschiedenen Grade von Parallelismus und Orthogonalität, ferner die Definition des Winkels zweier Räume R_{d_1} und R_{d_2} mit einem gemeinschaftlichen Punkt O. Gibt es in diesen zwei Räumen je eine von O ausgehende Gerade OA_1 und OA_2, sodaß die Ebene OA_1A_2 sowohl zu R_{d_1} als R_{d_2} halbnormal ist, d. h. daß sie sowohl zu einer Geraden von R_{d_1} als von R_{d_2} senkrecht steht, dann nennt Hr. Schoute $\sphericalangle A_1OA_2$ den *Winkel der beiden Räume* und beweist (Nr. 48), daß es, wenn $d_1 \leq d_2$ ist, d_1 verschiedene solche Winkel gibt, deren Ebenen paarweise aufeinander senkrecht stehen. Statt des neuen

Namens „Punktwert" eines Raumes für seine um eins vermehrte Dimensionenzahl hätte der Verfasser die auch von anderen Autoren angenommene Graßmannsche Bezeichnung „Stufe" beibehalten sollen.

Am meisten allgemeineres Interesse dürfte der § 5 erwecken, der die darstellende Geometrie des mehrdimensionalen, insbesondere des vierdimensionalen Raumes behandelt, weil in dieser Hinsicht nur wenige Arbeiten vorliegen (dem Referenten sind nur[1]) Bemerkungen W. Fiedlers und ein Aufsatz von Veronese darüber bekannt) und diese hauptsächlich die Abbildung des R_4 auf den R_3 behandeln, während hier der R_n auf den R_2, die *Ebene*, abgebildet wird. Der Verfasser denkt sich zu diesem Zwecke im R_n ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Achsen $OX_1, OX_2, \ldots, OX_n$ gewählt und von den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Ebenen, welche sie bestimmen, eine Kette von $n-1$ Ebenen, wie OX_1X_2, OX_2X_3, $\ldots$, $OX_{n-1}X_n$ herausgegriffen. Die durch einen beliebigen Punkt P senkrecht zu diesen Ebenen gelegten R_{n-2} schneiden sie bezüglich in den Punkten P_{12}, P_{23}, $\ldots$, $P_{n-1,n}$, den orthogonalen Projektionen des Punktes P auf die $n-1$ Ebenen. Durch Drehung um die gemeinschaftlichen Achsen lassen sich die $n-1$ Projektionsebenen in eine einzige Ebene, die Zeichenebene, ausbreiten, sodaß der Punkt P des R_n durch $n-1$ Punkte der Zeichenebene ebenso dargestellt wird wie im gewöhnlichen Raume ein Punkt durch Aufriß und Grundriß. Diese $n-1$ Punkte liegen derart, daß die Verbindungslinie je zweier aufeinanderfolgenden $P_{i-1,i}$, $P_{i,i+1}$ zur Achse OX_i senkrecht steht. Für den R_4 kann man die Ausbreitung insbesondere so vornehmen, daß die Halbachsen OX_3 und OX_4 die Ergänzungen von OX_1 und OX_2 bilden. In hinreichend vielen Beispielen wird gezeigt, wie auf diese Weise Gerade, Ebenen und Räume dargestellt und sie betreffende Aufgaben zeichnerisch gelöst werden können. Auch auf die Axonometrie und auf Analoga des Pohlkeschen Satzes für mehrdimensionale Räume geht der Verfasser kurz ein.

In § 6 wird ziemlich ausführlich die analytische Geometrie des R_n behandelt unter Benutzung von Punkt- und R_{n-1}-Koordinaten; auf die Koordinaten der anderen linearen Räume im R_n und die damit zusammenhängenden Komplexe wird nicht eingegangen. In der Geometrie der Lage, mit der sich § 7 beschäftigt, scheint mir die Verwendung der sogenannten „Orthogonalitätsverwandtschaft" (die identisch ist mit der Aufeinanderfolge einer Fußpunktentransformation und einer Inversion mit demselben Zentrum) unsystematisch. Die Kollineationsverwandtschaft zweier konjektiven R_n wird besprochen, ohne aber die möglichen Fälle systematisch zu untersuchen, was ja den Anfänger auch ermüden würde. Das Nullsystem im R_n, mit dem sich der Verfasser schon in einigen Abhandlungen beschäftigt hat, erfährt eine eingehendere Behandlung. § 8 („Geometrie der Anzahl") beschäftigt sich mit einigen anzahlgeometrischen Fragen, § 9 mit der Polygonometrie, insbesondere mit dem vierdimensionalen Vierkant.

Vom pädagogischen Standpunkte aus will mir scheinen, als ob der Verfasser, in dem Bestreben möglichst viele interessante Dinge in das Buch hinein zu bringen, die Systematik gestört und dem Leser das Studium hierdurch noch mehr erschwert hätte. Damit z. B. das in Nr. 128 über das

---

1) Gino Loria: Sur quelques problèmes élémentaires de la géométrie descriptive à trois et quatre dimensions. Dieses Archiv (3) 2, 257—266. Red.

Prinzip der Erhaltung der Anzahl Gesagte dem Anfänger verständlich würde, müßte viel weiter ausgeholt werden. Vor allem gilt dies von manchen der 335 Aufgaben. Welchen Zweck hat z. B. die Aufgabe 1) mit dem Hinweis auf die Nicht-Legendresche Geometrie, da diese doch eine Nicht-Archimedische Geometrie ist, und in dem vorliegenden Buche das Archimedische Axiom überall stillschweigend als gültig vorausgesetzt wird.

Die Schreibweise weist öfters undeutsche Wendungen und nicht völlig klare Sätze auf. Literatur-Verweise finden sich nur spärlich vor.

Zusammenfassend möchte ich sagen: Das Buch wird für jeden Mathematiker Interessantes bieten, dem Anfänger jedoch mehr Schwierigkeiten bereiten, als es dem Stoffe nach nötig wäre.

Wien, im Dezember 1902. E. Müller.

Perry. Höhere Analysis für Techniker. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Fricke und Süchting. Leipzig 1902, B. G. Teubner. VIII u. 423 S. 12 Mk.

Die zur Einführung in das Gebiet der Differential- und Integralrechnung vorhandenen Lehrbücher sind für den Ingenieur, dessen Tätigkeit schon nach Absolvierung der ersten Semester sich mehr auf die konstruktive, praktische Seite als auf die wissenschaftliche erstreckt, infolge ihres großen Umfangs und des meist sehr fühlbaren Mangels an praktisch gewählten Beispielen zum großen Teil ungeeignet.

Das vorliegende Buch sucht die erwähnte Lücke nach Möglichkeit auszufüllen und ist mit dem Werke von Autenheimer, das inhaltlich annähernd dasselbe bietet, wohl am besten für denjenigen geeignet, der in kurzer Zeit alles Vergessene wieder auffrischen und bei dem Studium schwierigerer Probleme der Elektrizitätslehre, Wärmemechanik, Festigkeitstheorie usw. die mathematische Seite nicht missen möchte. Sehr viele Techniker, sonst vorzügliche Konstrukteure, sind, mangels eines geeigneten Lehrbuches, sehr oft mit dem Resultat einer theoretischen Untersuchung vollkommen zufrieden, ohne über den Ausgangspunkt und den Entwickelungsgang im Klaren zu sein.

Einer Fülle von wertvollen Beispielen tritt man schon beim Durchblättern der ersten Seiten entgegen. Wer mit den Gesetzen der höheren Mathematik schon mehr vertraut ist, wird erstaunt sein über die einfache, fesselnde Art, mit der der Autor selbst verwickeltere Fälle zur Lösung bringt. Gleich im Anfang wird des Kurbelmechanismus, des Cardanisystems, des Lemniskoidenlenkers Erwähnung getan. Der Ingenieur wird weiter Interesse betätigen für die Entwickelungen über freien Fall, schiefen Wurf, Biegungstheorie, Seilkurven, den Wirkungsgrad der Heizfläche eines Dampfkessels, Festigkeit von Cylindern, Zapfenreibung, Theorie der Federn. Gut ausgewählt sind auch die hydrostatischen und hydrodynamischen Beispiele, sowie im letzten Teil des Werkes die Aufgaben über Schwingungen, Knickfestigkeit, die im Anschluß an die Theorie der Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung behandelt sind. Doch auch der Elektrotechniker kommt zu seinem Recht, beim Durcharbeiten der Abschnitte über die Helmholtzsche Gleichung, die Ladung und Entladung eines Kondensators, über das Verhalten eines Kondensators und einer Spule mit induktivem Wider-

stand im Wechselstromkreis, über günstigste Schaltung von Elementen, über möglichst rentable Bemessung von Kabeln, Verteilung des Stromes und über Bahnanlagen.

Aus dieser kurzen Aufzählung schon wird man ersehen, welch reichhaltiger Stoff hier auf 400 Seiten in gedrängter und doch leicht faßlicher Darstellung zusammengetragen ist. Freilich muß erwähnt werden, daß der junge Studierende, der die Gesetze der Mechanik, Elektrizitätslehre etc. noch wenig kennen gelernt hat, an diesem Buch keine so große Freude haben wird, wie der gereiftere Techniker, dem die in den zahlreichen Beispielen als bekannt vorausgesetzen Begriffe in der Tat zumeist alte Bekannte sein werden. Jedenfalls wird aber auch derjenige, der durch Selbststudium sich mit dem erforderlichen mathematischen Rüstzeug versorgen will, an diesem Buche eine überaus sichere Richtschnur in die Hand bekommen.

Charlottenburg. M. SAMTER.

Auerbach. Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. (Aus Natur und Geisteswelt. 40. Bändchen.) Leipzig, B. G. Teubner 1902. IV u. 156 S. Geh. 1 Mk.

Dieses aus einem Ferienkurse hervorgegangene Büchlein ist bei seinem geringen Umfange von einem erstaunlich reichen Inhalte. Es bietet in mancher Beziehung mehr als eine bloße Einleitung in die Physik, dringt vielmehr in die einzelnen Gebiete derselben weit genug ein. Zur Einleitung sind die Abschnitte über Raum und Zeit, Kraft und Masse und die Eigenschaften der Materie zu rechnen, während diejenigen über die Schwingungen und die Wellenbewegung, über die Strahlung, Arbeit und Energie sowie über die Entropie ins Spezielle gehen. Es ist rühmend hervorzuheben, daß der Verfasser nirgends in philosophische Spekulationen sich verliert, die Tatsachen von den Hypothesen scharf trennt, das Praktische herausgreift, das Moderne nicht scheut und im ganzen doch auf einem konservativen Boden steht. Werden auch die kurzen Belehrungen über Vektoren, Strömungs- und Kraftfelder sowie über das Potential Neulingen nicht gerade den hervorragenden Nutzen dieser Betrachtungen in der Physik vorzuführen geeignet sein, so erkennt man den ausgezeichneten Lehrer an den Herleitungen des Beharrungsvermögens und des Wesens der Kraft, die vielleicht auch soweit hätten geführt werden können, daß die „momentanen" Kräfte ganz beiseite geworfen wurden und von den 3 Sätzen auf S. 71 nur der letzte übrig blieb, der ja die ersten einschließt. Für ebenso richtig im pädagogischen Sinne halten wir die Ausführungen über den Massenbegriff trotz der Boltzmannschen Bemerkungen betreffs ihrer logischen Grundlagen. Von den spezielleren Tatsachen seien die ausführlicheren Kapitel über die Schwingungen, die Wellen und Strahlen rühmend hervorgehoben; für mustergültig halten wir die Darlegungen, die das absolute und das praktische Maßsystem, den Arbeitsbegriff und das Prinzip von der Erhaltung der Energie angehen. Auch erinnern wir uns nicht, einen populären Autor gefunden zu haben, der die Entwertung der Energie und die Entropie seinem Leserkreise darzustellen gewagt hätte. Wir können auch diesen Versuch, ein so äußerst schwieriges Kapitel der Physik — wie der 2. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie es ist — einem größeren Kreise zugänglich zu machen, für

sehr wohl gelungen ansehen. Wir wünschen dem Büchlein weiteste Verbreitung auch in den Kreisen der Lehrer, die in bezug auf die unterrichtliche Gestaltung der Physik manches daraus lernen werden.

Charlottenburg. H. SAMTER.

Kleiber. Lehrbuch der Physik für humanistische Gymnasien. München, R. Oldenbourg 1901. VIII u. 270 S. Preis 3 Mk.

Kleiber. Lehrbuch der Physik zum Gebrauche an realistischen Mittelschulen. 2. Auflage. Ebenda 1902. VIII u. 381 S. Preis 4 Mk.

Kleiber und **Karsten. Lehrbuch der Physik zum besonderen Gebrauche für technische Lehranstalten sowie zum Selbststudium.** Ebenda 1902. VIII u. 352 S. Preis 4 Mk.

Die vorliegenden Bücher ragen in mancher Beziehung über die in den letzten Jahren stark anschwellende Unterrichtsliteratur hinaus. Sowohl die theoretischen Fortschritte in der Physik wie auch die praktische Seite derselben finden die eingehendste Berücksichtigung. Dies konnte geschehen, indem die Verfasser überall nur das Wichtige brachten, Nebensächliches, durch das viele Lehrbücher so sehr belastet sind, aber mit Recht ausschieden.

Die Darstellung ist überall äußerst anschaulich. Durch schematische Zeichnungen, die in einigen Fällen vielleicht weniger schematisiert zu werden brauchten, wird das Verständnis zu fördern gesucht. Durch einfache Aufgaben, die wir z. B. bei Zug- und Druckfestigkeit, bei der lebendigen Kraft und ihren Anwendungen für sehr gut gewählt fanden, wird das Gelernte befestigt, das schon vorher zu kurzen Regeln zusammengefaßt und durch mnemotechnische Mittel eingeprägt ist. Überall ist das Bestreben erkennbar, vom Einfachen zum Schwierigeren fortzuschreiten und jeden Schritt durch möglichst einfache Versuche zu begründen. Wir heben als besonders gelungen die Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper sowie die strömende Elektrizität hervor. Daß die Verwendung des absoluten Maßsystems von vornherein nicht gescheut wird, der Begriff des Potentials zunächst als Grad des elektrischen Zustandes gleich beim Beginn der Reibungselektrizität eingeführt wird, kann nur gut geheißen werden.

Das insbesondere für technische Anstalten bestimmte Buch eignet sich auch für Realanstalten. Es seien einige technische Dinge hervorgehoben, die sehr wohl auch hier besprochen werden könnten und in dem Buche teils andeutungsweise teils ausführlich behandelt sind. Bei der Reibung findet der Pronysche Zaum seinen Platz, durch dessen Betrachtung Verständnis für die Messung der Arbeit bei Motoren erweckt wird. Bei der Hydromechanik geschieht des Wassermessers unter Beigabe einer deutlichen Skizze Erwähnung. Hier ist übrigens der Ausfluß aus Gefäßen etwas zu kurz abgetan. Einige Druckkurven erleichtern das Verständnis der bei der Kompression der Gase eintretenden Verhältnisse. Die Darstellung der Dampfanlagen ist ausgezeichnet. Sehr gut gewählte Beispiele erläutern dieses technisch wichtigste Kapitel. Beim Wesen der Wärme hätten die dreierlei Wirkungen, welche die zugeführte Wärme hervorruft (Temperaturerhöhung, Spannungserhöhung und äußere Arbeitsleistung), noch einmal getrennt hervorgehoben werden können. Auch bei der Elektrizitätslehre sind die neuen technischen Errungenschaften überall kurz erwähnt, so

die Verbesserungen beim Bogen- und Glühlicht, der Kurzschlußanker. Leider steht der Einführung dieser Bücher an norddeutschen Anstalten der Umstand entgegen, daß hier der Unterricht in eine Unter- und Oberstufe getrennt ist, worauf bei der Anordnung des Stoffes der Lehrbücher Rücksicht zu nehmen wäre.

Charlottenburg. H. Samter.

George Howard Darwin. Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte deutsche Ausgabe nach der zweiten englischen Auflage von Agnes Pockels zu Braunschweig. Mit einem Einführungswort von Prof. Dr. Georg von Neumayer, Wirkl. Geh. Admiralitätsrat und Direktor der deutschen Seewarte zu Hamburg und 43 Illustrationen im Text. XXII u. 344 S. (Leipzig, B. G. Teubner, 1902). Preis geb. ℳ 6,80.

Das Werk ist aus einer Reihe von Vorträgen entstanden, welche der Verfasser im Jahre 1897 am Lowell-Institut in Boston vor einem größeren Publikum gehalten hat. Derselbe sah sich hier vor die Aufgabe gestellt, in allgemein verständlicher Weise, unter Vermeidung jeglicher mathematischer Formeln, sein Thema zu behandeln, und die gleiche Art der Darstellung ist auch in dem vorliegenden Buche beibehalten worden. Der jüngst erschienenen deutschen Ausgabe hat der Direktor der Deutschen Seewarte zu Hamburg, Herr v. Neumayer, ein Geleitwort mit auf den Weg gegeben, in welchem dieser berufene Beurteiler auf die hohe Bedeutung des Darwinschen Werkes hinweist und seiner Bewunderung für die Leistung des Verfassers beredten Ausdruck leiht. In der Tat ist demselben die Lösung seiner Aufgabe in erstaunlichem Grade gelungen. Es werden nicht nur die Erscheinungen der Ebbe und Flut in Flüssen, Seen und Meeren und der Verlauf der Gezeiten in ihren mannigfachen Einzelheiten beschrieben, sondern auch die zur Erklärung derselben mit Hilfe mathematischer Deduktionen geschaffenen Theorien und die aus diesen letzteren hervorgegangenen, nicht selten recht verwickelten, Probleme in interessanter und allgemein verständlicher Weise auseinandergesetzt. So stellt sich Darwins „Ebbe und Flut" den besten populärwissenschaftlichen Werken, die wir in der Literatur besitzen, würdig an die Seite.

Doch nicht allein für den gebildeten Laien, auch für den Fachmann wird die Lektüre dieses Buches zu einer reichen Quelle der Belehrung und Anregung werden; sind doch bisher noch nirgends die Gezeitenphänomene und die mannigfachen mit diesen verknüpften Erscheinungen in so erschöpfender Weise im Zusammenhange dargestellt worden. Der Fernerstehende wird zunächst davon überrascht werden, wie tief ein scheinbar so beschränktes Thema, wie Ebbe und Flut, in die weitesten Gebiete naturwissenschaftlicher Forschung hineinragt, daß dem Gezeitenphänomen selbst für das Werden und Vergehen der Weltkörper die allergrößte Bedeutung zukommt. In der Auseinandersetzung dieser Zusammenhänge erhebt sich die Darstellung zu weit ausschauenden Kombinationen, fernste Vergangenheit und späteste Zukunft mit einander verknüpfend. Nicht minder fesselnd weiß der Verfasser aber auch die praktische Seite seines Themas zu behandeln, indem er schildert, welche Beobachtungs- und Rechnungsmethoden angewandt werden müssen, um dem täglichen Bedürfnisse des Seemanns nach einer

zuverlässigen Vorherbestimmung der Gezeiten zu genügen, wie zahlreich die Faktoren sind, die den Verlauf derselben beeinflussen, und welche Schwierigkeiten sich infolgedessen für die Aufstellung der Fluttabellen ergeben. Es wäre jedoch ein vergebliches Bemühen, den reichen Inhalt des Werkes in einer kurzen Besprechung auch nur annähernd skizzieren zu wollen. Nur die Überschriften der einzelnen Kapitel mögen hier noch genannt werden: I. Gezeiten und Beobachtungsmethoden. II. Seeschwankungen. III. Ebbe und Flut in Flüssen — Flutmühlen. IV. Historische Übersicht. V. Die fluterzeugende Kraft. VI. Abweichung der Lotlinie. VII. Elastische Deformation der Erdoberfläche durch wechselnde Belastung. VIII. Gleichgewichtstheorie der Gezeiten. XI. Dynamische Theorie der Flutwelle. X. Gezeiten in Seen. — Isorachienkarte. XI. Harmonische Analyse der Gezeiten. XII. Reduktion der Flutbeobachtungen. XIII. Gezeitentafeln. XIV. Genauigkeitsgrad der Vorherbestimmung der Gezeiten. XV. Chandlers Nutation. — Die Starrheit der Erde. XVI. und XVII. Gezeitenreibung. XVIII. Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden Flüssigkeitsmasse. XIX. Die Entwicklung der Weltsysteme. XX. Die Saturnringe.

Einem jeden Kapitel ist ein eigenes Literaturverzeichnis angefügt, das dem Fachmann den Zugang zu den Originalwerken wesentlich erleichtern wird. Rühmend hervorgehoben sei auch das ausführliche Inhaltsverzeichnis und das mit großer Sorgfalt angefertigte Register. Die Übersetzung ist durchaus sinngemäß und verdient — bis auf einige störende Anglizismen — volles Lob.

Berlin. E. Aschkinass.

Kronecker, L. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Bearbeitet und herausgegeben von K. Hensel. Erster Abschnitt. Vorlesungen über Zahlentheorie. Erster Band. Leipzig 1901, B. G. Teubner. XVI u. 509 S. gr. 8°.

Die Tendenz der Kroneckerscher Vorlesungen ist in dem Namen, den sie tragen, deutlich ausgesprochen. Die Bezeichnung *allgemeine Arithmetik*, unter welcher Kronecker mit der *Arithmetik* die *Algebra* und die *Analysis* zusammenfaßt, betont den engen Zusammenhang dieser Disziplinen und weist zugleich der *Arithmetik* die führende Rolle unter ihnen zu. Diese Auffassung wird gerechtfertigt durch die Entwickelung, welche die Arithmetik im verflossenen Jahrhundert genommen hat. Aus der Sonderstellung, welche sie gegenüber den übrigen Disziplinen einnahm, ist sie mehr und mehr herausgetreten.

Hatte schon Gauß selbst in den Disquisitiones arithmeticae die Schranken durchbrochen, welche er zwischen Arithmetik und Algebra errichten wollte, so zeigte Dirichlet, welchen Nutzen die Arithmetik aus der Verbindung ihrer Methoden mit denen der Analysis ziehen kann. Diese enge Zusammengehörigkeit wurde später immer offenbarer, und erst in neuester Zeit hat der Herausgeber dieser Vorlesungen dargetan, daß die Theorie der algebraischen Zahlkörper einer ganz ähnlichen Behandlung fähig sei wie die der algebraischen Funktionen. Wenn es nun hier auch meist die Arithmetik ist, welche aus der Analysis Vorteil zieht, so haben doch andererseits die schwierigeren Probleme, welche sich der Analysis darboten, diese zur Aufsuchung schärferer Beweismethoden gezwungen und schließlich zu einer Revision der Grund-

begriffe geführt, durch welche der in der Analysis herrschende geometrische Zahlbegriff durch einen rein arithmetischen ersetzt und damit die Einordnung der Analysis in die allgemeine Arithmetik vollzogen wurde.

Der Kroneckerschen Anschauung gemäß mußte die Anordnung des Stoffes in wesentlichen Punkten von der in den bisherigen Lehrbüchern innegehaltenen abweichen. Ein flüchtiger Blick auf das Inhaltsverzeichnis des vorliegenden ersten Bandes zeigt dies. Derselbe zerfällt in vier Abschnitte, denen eine eingehende historische Einleitung vorangeht. Hier findet auch die vor-Gaußsche Arithmetik die ihr gebührende Würdigung. An der Hand der wichtigsten Probleme wird die Entwickelung der Wissenschaft in reizvoller Weise dargestellt; insbesondere wird auch hier schon das Eingreifen der Analysis durch Erörterung der einfachen von Euler behandelten Fragen klargelegt und so das Verständnis für die schwierigeren vorbereitet. Der systematische Teil gibt im ersten Abschnitt (S. 57—142) diejenigen Untersuchungen, welche man gemeinhin in den Kapiteln über die *Teilbarkeit* und *Zerlegung* der Zahlen und die *Kongruenzen* findet. Aber nun erfolgt schon gleich im zweiten Abschnitt (S. 143—241) der wichtige Schritt von der Behandlung ganzer Zahlen zu der *ganzer ganzzahliger Funktionen*. Die von Kronecker eingeführten *Modulsysteme* stehen hier im Mittelpunkte des Interesses, ihre Theorie wird bis zur *Dekomposition der reinen Modulsysteme zweiter Stufe* fortgeführt. — Der dritte Abschnitt (S. 242—374) ist der *Anwendung der Analysis auf Probleme der Zahlentheorie* gewidmet und behandelt die Bestimmung der Mittelwerte arithmetischer Funktionen und ihren Zusammenhang mit den Dirichletschen Reihen. Der den Abschluß des Bandes bildende vierte Abschnitt (S. 375—496) enthält die *allgemeine Theorie der Potenzreste* und den *Beweis des Satzes über die arithmetische Progression*. Kronecker hat diesen Beweis in der Weise umgestaltet, daß er zugleich die Bestimmung eines Intervalles enthält, in welchem wenigstens eine Primzahl der Progression enthalten sein muß.

Soweit über den Inhalt der Kroneckerschen Vorlesungen. Ihre Bearbeitung war ein schwieriges Unternehmen. Handelte es sich doch darum, die Vorlesungen, die bei den verschiedenen Wiederholungen in ihren einzelnen Teilen sehr verschieden, bald eingehend, bald nur ganz kurz ausgeführt waren, überdies Fragen behandelten, die auch dem fortgeschrittenen Hörer nicht geringe Schwierigkeiten darboten, zu einem gleichmäßig fortschreitenden Lehrbuche umzuarbeiten, welches dem nur mit den Elementen der Infinitesimalrechnung vertrauten Studierenden zugänglich wäre. Die Aufgabe hat jedoch eine so glückliche Lösung gefunden, wie sie eben nur der geben kann, welcher nicht nur mit den Intentionen des Meisters völlig vertraut, sondern auch in dessen Arbeitsgebiet erfolgreichst selbsttätig ist. Im wesentlichen deckt sich natürlich der Inhalt des Buches mit dem, was Kronecker in seinen Vorlesungen gab, indem keine Untersuchung fortgelassen, keine völlig neu hinzugefügt ist. Wohl aber hat der Herausgeber, wo es die Abrundung des Stoffes wünschenswert erscheinen ließ, begonnene Untersuchungen vervollständigt. So ist namentlich das Problem der Dekomposition der Modulsysteme durch ihn zum Abschluß gebracht worden. Endlich sei noch auf die ihrem Wesen nach kritischen Betrachtungen über den Begriff der *Stufe* im Bereich der Modulsysteme von *ganzen ganz-*

zahligen Funktionen *mehrerer* Veränderlicher hingewiesen, welche eine Frage betreffen, deren Klärung dringend erwünscht scheint.

Charlottenburg, Januar 1903. E. Steinitz.

Annuaire des Mathématiciens 1901—1902, publié sous la direction de MM. C. A. Laisant et Ad. Buhl. Paris 1902, C. Naud. 468 S.

In einer Zeit, wo sich überall Bestrebungen regen, den persönlichen Verkehr unter den Mathematikern zu erleichtern, wo neben dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik eine Revue semestrielle des publications mathématiques entstanden, wo der Intermédiaire des mathématiciens, das Enseignement mathématique gegründet worden ist, wo internationale Mathematikerkongresse veranstaltet werden, wo die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften ins Leben gerufen worden ist, in einer solchen Zeit muß das vorliegende Werk mit Genugtuung begrüßt werden, bildet es doch einen weiteren, einen notwendigen Stützpunkt für diese Bestrebungen, welche in dem einen der beiden Herausgeber einen überaus tatkräftigen, begeisterten Fürsprecher gefunden haben.

Es ist naturgemäß, daß der erste Versuch, die Adressen sämtlicher Mathematiker zusammenzustellen, nämlich 1) der Mitglieder aller mathematischen und astronomischen Gesellschaften, 2) der Verfasser selbständiger mathematischer Arbeiten, 3) sämtlicher Lehrer der Mathematik, daß ein so schwieriger Versuch, sage ich, mancherlei Lücken, Unrichtigkeiten und Ungenauigkeiten aufweisen wird. Es wäre daher zu wünschen, daß sich recht viele die Mühe geben wollten, die von ihnen aufgefundenen Fehler den Verfassern mitzuteilen, damit dieselben bei Gelegenheit einer zweiten Auflage beseitigt werden können.

Berlin. E. Jahnke.

Alois Lanner. Naturlehre. Mit 377 Figuren, einer Spektraltafel und 4 meteorologischen Karten in Farbendruck. 377 S. Wien 1902, Jos. Rothsche Verlagsbuchhandlung.

Ein Leitfaden der Physik, Chemie und kosmischen Physik einschließlich der Meteorologie. Derselbe ist für die oberen Klassen der österreichischen Mittelschulen auf Grund der neuesten Lehrpläne der K. K. Unterrichtsverwaltung bearbeitet worden. Im Hinblick auf die Zwecke, denen das Buch demgemäß dienen soll, erscheint der dargebotene Stoff dem Referenten viel zu reichhaltig bemessen zu sein. Wenn im Schulunterricht tatsächlich der gesamte Inhalt dieses Leitfadens bewältigt werden soll, so kann dies nur dazu führen, die Oberflächlichkeit naturwissenschaftlicher Bildung zu fördern. „In der Beschränkung zeigt sich erst der Meister"; das bedenken leider noch zu wenige, die Lehrmeister sein wollen.

Der Verfasser behandelt in seinem Buche nach einer Einleitung über Maßeinheiten und Messen in acht Kapiteln die Mechanik, Wärme, Chemie, Magnetismus und Elektrizität, Wellenlehre, Akustik, Optik und kosmische Physik. Recht gut ist der Abschnitt über Mechanik gelungen. Hier ist vor allem das Bestreben zu rühmen, dem Leser die Grundbegriffe der Physik möglicht klar und präzise vor Augen zu führen. Weniger be-

friedigen dagegen die Kapitel über Elektrizität und über Optik. Die Angaben über die elektrischen Maße z. B. finden sich in sehr unübersichtlicher Weise an verschiedenen Stellen des Buches verstreut. Unzureichend sind auch die Ausführungen über die kritische Geschwindigkeit, Kirchhoffs Emissionsgesetz u. a. m. Die Untersuchungen von Heinrich Hertz werden nur in einem einzigen Satze erwähnt. Am bedenklichsten jedoch erscheint die höchst mangelhafte Darstellung des Energieprinzips;, in seiner vollen Allgemeinheit wird dasselbe an keiner Stelle des Buches klar ausgesprochen.

Berlin. E. Aschkinass.

F. Richarz. Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. In wissenschaftlich-gemeinverständlicher Weise dargestellt. Zweite, wenig veränderte Auflage. Mit 97 Abbildungen im Text. V u. 128 S. Leipzig 1902, B. G. Teubner.

In dieser Schrift wird in erweiterter Form der Inhalt von fünf Vorträgen wiedergegeben, die von dem Verfasser bei verschiedenen Gelegenheiten gehalten wurden. Kaum drei Jahre nach dem Erscheinen der ersten ist die Herausgabe der vorliegenden zweiten Auflage erforderlich geworden, welche noch durch einige Zusätze und Verbesserungen, sowie durch eine schönere Ausstattung bereichert worden ist. Gleich ausgezeichnet nach Form und Inhalt kann die Lektüre des Büchleins jedem aufs wärmste empfohlen werden, der sich für die Ergebnisse und Probleme der neueren Forschung auf dem Gebiete der Elektrizität interessiert. Auch der Fachmann wird an der eleganten und geistreichen Darstellung des Verfassers — insbesondere in den Auseinandersetzungen über die Faraday-Maxwellsche Theorie — seine Freude haben.

Die Titel der einzelnen Vorträge lauten folgendermaßen: I. Die magnetischen und elektrischen absoluten Maßeinheiten. Ampère, Volt, Ohm. — II. Die Hertzschen elektrischen Schwingungen und die stehenden Wellen auf Drähten. — III. Hertzsche Wellen in freier Luft; Strahlen elektrischer Kraft und die Telegraphie ohne Draht. — IV. Die Kraftlinien Faradays und seine Anschauungen über das Wesen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen. — V. Über Kathodenstrahlen und Röntgenstrahlen.

Im letzten Kapitel wäre die dort wiedergegebene ältere, von Crookes herrührende Deutung für die ponderomotorischen Wirkungen der Kathodenstrahlen gemäß den neueren Versuchen von Grätz (Ann. d. Phys. 1, S. 648. 1900) zu berichtigen gewesen.

Berlin. E. Aschkinass.

F. Exner und E. Haschek. Wellenlängen-Tabellen für spektralanalytische Untersuchungen auf Grund der ultravioletten Funkenspektren der Elemente. 2 Bände. IV u. 83 u. 269 S. Leipzig und Wien 1902, Franz Deutike.

Die Verfasser haben während der Jahre 1895—1901 die ultravioletten Funkenspektren fast aller bekannten Elemente neu ausgemessen und die Resultate schon früher in einer Reihe von Abhandlungen in den Sitzungsberichten der Kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien publiziert. In den vorliegenden beiden Bänden geben sie eine übersichtliche Zusammen-

stellung des gesamten von ihnen gewonnenen Zahlenmaterials. Vorausgeschickt wird eine Einleitung, in welcher einige allgemeine Gesichtspunkte, die angewandten Untersuchungsmethoden und die Genauigkeit der Messungen diskutiert werden.

Zur Erzeugung der Funken wurde in allen Fällen ein Hochspannungstransformator benutzt; die Spektren wurden von einem großen Rowlandschen Konkavgitter entworfen und photographisch aufgenommen. Die Untersuchungen erstrecken sich vom äußersten Ultraviolett bis ins Blau von der Wellenlänge 4700 Ångström-Einheiten. Als Vergleichsspektrum für die Ausmessung der Platten — dieselbe geschah auf einer Skala, auf welche die photographischen Aufnahmen projiziert wurden — diente das Bogenspektrum des Eisens und im äußersten Ultraviolett noch außerdem das Funkenspektrum einer Nickel-Kupferlösung auf Kohle, unter Zugrundelegung der Rowlandschen Zahlen. Die durchschnittliche Genauigkeit der Messungen wird zu 0,015 A.-E. angegeben. Im ganzen wurden 75 Elemente der Untersuchung unterzogen. Es sind das alle gegenwärtig bekannten, mit Ausnahme der seltenen Gase Argon, Helium etc., die sich nicht leicht bei normalem Druck untersuchen lassen, und des Terbiums, welches sich zur Zeit nicht in genügender Reinheit darstellen läßt.

Der erste Teil des Werkes enthält zuerst eine Tabelle, in welcher alle Elemente nach ihren chemischen Symbolen alphabetisch geordnet und bei jedem Element wenige Hauptlinien angegeben sind, die zunächst auftreten müssen, wenn das Element überhaupt vorhanden ist. Zugleich sind hier, wie auch in den folgenden Tabellen, überall die relativen Intensitäten der einzelnen Linien im Anschluß an die Rowlandsche Intensitätsskala zugefügt. Eine zweite Tabelle enthält alle Linien sämtlicher Elemente, deren Intensität nach der gewählten, von 1—1000 sich erstreckenden Skala größer als 2 ist; die Linien sind hier nach Wellenlängen geordnet unter Beifügung der Elemente, denen sie angehören.

Der zweite Teil umfaßt, wieder in alphabetischer Reihenfolge der Symbole, die vollständigen Spektren der einzelnen Elemente. Als linienreichstes Element wird das Uran mit nicht weniger als 5270 Linien aufgeführt.

Aus der Gesamtheit ihres Beobachtungsmaterials vermögen die Verfasser einen Zusammenhang mit dem periodischen System der Elemente zu erkennen. Vor allem zeigt die Anzahl der Linien, die den einzelnen Elementen zukommen, wenn letztere nach steigendem Atomgewicht geordnet werden, eine wechselnde Zu- und Abnahme (mit im allgemeinen steigender Tendenz gegen die hohen Atomgewichte), die dem periodischen System völlig entspricht.

Berlin. E. Aschkinass.

Gustav Holzmüller. Elemente der Stereometrie. Teil IV. Leipzig 1902. G. J. Göschen. XI u. 311 S. Preis 9 Mk., geb. 9,50 Mk.

Der letzte Band ist hauptsächlich mechanischen Begriffen gewidmet. Statisches und Trägheitsmoment von Flächen und Körpern werden als besondere Fälle von allgemeinen Momenten aufgefaßt, bei denen der Querschnitt der Fläche oder des Körpers, parallel zur Bezugsgeraden und -ebene, ein Aggregat von Gliedern der Form ax^p ist, wobei x den Abstand des

Querschnitts von dem Bezugsgebilde bedeutet. Dieselbe Behandlung wird zum Teil auch für Polarmomente durchgeführt, wobei dann x den Abstand von dem Bezugspunkt bedeutet und der Querschnitt für die Fläche ein Kreis und für den Körper ein Kugelstück ist. Die angeführten Momente werden so weit als möglich als Inhalte von Körpern anschaulich dargestellt. Es wird darauf hingewiesen, daß die Simpsonsche Regel für die Berechnung vorteilhaft ist, und daß sie außer für $p = 0, 1, 2$ auch für $p = 3$ gilt. Ferner werden die Trägheitsellipsen von Poinsot und Clebsch-Culmann ausführlich behandelt, ebenso das Zentrifugalmoment nebst der zugehörigen Lemniskate. Anwendungen begleiten die Darstellungen. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit den Flächen zweiten Grades und ihren verschiedenen Momenten. Ein Schlußabschnitt enthält einige Nachträge zum dritten Teile. —

Nachdem so die Elemente der Stereometrie einen Abschluß gefunden haben, ist es vielleicht angebracht, über das umfangreiche Werk noch einige Worte zu sagen. Über die Bedeutung, die der Verf. der elementaren Behandlung der Mathematik für diese selbst und für die Technik zumißt, ist viel gesprochen und geschrieben worden. Ich lasse es dahingestellt, welche von den Meinungen man vertritt. Für das vorliegende Werk wird jeder Unbefangene zur Überzeugung kommen, daß der Verf. in ihm eine große Menge von Wissen sowohl der Elementarmathematik im engeren Sinne, als auch der Elemente der Flächenlehre, der Mechanik, der theoretischen Physik und der Technik zusammengetragen und in zusammenhängender und harmonischer Weise aneinandergegliedert hat. Die Darstellung ist klar, obgleich manchmal etwas breit, aber sie wird von guten Zeichnungen unterstützt. Ich glaube, der Lehrer der Mathematik, besonders der an Fachschulen wirkende, wird viel Belehrung aus dem Buche schöpfen können und in ihm vor allem Anregung zu geeigneten Aufgaben finden. Für einen Studenten werden ferner einzelne genau durchgeführte Beispiele von Wert sein, die ihm erst einen klaren Blick über die im Hörsaal vorgetragenen Theorien verschaffen und zu denen der Hochschulunterricht in den seltensten Fällen genügend Zeit hat.

Dortmund, Februar 1903. H. Kühne.

Robert Fricke. Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen. 3. Aufl. Braunschweig 1902. Vieweg und Sohn. XV u. 218 S. Preis 5 Mk., geb. 5,80 Mk.

Dieser Leitfaden war vorher in drei getrennten Abteilungen erschienen und zunächst nur für den engeren Schülerkreis des Verfassers berechnet; es ist sehr zu schätzen, daß die drei Abteilungen jetzt zu einem Bande vereinigt auch dem größeren Kreise der Mathematiker zugänglich sind. Der Name des Verf. bürgte dafür, daß die dargestellten Sätze einen scharfen und dabei doch anschaulichen Ausdruck finden würden. Und das ist in der Tat der Fall. Ich kenne kein Buch über die Elemente der Analysis, das in solcher Knappheit und Anschaulichkeit die Begriffe und Sätze entwickelt. In der Einleitung werden nach Erledigung des Begriffs der Veränderlichkeit und der Funktion die elementaren Funktionen besprochen.

Der erste Abschnitt gibt dann die Grundlagen der Differentialrechnung, der zweite ihre Anwendungen. Der dritte Abschnitt ist der Integralrechnung gewidmet. Der vierte behandelt die Funktionen mehrerer Veränderlicher und gibt dabei einen Abriß der Grundelemente der Kurven- und Flächenlehre. Der fünfte Abschnitt erledigt die Anfänge der Differentialgleichungen, und der Anhang bringt die komplexe Zahl und die Funktionen komplexer Veränderlicher. Bemerkt sei, daß erfreulicherweise auch die hyperbolischen Funktionen ausführlich behandelt worden sind. Beweise werden des geringen Raumes wegen nur andeutungsweise gebracht, doch genügen diese Andeutungen in den meisten Fällen vollkommen. — Das Werk wird manchem Mathematiker zur schnellen Orientierung über irgend welche Punkte der Elemente willkommen sein. Vornehmlich wird es aber von Nutzen für den angehenden Techniker sein. Ich stimme darin dem Verf. vollkommen bei, wenn er sagt: daß die von ihm gegebenen Grundlagen für das weitere Studium der technischen Wissenschaften notwendig und hinreichend seien. Und den schweren Stoff hat ja der Verf. den Herren aus der Praxis durch anschauliche Darstellung und gute Skizzen schmackhaft gemacht.

Dortmund, Februar 1903. H. Kühne.

Martus. Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Kleine Ausgabe. Zweite Auflage. Dresden und Leipzig 1902. C. A. Kochs Verlagsbuchhandlung. 8⁰. XII u. 127 S. Ungeb. 2,80 Mk.

Die „Schul-Ausgabe" der „Astronomischen Geographie" von Martus (Leipzig 1881) ist jetzt in II. Auflage als „Kleine Ausgabe" der „Astronomischen Erdkunde" erschienen. Der Verf. gibt wiederum einen Auszug aus seinem größeren Werk gleichen Namens; doch soll die „Kleine Ausgabe" selbständig gebraucht werden können, während die frühere „Schul-Ausgabe" vornehmlich für die Repetition von im Unterricht Gebotenem eingerichtet war. So fanden sich in der alten Auflage mehrfach nur Überschriften für einzelne Absätze. Dem etwas veränderten Ziele entspringen verschiedene Umgestaltungen des Buches. Einzelne Entwickelungen sind breiter ausgestaltet. Ref. nennt hier: 24. Die Mikrometerablesung, 68. Unsere Stellung zur Mondsichel, 69. Datumwechsel, 82. Das Messen der Grundlinie und 115. Mitteleuropäische Zeit. Anderes ist zum Ausgleich fortgelassen. Eine Umstellung hat die Behandlung des ekliptischen Systems erfahren; sie wurde aus Abschnitt I „Der Sternhimmel" herausgenommen und dem Abschnitt II „Die Erde" zugewiesen. Es stört das den systematischen Aufbau und ist für Schulzwecke nicht nötig, wohl aber zweckdienlich, um ein unabhängiges Verständnis des Buches zu erleichtern. Neu hinzugefügt ist in der Einleitung eine kurze Darstellung der Hauptsätze der Kugeldreiecksrechnung.

Die neue Auflage enthält, wie schon im Titel, so auch in dem Buche selbst zahlreiche Verdeutschungen in der Ausdrucksweise.

Die vorzüglichen Figuren sind mit Auslassungen dieselben wie in der ersten Auflage.

Ref. kann das Buch für den Unterricht in der Mathematik, Physik und Erdkunde auf der Oberstufe unserer höheren Lehranstalten auch in seiner neuen Gestalt auf das wärmste empfehlen.

Schöneberg. E. Kullrich.

F. Bohnert. Elementare Stereometrie. Sammlung Schubert IV. Leipzig 1902. Göschensche Verlagshandlung. 8⁰. VII u. 183 S. 119 Fig. Geb. 2.40 Mk.

Teil I behandelt die stereometrischen Grundgebilde, die körperlichen Ecken, den Rauminhalt einfacher Körper, die Kugel und die regelmäßigen Körper. Bohnert will hier etwa bis an die Grenze des stereometrischen Pensums der sechsstufigen Realschulen gehen. Teil II bringt den Begriff des Zentralkörpers und seine Benutzung, die Simpsonsche und Guldinsche Regel, sowie einiges über Kegelschnitte. Von der darstellenden Geometrie, deren Elemente ja Bd. XII der Sammlung Schubert enthält, ist nichts aufgenommen.

Die Anordnung ist klar, die Darbietung geschickt, die Figuren sind meist gut und zweckentsprechend. Ref. vermißt, zumal da der Verfasser im letzten Abschnitt der Einleitung ausführlicher von den Figuren handelt, eine kurze Angabe der gewählten Darstellungsart räumlicher Gebilde, etwa unter Verweisung auf Bd. XII. Den Entwickelungen sind zahlreiche interessante Aufgaben mit Lösungen hinzugefügt. Hier wären bei numerischen Beispielen die angenäherten Lösungen besser als solche zu kennzeichnen; am irreführendsten ist S. 53 Aufgabe 41 die außerdem recht ungenaue Angabe $J : J_1 = 3$ als das Verhältnis des Volumens eines gleichseitigen Kegels und eines ihm eingezeichneten Cylinders von quadratischem Achsenschnitt. Falsch ist die S. 51 zu Aufgabe 27 angegebene Lösung. Die Lösungen S. 65 Aufgabe 7 und S. 163 Aufgabe 13 enthalten Druckfehler. S. 163 Z. 1 ff. ist im Ausdruck verfehlt, so daß schwer verständlich ist, was gemeint ist.

Das Buch ist für das Eindringen in die Stereometrie durch Selbststudium und zur Vertiefung von im Unterricht Behandeltem durch Privatlektüre recht empfehlenswert und kann auch von den Unterrichtenden wegen verschiedener Anregungen und wegen seines Aufgabenmaterials mit Nutzen verwendet werden.

Schöneberg. E. Kullrich.

Fr. Pietzker. Bardeys Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Leipzig u. Berlin. B. G. Teubner 1903. 8⁰. 160 S. Geb. 2,60 Mk.

Wie Pietzker selbst im Vorwort angibt, hat das vorliegende Buch von dem älteren, 1887 als „erster Teil“ „Aufgaben mit einer Unbekannten“ erschienenen außer dem Titel nichts übernommen; auch dieser hätte sehr wohl verändert werden können, etwa in: Musterbeispiele für die Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. Das Buch bringt auf den ersten drei Seiten allgemeine Gesichtspunkte für den Gleichungsansatz, in seinem übrigen weitaus überwiegenden Umfange Musterbeispiele. Wenn aber Pietzker Wert legt nicht nur auf die Beibehaltung von Bardeys Namen, sondern auch auf die der Bezeichnung, so ist letzteres durchaus dadurch begründet, daß Pietzker überall strebt, das Typische zu betonen, die allgemeinen Richtungen der Lösungswege zu kennzeichnen.

Die allgemeinen Gesichtspunkte der ersten drei Seiten sind sachgemäß und aus langer Erfahrung herausgewachsen; vielleicht hätten noch Anweisungen allgemeiner Art hinzugefügt werden können.

Bei den Musterbeispielen sind für die Anordnung ausschlaggebend die Gebiete, in welche uns die Einkleidung der Aufgaben führt, nicht die Art des auftretenden Gleichungssystems. Ja Pietzker nimmt auch Aufgaben auf, die mit Gleichungen überhaupt nichts zu tun haben (VI d und e). Die Aufgaben sind vielfach eigenartig, stets interessant und fast durchweg exakt sowohl in der Formulierung als auch in der Behandlung. Im einzelnen sind Aufgabe 30 und 35 nicht klar genug gefaßt, bei 49 ist die Fragestellung wohl durch eine andere zu ersetzen, bei 67 fehlt die Angabe des Zinsfußes ($3\frac{1}{2}\%$). S. 101 läßt sich Pietzker den Hinweis auf die gemeinsamen unendlich fernen Punkte der Hyperbeln und manche schöne Bemerkung, die sich gerade hieran knüpfen ließe, entgehen. Störend empfindet Ref. das Fortlassen der Klammern, wenn gemischte Rechenoperationen vorliegen, und die Division erst nach den anderen Rechnungsarten erfolgen soll, z. B. S. 40:

$$x \cdot 950 + y \cdot 850 : 1078 \cdot 900$$

statt:

$$(x \cdot 850 + y \cdot 850) : 1078 \cdot 900.$$

Pietzker schreibt für drei Kategorien von Lesern: 1) Lehrer, 2) Schüler, 3) solche Freunde der Mathematik, die ohne Anleitung von seiten einer Schule sich eine gewisse Fähigkeit in der Erwerbung eingekleideter algebraischer Aufgaben erwerben wollen.

Allen drei Kategorien kann das vorliegende Buch durchaus empfohlen werden.

Schöneberg. E. Kullrich.

A. von Braunmühl. Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie. Zweiter Teil: **Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart.** XI u. 264 S. mit 39 Figuren im Text. Leipzig, 1903, B. G. Teubner.

Die Vorrede zum ersten Teile des vortrefflichen Werkes trägt das Datum August 1899, die zum zweiten Teile das Datum Januar 1903. Das lesende Publikum hat also gut drei Jahre auf die sehnlich erwartete Fortsetzung zu warten gehabt. Der Verfasser freilich kann umgekehrt mit berechtigtem Stolze sagen, nur drei Jahre habe er gebraucht, um die Riesenarbeit zu vollbringen, welche in diesen $16\frac{1}{2}$ Druckbogen aufgespeichert ist. Wohl 600 Bücher und Abhandlungen sind so erwähnt, daß man die Überzeugung gewinnt, der Verfasser müsse sich mit ihnen genau bekannt gemacht haben, und wer selbst geschichtlich gearbeitet hat, der weiß, daß nicht selten die Anzahl der nutzlos durchgelesenen Schriften nicht geringer war als die solcher Vorarbeiten, welche man zu verwerten, also auch zu erwähnen hatte. Nimmt man überdies in Betracht, daß etwa die Hälfte des Bandes es mit Gegenständen zu tun hat, die geschichtlicher Sichtung noch nie unterbreitet waren, so erkennt man die Berechtigung des Wortes Riesenarbeit, dessen ich mich bedient habe.

Der Stoff ist in 6 Kapitel gegliedert: 1. die Erfindung der Logarithmen (S. 1—38 in 5 §§); 2. die Trigonometrie bis zum Beginn des 18. Jahrhunderts (S. 38—68 in 3 §§); 3. die Entwickelung der Trigonometrie im 18. Jahrhundert bis zum Auftreten Eulers (S. 68—101 in 4 §§); 4. Leonhard

Euler (S. 101—125 in 3 §§); 5. Eulers Zeitgenossen und Nachfolger im 18. Jahrhundert (S. 126—168 in 4 §§); 6. die Trigonometrie im 19. Jahrhundert (S. 169—250 in 8 §§). Der Verfasser hat also bis zum Schlusse die chronologische Einteilung in der Kapitelfolge festgehalten, die Zerlegung in dem Gegenstand nach verwandten Unterabteilungen innerhalb der Kapitel den Paragraphen vorbehaltend. Ersetzt man das Wort Kapitel durch Abschnitt, Paragraph durch Kapitel, so ist das die gleiche Gliederung, deren ich mich in meiner Geschichte der Mathematik bedient habe, welche sich demnach wenigstens für ein beschränktes Gebiet, wie es das der Trigonometrie ist, auch bis zur Gegenwart mit Vorteil benutzen läßt. Mit Vergnügen sah ich, daß Hr. v. Braunmühl noch in einer anderen Beziehung gleicher Ansicht mit mir ist. Er schließt jedes einzelne Kapitel mit einem Rückblick auf die behandelte Zeit und erleichtert dadurch dem Leser die Zusammenfassung in ein Gesamtbild, nachdem derselbe vorher mit Einzelheiten überhäuft vielleicht Gefahr lief, den eigentlichen Zeitcharakter nicht zu erkennen. Ich bin überzeugt, der Leser wird Hrn. v. Braunmühl für diese Erleichterung Dank wissen. Es ist fast überflüssig zu bemerken, daß auch das Auffinden von Einzelheiten durch ein sehr umfassendes Namen- und Sachregister ermöglicht ist.

Die vier ersten Kapitel sind Zeitabschnitten gewidmet, welche auch in meiner Geschichte der Mathematik Behandlung fanden, natürlich aber dort etwas weniger eingehend erörtert wurden. Gleichwohl gestehe ich unumwunden, daß einzelne Lücken ausgefüllt zu werden verdienen und an der Hand des 2. und besonders des 3. Braunmühlschen Kapitels ausgefüllt werden können. Im 2. Kapitel ist (S. 44) Thomas Streete (1626 bis 1696) als Verfasser einer englischen *Astronomia Carolina* von 1661 genannt. Das Buch muß sehr bekannt gewesen sein, da Doppelmayr es 1705 ins Lateinische übersetzte. Das Bedeutsamste in demselben ist die Einführung eines Hilfswinkels zur Erhöhung der logarithmischen Brauchbarkeit einer Formel, also ein Kunstgriff, der nicht erst 1748 von Thomas Simpson zur europäischen Übung gelangte. Auch zwischen Streete und Simpson wird die Anwendung von Hilfswinkeln nachgewiesen.

Zahlreicher sind die Ergänzungen unseres seitherigen Wissens im 3. Kapitel. Wohl zum ersten Mal ist in dem Briefe Newtons an Leibniz vom 13. Juni 1676 die Reihe für den Sinus eines ungraden Vielfachen eines Bogens:

$$\sin n\varphi = n \cdot \sin \varphi + \frac{(1-n^2)n}{3!} \sin \varphi^3 + \frac{(1-n^2)(9-n^2)n}{5!} \sin \varphi^5 + \cdots$$

nachgewiesen worden (S. 69). Für De Lagny wird mit dem Datum 1705 die Reihe für $\operatorname{tng} n\varphi$ aus $\operatorname{tng} \varphi$ in Anspruch genommen, mit welcher Johann Bernoulli erst 1712 an die Öffentlichkeit trat, und dem gleichen Aufsatze von 1705 wird nachgerühmt, daß in ihm zum ersten Mal die Zeichen der Tangente für Winkel verschiedener Quadranten sowie die Periodizität der Funktion richtig erkannt sind (S. 71—72). Wieder De Lagny war es, der 1719 durch die Behauptung, daß jeder rationalen Tangente ein irrationaler Bogen entspreche, eine Vorahnung des dem Ende des 19. Jahrhunderts vorbehaltenen Nachweises der Transcendenz von π äußerte (S. 81 und 83). In Newtons Arithmetica universalis ist die

trigonometrische Gleichung $\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\left(B+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$ erkannt. Nun ist aber augenscheinlich $\sin\left(B+\frac{C}{2}\right) = \sin B \cdot \cos\frac{C}{2} + \cos B \cdot \sin\frac{C}{2} = \sin B \cdot \cos\left(90^0 - \frac{A+B}{2}\right) + \cos B \cdot \sin\left(90^0 - \frac{A+B}{2}\right) = \sin B \cdot \sin\frac{A+B}{2} + \cos B \cdot \cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{A+B}{2} - B\right) = \cos\frac{A-B}{2}$, die Newtonsche Gleichung also in Übereinstimmung mit $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$, welche Mollweide 1808 veröffentlichte und welche dessen Namen führt (S. 87). Die *Analysis triangulorum* (1746) von Friedrich Wilhelm von Oppel wird einer unverdienten Vergessenheit entzogen und als Ziel dieses Schriftstellers hervorgehoben, aus wenigen geometrisch gewonnenen Sätzen die ganzen Formelsysteme der ebenen und sphärischen Trigonometrie durch algebraische Rechnung zu entwickeln (S. 98).

Das 5. und 6. Kapitel bilden Hrn. von Braunmühls eigenstes Eigentum, da zusammenhängende Vorarbeiten für die hier behandelten Zeitabschnitte fast ganz fehlen. Um so schwieriger ist es aber auch, nach einmaligem Durchlesen dieser beiden Kapitel ein endgültiges Urteil zu fällen. Erst wiederholte Benutzung kann und wird zeigen, ob diese Kapitel wirklich auf der Höhe der ihnen vorhergehenden stehen. Ich kann nur erklären, daß sie auf mich den vortrefflichsten Eindruck machen. Die Arbeiten von Pingré, von Lambert, von Klügel, von Lexell, von L'Huillier, von Lagrange, von Cagnoli, von Maskelyne, von Boscowich, von Mauduit, von Kästner, von Karsten, von Legendre, um nur die Koryphäen des 5. Kapitels zu nennen, dann wieder aus dem 6. Kapitel die Arbeiten von Carnot, von Gauß, von Bohnenberger, von Cauchy, von Bretschneider, von Karl Friedrich Schulz, von Gudermann, von Möbius, von Grunert, von Delambre, die neuesten Untersuchungen von Study und von zahlreichen anderen in den verschiedenen Ländern, deren Gelehrte an dem Fortschreiten der mathematischen Wissenschaften beteiligt sind, sie alle sind erörtert und gewürdigt. Vielleicht hätte Pfleiderers ganz eigenartige Trigonometrie und ebenso die von von Münchow etwas ausführlicheres Verweilen gerechtfertigt; vielleicht wäre auf die Meinungsverschiedenheit, ob $\sin\varphi^2$ oder $\sin^2\varphi$ zu schreiben ist und auf den Ursprung der letzteren Schreibweise, zugleich auch auf das $\sin^{-1}\varphi = \arcsin\varphi$ englischer Schriftsteller einzugehen gewesen. Indessen sind dieses nur geringfügige Wünsche gegenüber der freudigen Zustimmung zu dem ganzen Werke.

Heidelberg. M. Cantor.

H. G. Zeuthen. Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Édition française, revue et corrigée par l'auteur, traduite par Jean Mascart. Paris: Gauthier-Villars, 1902. IX u. 296 S. 8⁰.

Die dänische Originalausgabe dieser kurzgefaßten Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter ist 1893 erschienen, die deutsche

Übersetzung 1896. Nunmehr liegt auch eine französische Ausgabe vor, in welcher der Verf. einige neue Ergebnisse der mathematischen Geschichtsforschung hat verwerten können. An dem Zustandekommen dieser neuen Ausgabe hat der beste französische Kenner der Geschichte der Mathematik im Altertum, Herr Paul Tannery, sein Interesse dadurch bekundet, daß er einige Anmerkungen beigesteuert hat.

Das Buch war zunächst für Studenten und Lehrer der Mathematik in Dänemark bestimmt, wo die geltenden Prüfungsbestimmungen eine Übersicht über die Geschichte der Mathematik fordern. Der Verf. hebt dasjenige aus der Geschichte der Mathematik der behandelten Zeit hervor, was dem bezeichneten Leserkreise zu wissen wichtig ist. Daher fehlt der gelehrte Apparat, den die Anzeige der deutschen Ausgabe im Archiv der Math. (2) **15**, Lit. Ber. S. 27 vermißte; dafür ist die knappe Darstellung sachlich und anregend. Durchaus zu billigen ist aus denselben Gesichtspunkten die verhältnismäßige Breite, mit der die griechische Mathematik behandelt ist, und die Kürze, mit der die übrigen Teile abgetan sind.

Bei der Erscheinung der Übersetzung eines Werkes, das sich durch seine Vorzüge den Beifall der sachkundigen Gelehrten und der lernenden Jugend erworben hat, bedarf es keiner neuen eingehenden Besprechung, obwohl nicht verschwiegen werden darf, daß manche Bedenken gegen eine Eigenart des hochverdienten Verfassers, die Hineintragung subjektiver Ansichten, ausgesprochen worden sind. Als einen Vorzug der französischen Ausgabe wollen wir aber das recht vollständige alphabetische Namen- und Sachregister erwähnen.

Dagegen dürfte es vielleicht an der Zeit sein, nachdrücklich diejenigen Bestrebungen zu unterstützen, aus denen die Abfassung des Buches hervorgegangen ist.

Der Stoff, den der Mathematiker auf den Mittelschulen lehren muß, hat bisher auf den Universitäten nur wenig Berücksichtigung gefunden. Daher hatte der Verein mathematischer Mittelschullehrer in Italien Associazione „Mathesis" auf der Turiner Versammlung im September 1898 auf die Tagesordnung die Frage gesetzt nach den Modifikationen in der Anordnung der mathematischen Universitätsstudien zur Erzielung guter Mittelschullehrer, und der Bericht des Herrn Luigi Certo über diese Frage, der unter anderen Forderungen die Einrichtung einer Vorlesung über Geschichte der Mathematik verlangte, wurde mit jubelndem Beifalle aufgenommen. Auf derselben Versammlung hatte Herr Gino Loria in längerem Vortrage die Bedeutung der Geschichte der Mathematik als eines Bindegliedes zwischen dem Mittelschul- und dem Universitäts-Unterricht beleuchtet und besonders die Wichtigkeit des Studiums der euklidischen Elemente auseinandergesetzt.

Ähnliche Anregungen sind bei den verschiedenen Völkern gegeben worden und nicht ganz erfolgslos geblieben. So berichtet Herr Mansion in der Bibliotheca Mathematica (3) **1**, 232—236 über die Kurse in der Geschichte der Mathematik an der Universität zu Gent und erzählt am Schlusse seines Berichtes, daß Zeuthens Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, ergänzt durch Felix Müllers Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, als literarische Hilfsmittel dienen. „Das Zeuthensche Buch scheint, obwohl stark durchsetzt mit persönlichen Ansichten des

Autors — vielleicht gerade deshalb —, anregender zu sein als die Handbücher von Ball, Cajori, um so mehr also als die von Hoefer und von Boyer."

Leider reicht das Buch des dänischen Gelehrten nur bis zum Ende des Mittelalters: doch bemerkt Herr P. Tannery in seiner ausführlichen Anzeige der französischen Übersetzung (Bull. des sc. math. (2) **26**, 313—319), daß Herr Zeuthen das dänische Manuskript der Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert schon vollendet hat. Wir können also hoffen, die Fortsetzung des vorliegenden Bandes bald in die Hände zu bekommen. Der geistvolle und kenntnisreiche Verfasser wird durch die Veröffentlichung des zweiten Bandes, der den Stempel seines Geistes tragen wird, das Interesse an der Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik wiederum fördern, und hoffentlich wird der vom Auslande kommende neue Anstoß dazu beitragen, in dem deutschen Universitätsunterrichte die vis inertiae zu überwinden, die an den meisten Hochschulen einer bescheidenen Bewegung nach der gewünschten Richtung entgegensteht, obschon doch gerade Deutschland in Moritz Cantor den ersten Geschichtsforscher der Mathematik besitzt und zahlreiche jüngere Gelehrte als Nachfolger des Nestors ihrer Wissenschaft voll Eifer tätig sind. Anzeichen einer solchen Bewegung sind ja an einigen Stellen bereits vorhanden.

Berlin. E. Lampe.

Karl T. Fischer. Der naturwissenschaftliche Unterricht in England, insbesondere in Physik und Chemie. 94 S. Leipzig 1901, B. G. Teubner.

Diese äußerst klar und anregend geschriebene Studie gibt Anschauungen und Erfahrungen wieder, welche der Verf. auf seinen beiden Reisen im Jahre 1897 und 1898/99 mit scharfem Auge und offenem Ohr über den naturwissenschaftlichen Unterricht in England gesammelt hat. Jeder, der sich für die Entwicklung und Vertiefung dieses Unterrichts interessiert, wird in dem Büchlein reiche Anregung finden. Besonders interessant ist die Beschreibung und Kritik der besonders von Armstrong vertretenen „heuristischen Methode", welche fordert, man soll den Schülern auf allen Stufen der Ausbildung „nicht nur von den Dingen erzählen oder Dinge zeigen, sondern man solle in ihnen die Fähigkeit vermitteln, Aufgaben selbst durch das Experiment zu lösen — d. h. man solle sie darauf hinleiten, selbst zu ‚entdecken', und zwar sollten ihre Entdeckungen in enger Beziehung zu den Gegenständen und Erscheinungen des täglichen Lebens stehen". Die Vorzüge und Klippen dieser Methode werden klar auseinandergesetzt.

Als Fazit der Betrachtung des englischen Unterrichtswesens tritt für uns der Wunsch hervor, den naturwissenschaftlichen Unterricht enger als bisher an unmittelbar wahrnehmbare Erfahrungen und an Experimente anzuschließen und von Anfang an die Schüler zu gewöhnen, an messenden Versuchen Freude zu empfinden. Freilich ist dazu nicht nur eine bessere Ausstattung der Schulen mit Apparaten und Laboratorien, sondern auch eine andere Ausbildung der Lehrer nötig. Für einfache Laboratorien und ihre Einrichtung finden sich in dem Buche gute Vorbilder.

Für die zweite Reise hat das Bayerische Kultusministerium dem Verf. ein Stipendium bewilligt. Hoffentlich gibt der Bericht, welchen er dem

Ministerium eingereicht hat, Veranlassung zu Verbesserungen im naturwissenschaftlichen Unterricht an den bayerischen Schulen. Möchten auch die Leiter des Unterrichtswesens in anderen Staaten aus dem Fischerschen Buche Anregung nicht bloß zum Nachdenken, sondern auch zu Taten gewinnen!

Berlin. E. Pringsheim.

E. Goursat. Cours d'analyse mathématique. T. I. Paris, Gauthier-Villars, VI + 620 S. 1902.

Der vorliegende Band behandelt ungefähr den Stoff der älteren französischen Lehrbücher der Infinitesimalrechnung mit Ausschluß der Differentialgleichungen, der Variationsrechnung und der Funktionen eines komplexen Arguments. Den Anfang machen die Grundbegriffe der Differentialrechnung für Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher; daran schließt sich die Taylorsche Reihe mit Anwendungen auf die Theorie der Extreme, sodann das bestimmte Integral, das unbestimmte Integral, die mehrfachen Integrale. Es folgt die Theorie der Reihen mit Anwendungen auf Potenzreihen und Fouriersche Reihen; endlich werden die einfachsten geometrischen Anwendungen der Infinitesimalrechnung entwickelt.

Als charakteristische Eigenschaft des Werkes darf die große Sorgfalt bezeichnet werden, mit der die Beweise strenge im Sinne der modernen arithmetischen Analysis geführt werden. Auf eine begriffliche Auseinandersetzung über das Wesen der Irrationalzahl wird verzichtet; an der Spitze steht der Satz, daß jede Größe, die beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, einem bestimmten Grenzwerte zustrebt. Hierdurch wird eine von Dedekind in seiner grundlegenden Schrift über die Stetigkeit ausgesprochene Bemerkung verifiziert, nach welcher der angeführte Satz, ebenso wie auch andere ihm äquivalente, als Fundament der Infinitesimalanalysis genommen werden kann. Wenn aber auch der Verfasser des vorliegenden Werkes die volle Strenge der Beweise anstrebt und, soviel wir sehen, erreicht hat, so verzichtet er doch darauf, in jedem Falle von den allgemeinsten Voraussetzungen auszugehen, und beschränkt sich wesentlich auf die in den konkreten Einzelproblemen vorkommenden Fälle. Jede Theorie wird durch Beispiele erläutert, die entweder ausgeführt oder als Übungen dem Leser überlassen werden. An bemerkenswerten Einzelheiten sei folgendes erwähnt.

Die Differentialrechnung beginnt mit dem Rolleschen Satz, der oft erst später erscheint; sehr bald folgt eine genaue Theorie der impliciten Funktionen von einer und mehreren Variablen und der Funktionaldeterminanten. Im Anschluß an die Transformation der höheren Ableitungen in neue Variable werden die Transformationen von Legendre und Ampère sowie der allgemeine Begriff der Berührungstransformation erörtert. Bei der Theorie der Extreme der Funktionen von zwei Variablen wird auch der für gewöhnlich zweifelhaft bleibende Fall $rt - s^2 = 0$ nach Scheeffer untersucht.

Der Begriff des bestimmten Integrals wird in aller Strenge entwickelt; für die Rektifikation der Kurven wird eine hinreichende Bedingung gegeben. Bei der Gaußschen Methode der mechanischen Quadratur findet sich die interessante Bemerkung, daß diese Methode, wenn man sie auf willkürliche

Funktionen anwenden will, eigentlich den Satz von Weierstraß voraussetzt, daß jede stetige Funktion in einem beliebigen Intervall mit gleichem und vorgeschriebenem Grade der Annäherung durch ein Polynom dargestellt werden kann. Ist nun dieses etwa vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, so läßt sich über die Größenordnung des Fehlers der Darstellung im Vergleich zur Summe der Glieder vom $(n+1)^{\text{ten}}$ bis zum $2n^{\text{ten}}$ im allgemeinen nichts aussagen, und so bleibt der Nutzen der Gaußschen Methode bei ganz beliebigen Funktionen beim gegenwärtigen Stande der Theorie einigermaßen zweifelhaft.

Aus der Theorie des unbestimmten Integrals sei die schöne Methode von Hermite zur Integration rationaler Brüche erwähnt, welche zeigt, daß der rationale Teil des Integrals ohne Auflösung algebraischer Gleichungen hergestellt werden kann. Bemerkenswert ist hier auch die Reduktion der Integrale $\int Re^{\omega x}dx$, in denen R eine rationale Funktion von x ist, auf den Integrallogarithmus. Die mehrfachen Integrale werden zur genauen Definition des Areals einer krummen Fläche benutzt und mit krummlinigen Integralen in Verbindung gebracht. Als analytisches Beispiel erscheint der dritte Gaußsche Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Weshalb übrigens dieser als Theorem von d'Alembert bezeichnet wird[1]), ist mir nicht verständlich. Die allgemeine Vorstellung, daß eine Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln besitzt, war doch schon vor d'Alemberts Zeiten verbreitet, und der von diesem unternommene Beweisversuch steht noch hinter den ebenfalls mißlungenen von Euler und Lagrange zurück.

In der Theorie der Reihen ist es interessant zu verfolgen, wie schon gleich anfangs der von Cauchy herrührende Begriff der größten Grenze oder, wie wir jetzt sagen, oberen Unbestimmtheitsgrenze eingeführt und benutzt wird, um das Kriterium dafür abzuleiten, daß eine Größenfolge gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert. Überhaupt geht aus der Darstellung dieses Gegenstandes hervor, wieviel die moderne Kritik der Infinitesimalbegriffe Cauchy verdankt, dessen Verdienste auf diesem Gebiet gegenüber neueren Autoren vielfach in Vergessenheit geraten sind. Erörtert wird die absolute und gleichmäßige Konvergenz und letzterer Begriff auch auf Integrale angewandt, die einen Parameter enthalten und bis zur Grenze ∞ erstreckt sind. In der Theorie der Potenzreihen werden ähnlich, wie es im ersten Bande der Allgemeinen Arithmetik von Stolz geschieht, eine Reihe von Sätzen vermittelst reeller Variablen bewiesen, die man meist in die Theorie der Funktionen komplexen Arguments verweist: die Taylorsche Formel, die Formeln für Substitution und Division der Potenzreihen. Diese Entwicklungen beruhen aber auf dem nicht ganz leicht zu beweisenden Satz: daß eine konvergente Doppelreihe mit positiven Gliedern eine von der Anordnung unabhängige Summe hat.

Bei der Summierung der Fourierschen Reihe gibt unser Werk eine Modifikation des Dirichletschen Beweises und folgt dabei der Darstellung einer schönen Abhandlung von Bonnet (Brüsseler Preisschriften Bd. 23). Für die darzustellende Funktion wird vorausgesetzt, daß sie eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten und Extremen besitze. Bei dieser Gelegenheit sei darauf hingewiesen, daß, wie Poincaré in seinen Vorlesungen über

1) In den französischen Lehrbüchern ist dies allgemein Gebrauch. Red.

die Theorie der Wärmeleitung gezeigt hat, die Dirichletsche Argumentation sich sogar noch etwas vereinfacht, wenn man die allgemeinere Voraussetzung macht, die darzustellende Funktion sei die Differenz zweier monotoner d. h. nicht zunehmender oder nicht abnehmender Funktionen. Die dieser Bedingung unterworfenen Funktionen sind dann identisch mit denjenigen, welche Jordan als Funktionen mit beschränkter Schwankung bezeichnet.

Aus den Kapiteln über die geometrischen Anwendungen, die im ganzen vielleicht einen allzu konservativen Charakter zeigen, sei hervorgehoben, daß in der Theorie der Enveloppen eine Bemerkung vorkommt, die meist erst bei den singulären Lösungen der Differentialgleichungen begegnet: daß das Resultat der Elimination von a aus den Gleichungen

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = 0$$

nicht nur die Enveloppe darstellt, sondern auch den Ort der Singularitäten der Kurven, welche die durch die erste Gleichung definierte Schar bilden.

Das Werk von Goursat ist ein neues vortreffliches Hilfsmittel für das tiefer dringende Studium der Analysis und für die wissenschaftliche Untersuchung.

Berlin. A. Kneser.

E. T. Whittaker. A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite series and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions. Cambridge, University Press. 378 S. 1902.

Das Werk steht hinsichtlich der funktionentheoretischen Methoden und der Strenge seiner Beweise im ganzen auf modernem Standpunkte, und zeigt gewisse in der englischen Mathematik herkömmliche Vorzüge: die Allgemeinheiten werden auf den geringstmöglichen Umfang beschränkt; das individuelle Leben der Einzelaufgabe findet Interesse, und mit den Anwendungen wird lebhafte Fühlung gehalten. Die Anordnung des Stoffes ist übersichtlich und groß die Zahl der Übungsaufgaben, welche durchgehends höhere Anforderungen stellen, als man es in den verbreiteten Aufgabensammlungen gewohnt ist.

Nach einer kurzen Darstellung des Rechnens mit komplexen Zahlen beginnt das zweite Kapitel, überschrieben die Theorie der absoluten Konvergenz, mit jenem Satze, den du Bois-Reymond als das allgemeine Konvergenz- und Divergenzprinzip bezeichnet, und entwickelt die wichtigsten Sätze der allgemeinen Reihentheorie, darunter die Sätze von Cauchy, Abel, Mertens über das Produkt absolut und bedingt konvergenter Reihen, sowie Kriterien für die Konvergenz unendlicher Produkte und Determinanten.

Im dritten und vierten Kapitel werden die Grundlehren der allgemeinen Funktionentheorie mit Benutzung des Konturintegrals entwickelt und die gleichmäßige Konvergenz der Summen von Funktionen reeller und komplexer Variablen betrachtet. Den Satz von Weierstraß, daß eine gleichmäßig konvergente Summe von Potenzreihen wie eine Summe von endlich vielen in eine einzige Potenzreihe umgewandelt werden kann, vermissen wir in dieser einfachen Form, wenngleich er in den §§ 53 und 54 implizite enthalten ist.

Es folgen sodann mannigfaltige Anwendungen der Residuenrechnung und ein reichhaltiges Kapitel über die Entwickelung von Funktionen in Reihen und Produkte, in welchem die Formeln von Lagrange, Laplace, Bürmann und ähnliche aus einer allgemeinen von Darboux herrührenden abgeleitet werden. Die Zerlegung einer transcendenten ganzen Funktion in ihre Primfaktoren wird nur für den Fall, daß die logarithmische Ableitung im Unendlichen unter einer festen Grenze bleibt, entwickelt.

Bemerkenswert ist das Kapitel über die Fouriersche Reihe dadurch, daß neben dem Dirichletschen auch der von Cauchy in den Exercices vom Jahre 1827 gegebene Konvergenz- und Gültigkeitsbeweis entwickelt wird, bei welchem die einzelnen Glieder der Reihe als die Residuen einer meromorphen Funktion einer komplexen Variablen erscheinen, und die Summe einer endlichen Zahl von Gliedern durch ein Konturintegral über jene Funktion dargestellt wird. Bei der vorliegenden Form des Cauchyschen Beweises fällt auf, daß die Eigenschaft der dargestellten Funktion, nur eine endliche Anzahl von Extremen zu besitzen, nirgends benutzt wird. Das erklärt sich daraus, daß die Diskussion des Ausdruckes J_2 auf S. 134 wohl nicht ganz ausreicht; die komplexe Variable w beschreibt nämlich, wenn k wächst, einen sehr langen Integrationsweg, so daß das Integral einer kleinen Größe nicht mehr, wie auf S. 135 geschieht, als klein angesehen werden kann. Die hier vorhandene Lücke füllt man leicht aus durch die von Picard im Traité d'analyse II S. 170 gegebene Entwickelung, bei welcher gerade die erwähnte Voraussetzung hinsichtlich der dargestellten Funktion wesentlich ist.

Den Schluß des allgemeinen Teils bildet ein Kapitel über asymptotische Darstellung im Sinne der Theorie von Poincaré.

Die zweite Hälfte des Werkes enthält monographische Darstellungen der wichtigsten speziellen Transcendenten, bei welchen funktionentheoretische Methoden bevorzugt werden und besonders die Integralformeln durchweg aus Konturintegralen hergeleitet werden. An erster Stelle steht die Gammafunktion; dann folgt die hypergeometrische Reihe, bei welcher die Riemannsche Theorie sowie die Darstellung durch Schleifenintegrale gegeben wird. Besonders reichhaltig ist ein Kapitel über die Besselschen Funktionen, in welchem unter anderem von der asymptotischen Darstellung eingehend gehandelt wird.

Nach einem kurzen Abschnitt über die Reduktion der partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik auf gewöhnliche Differentialgleichungen schließt das Werk mit einer Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen, in welcher $\wp u$ und $\mathrm{sn}\, u$ durch die Eisensteinschen Partialbruchreihen definiert werden und im ganzen der Gedankengang von Liouville verfolgt wird. Die Weierstraßschen Funktionen werden insofern bevorzugt, als die Funktion σ, nicht aber die θ betrachtet werden. Bei der Ableitung des Additionstheorems von $\mathrm{sn}\, u$ begegnet uns eine originelle Wendung; während die an Lagrange anknüpfenden Beweise der Additionsformel auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückgehen, erscheint hier (§ 192) die gesuchte Formel als Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung vom Clairautschen Typus. Auch das Additionstheorem von $\wp u$ wird sehr elegant bewiesen. Bei der Inversion des Integrals erster Gattung wird neben der Hermiteschen Methode die von Weierstraß herrührende gegeben, bei

welcher eine Nullstelle des unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Polynoms vierten Grades als bekannt vorausgesetzt wird. Wir hätten an dieser Stelle lieber die von Halphen entwickelte Inversionsmethode gesehen, welche die Wurzeln jenes Polynoms nicht benutzt und deshalb weit praktischer ist; sie ist als eine der schönsten Anwendungen der Funktion $\wp u$ anzusehen, bei welcher diese durch die Jacobischen Funktionen nicht wohl ersetzt werden kann. (S. etwa Appell et Lacour, Fonctions elliptiques Nr. 157.)

Berlin. A. Kneser.

Fürle, H. Rechenblätter. Berlin 1902, Mayer und Müller.

Der jüngste Zweig der angewandten Mathematik — die Nomographie — gibt Methoden zur Konstruktion von Rechentafeln an; eine solche Tafel, die einer bestimmten, durch eine vorgegebene Gleichung definierten, Abhängigkeit zwischen veränderlichen Größen entspricht, gestattet unmittelbar die Werte der abhängigen Variablen aus ihr zu entnehmen, wenn die unabhängigen irgend welche speziellen Werte haben. Eine Rechentafel, z. B. für drei durch eine Gleichung $F(x;\ \alpha,\ \beta) = 0$ gebundene Variablen x, α, β bietet einen graphischen Ersatz für eine numerische Tabelle mit zwei Eingängen, ohne dabei jedesmal eine geometrische Konstruktion ausführen zu müssen, wie es die Methoden der graphischen Statik für die Auflösung von Gleichungen oder Gleichungssystemen benötigen. In ausführlicher Weise behandelt diesen Gegenstand Maurice d'Ocagne in seinem Traité de Nomographie, zu welchem eine Einführung von Herrn F. Schilling bei Teubner 1900 erschienen ist.

Unabhängig von Herrn d'Ocagne, obwohl später, hat Herr Fürle in der „wissenschaftlichen Beilage zum Jahresbericht der Neunten Realschule zu Berlin 1902“ eine Theorie der Rechenblätter gegeben und einige Rechenblätter für die Praxis konstruiert, die im Erscheinen begriffen sind. Es liegen bis jetzt vor zwei Rechenblätter zur Auflösung der Gleichung $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$ und eine dritte Tafel für photographische Zwecke. Letztere ist eine graphische Darstellung der Gleichungen $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$; $\frac{a}{f} = 1 + \frac{\alpha}{\beta}$; $\frac{b}{f} = 1 + \frac{\beta}{\alpha}$, in denen a die Gegenstandsweite, b die Bildweite, f die Brennweite, α die Gegenstandsgröße, β die Bildgröße bedeutet. Dasselbe Rechenblatt kann auch zur Berechnung des Zusammenhanges zwischen den elektrischen Widerständen von Stromverzweigungen und dem Gesamtwiderstande, zur Proportionsrechnung, Multiplikation und Division verwendet werden.

Die Rechenblätter können auf das beste empfohlen werden, da sie langweilige, sich stets wiederholende Rechnungen, wie sie in der Technik fortwährend vorkommen, überflüssig machen. Das Einarbeiten in den Gebrauch der Rechenblätter bietet keinerlei Schwierigkeiten, und dem Techniker, der den Vorzug derselben — eine große Zeitersparnis — kennen gelernt hat, werden die Rechenblätter bald ebenso unentbehrlich sein, wie der logarithmische Rechenschieber, der als die einfachste Art einer solchen Rechentafel aufgefaßt werden kann.

Berlin. Alfred Hauck.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

89. Die Funktion $y = e^{\sin x}$ in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln, danach die Quadratur der Kurve $y = e^{\sin x}$ auszuführen und zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, 0 und π, 0 und 2π auf 8 Dezimalen genau zu berechnen.

Berlin. E. Lampe.

---

90. Für die Kurven $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ (in rechtwinkligen Koordinaten) 1) die Koordinaten der Wendepunkte, 2) den Krümmungsradius als Funktion des Radius r vom Koordinatenanfang nach dem betreffenden Punkte, 3) den Flächeninhalt zu finden.

Berlin. E. Lampe.

---

91. Durch fortgesetzte Halbierung des Zentriwinkels erhält man bekanntlich aus dem regulären n-Eck das $2n$-Eck. Faßt man das reguläre Polygon als ein Ponceletsches mit dem singulären Modul $\varkappa = 0$ auf, so entsteht die allgemeine Aufgabe, das Ponceletsche $2n$-Eck zu konstruieren, welches mit dem gegebenen n-Eck zu demselben Modul gehört. Wie wird diese Aufgabe gelöst?

Sagan. P. Kokott.

---

92. Die aus Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung gebildeten Dreiecke zerfallen bekanntlich in zwei Klassen, jenachdem die sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte liegen oder nicht. Diese beiden Klassen von Berührungspunktgruppen ergänzen sich in gewissem Sinne *dualistisch*; denn während bei den ersteren der Pascalsche Satz gilt, also die Pascalsche Konstruktion zu drei Restpunkten führt, die auf einer Geraden liegen, führt bei den letzteren die Pascalsche Konstruktion zu drei Restpunkten, die mit den bezüglichen Ecken des Dreiecks verbunden drei durch einen Punkt gehende Gerade liefern. Desgleichen gilt die Umkehrung dieses Satzes.

Königsberg i/P. W. Fr. Meyer.

---

93. Es liege eine dreiseitige Determinante $D = (a_1 b_2 c_3)$ vor. Man bilde einmal die Determinante der reziproken Elemente $\Delta = \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{c_3}\right)$, andererseits die der reziproken ersten Minoren $\Delta' = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\beta_2}, \frac{1}{\gamma_3}\right)$. Die Zähler dieser beiden Determinanten seien mit Z, Z' bezeichnet. Dann gilt die Zerlegung: $Z' = ZD^2$. Diese Formel ist zu beweisen und ev. auf n-seitige Determinanten zu verallgemeinern.

Königsberg i/P. W. Fr. Meyer.

---

94. Durch eine Schar konfokaler Mittelpunktkegelschnitte ist eine ein-eindeutige quadratische Verwandtschaft zwischen den Geraden der Ebene festgelegt: zwei Geraden entsprechen sich, wenn sie bezüglich aller Kegelschnitte der Schar konjugiert sind. Den Punkten der Ebene entsprechen dann die Parabeln, die die beiden gemeinsamen Achsen der Schar berühren. Damit ist aber zugleich eine ein-eindeutige Verwandtschaft zwischen den Punkten der Ebene hergestellt, indem man jedem Punkte der ersten Art den *Brennpunkt* der bezüglichen Parabel zuordnet. Es ist zu zeigen, daß diese Verwandtschaft nichts anderes ist, als eine *Inversion* mit dem Zentrum im Mittelpunkte der Schar, zusammengesetzt mit der *Spiegelung* an der Hauptachse der Schar.

Und umgekehrt ist jede Transformation, die sich aus einer Inversion und einer Spiegelung an einer durch das Zentrum der Inversion gehenden Geraden zusammensetzt, dieselbe, die, wie oben angegeben, mit Hilfe einer bestimmten Schar konfokaler Kegelschnitte, jedem Punkte den Brennpunkt der zugehörigen Parabel zuweist.

Königsberg i/P. W. Fr. Meyer.

---

95. Soient: M un point d'une ellipse de centre O, PQ la corde polaire de M par rapport à l'ellipse, H et H_1 les orthocentres des triangles MPQ et OPQ. Montrer que lorsque le point M vient sur l'ellipse, les points H et H_1 ont des positions limites.

1°. Si M parcourt l'ellipse, le lieu de chacun des points H et H_1 est une sextique dont les aires U et U_1 sont en fonction des aires E et D de l'ellipse et de sa développée

$$U = 4E + 3D, \quad U_1 = E + D.$$

2°. Le lieu du milieu de HH_1 est une conique.

Constantinople. E. N. Barisien.

---

96. Wenn die Ecken des Tetraeders $U_1 U_2 U_3 U_4$ durch diejenigen des Tetraeders $E_1 E_2 E_3 E_4$ die baryzentrische Darstellung zulassen:

$$U_1 = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4,$$
$$U_2 = \alpha_2 E_1 + \alpha_1 E_2 + \alpha_4 E_3 + \alpha_3 E_4,$$
$$U_3 = \alpha_3 E_1 + \alpha_4 E_2 + \alpha_1 E_3 + \alpha_2 E_4,$$
$$U_4 = \alpha_4 E_1 + \alpha_3 E_2 + \alpha_2 E_3 + \alpha_1 E_4,$$

wo $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ und wo die α_1, α_2, α_3, α_4 voneinander verschiedene, sonst aber beliebige Zahlen bedeuten, dann liegen die beiden Tetraeder zu einander vierfach hyperboloid. Es ist zu beweisen, daß die vier hierdurch bestimmten einschaligen Hyperboloide konzentrisch sind und daß der gemeinsame Mittelpunkt in den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Tetraeder fällt.

Berlin. E. Jahnke.

97. Démontrer que la courbe définie par les équations intrinsèques

$$\varrho = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} + 1}, \quad r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$$

appartient à un cylindre circulaire, de rayon a.

Toute courbe plane, définie par une équation intrinsèque de la forme $r = \frac{s^2}{a} + b$, peut être appliquée, par simple torsion, sur un cylindre circulaire, de manière qu'elle devienne géodésique d'un cône. Quel est ce cône?

Démontrer que toute épicycloïde

$$s^2 + \frac{9\varrho^2}{\cos^2\alpha} = \text{constante},$$

tordue suivant la loi

$$rs = \pm \frac{6\varrho^2}{\sin 2\alpha},$$

peut être placée sur la surface engendrée par la rotation d'une cardioïde autour de son axe. En particulier on obtient les *méridiens* de la surface pour $\alpha = 0$, et les *asymptotiques* pour $\alpha = 30^0$.

Naples. E. Cesàro.

B. Lösungen.

Zu **68.** (Bd. IV, S. 349) (E. N. Barisien). Es sei AB die Hauptachse, O der Mittelpunkt der Ellipse, P_1 der gemeinsame Berührpunkt, P_1P_2 die zu AB in Q senkrechte Hyperbelsehne, M ihre Mitte, T ihr Pol und X der gesuchte Hyperbelmittelpunkt. Dann liegt T auf der Verlängerung von AB und X auf TM. Da TM der zu P_1P_2 konjugierte Durchmesser ist, so ist der zu AB ($\perp P_1P_2$) konjugierte Durchmesser $OX \perp MT$. Ferner ist

$$P_2Q = y_2 = AQ \cdot QB : y_1 \text{ und } \frac{MQ}{PQ_1} = \frac{y_1 + y_2}{2y_1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{AQ \cdot QB}{y_1^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right).$$

Sonach hüllt MT eine Ellipse ein, deren Nebenachse mit der Hauptachse der gegebenen Ellipse zusammenfällt, während die beiden anderen Achsen im Verhältnis $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)$ zueinander stehen. X liegt auf der Fußpunktkurve dieser Ellipse von O aus.

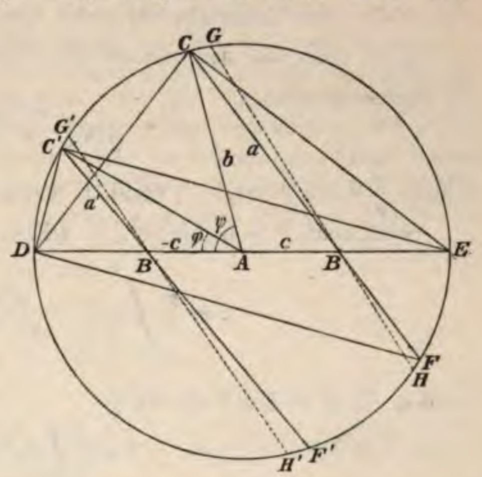
Tharandt. Ph. Weinmeister.

Zu **75.** (Bd IV, S. 351) (P. Kokott): *Auf welcher Kurve muß sich eine Lemniskate wälzen, damit sich ihr Mittelpunkt auf der Geraden $O\xi$, welche in der Anfangsstellung senkrecht zur Hauptachse steht, weiterschiebe?* — Beziehen wir die gesuchte Kurve auf ein festes Koordinatensystem $OM = \xi$ und $MB = \eta$, die Lemniskate auf das bewegliche System $MA = x$ und $AB = y$, so ist stets

$$\eta^2 = x^2 + y^2,$$

da in jedem Moment der Radiusvektor MB auf OM senkrecht steht, also mit η identisch ist. Das Bogenelement der Lemniskate ist gleich dem der gesuchten Kurve, also $dx^2 + dy^2 = d\xi^2 + dy^2$. Es kann daher ausgedrückt werden durch

$$ds = \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}},$$



wenn man beachtet, daß bei der Lemniskate

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}.$$

Also entsteht aus der Gleichheit $dx^2 + dy^2 = d\xi^2 + d\eta^2$:

$$d\xi = \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}},$$

oder

$$\xi = \int\limits_1^\eta \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}} \quad (\eta < 1).$$

Verallgemeinerung: Sei $M(x, y) = 0$ die Gleichung einer Kurve, deren Koordinatenanfangspunkt auf der Geraden $O\xi$ sich fortbewegt. Man bringe dieselbe vermittelst $r^2 = \eta^2 = x^2 + y^2$ auf die Form $x = f(\eta)$. Dann ergibt sich $y = \sqrt{\eta^2 - f^2(\eta)}$, $dx = f'(\eta)\,d\eta$, $d\eta\sqrt{\eta^2 - f^2} = (\eta - ff')\,d\eta$; und es geht die Gleichung $dx^2 + dy^2 = d\xi^2 + d\eta^2$ über in

$$d\xi = \frac{f'\eta - f}{\sqrt{\eta^2 - f^2}}\, d\eta.$$

Für $f = \eta\psi$ erhält man

$$d\xi = \frac{\eta\psi'(\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\psi^2}}.$$

Beispiele. — Die bewegliche Kurve heiße $r^p = \cos n\varphi$. Dann ist

$$x = r\cos\varphi = \eta\cos\frac{1}{n}\arccos\eta^p, \quad \psi(\eta) = \cos\frac{1}{n}\arccos\eta^p,$$

$$\psi'(\eta) = -\sin\frac{1}{n}\arccos\eta^p \cdot -\frac{1}{n}\cdot\frac{p\eta^{p-1}}{\sqrt{1-\eta^{2p}}};$$

also ist

$$\xi = \frac{p}{n}\int\limits_1^\eta \frac{\eta^p d\eta}{\sqrt{1-\eta^{2p}}} \quad (\eta < 1).$$

Für $p = n = 1$ ist die Gleichung $r = \cos\varphi$ ein Kreis; die feste Kurve hat dann die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Für $p = n = 2$ entsteht der eingangs erläuterte Fall der Lemniskate.

Ist $p = 1$, n beliebig, so heißt die feste Kurve $n^2\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Setzt man $-p$ statt p, d. h. geht man zu den reziproken Kurven über, so ist

$$\xi = \frac{p}{n}\int_1^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^{2p} - 1}} \quad (\eta < 1);$$

man erhält dann Integrale, die unter Umständen umkehrbar sind.

Geht man von der beweglichen Kurve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus, so führt die Rechnung auf

$$d\xi = \frac{ab\,d\eta}{\sqrt{a^2 - \eta^2 \cdot \eta^2 - b^2}},$$

woraus $\frac{\eta}{a} = dn\frac{\xi}{b}$ folgt. (Vergl. Greenhill, Ellipt. Fonct. S. 104.).

Setzt man $r^p = \operatorname{cosam} n\varphi$, so erhält man

$$\xi = \frac{p}{n}\int_1^\eta \frac{\eta^p\,d\eta}{\sqrt{1 - \eta^{2p} \cdot 1 - \varkappa^2\eta^{2p}}},$$

welches für $p = 2$ auf die Form

$$\xi = \frac{1}{n}\int \varDelta\psi^{\frac{1}{2}}\,d\psi$$

gebracht werden kann, wobei $\varDelta\psi = \sqrt{1 - b^2\sin^2\psi}$ ist.

Sagan. P. Kokott.

Zu **80.** (Bd. V, S. 313) (P. Stäckel). Meines Erachtens steckt der Fehler in dem Satz: „so sind ... x, y, z ganze lineare Funktionen von u.“ Der Satz müßte heißen: „so können x, y, z als ganze lineare Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen dargestellt werden.“ In der Ebene stellt z. B. $x = at$, $y = bt$ eine Gerade dar, aber dieselbe Gerade wird auch durch $x = at^3$, $y = bt^3$ dargestellt. Es gibt überhaupt für jede Kurve unzählig viele Darstellungen, die alle aus einer von ihnen hervorgehen, indem man den Parameter durch eine willkürliche Funktion eines anderen Parameters ersetzt. Allgemein gesprochen: Stellen die Gleichungen $x = \lambda(t)$, $y = \mu(t)$ eine Kurve dar, und ist $t = f(\vartheta)$ eine willkürliche Funktion, so stellen auch $x = \lambda(f(\vartheta))$, $y = \mu(f(\vartheta))$ dieselbe Kurve dar. Wie nun durch die andere Fassung des Satzes der Fehler vermieden werden kann, zeige ich am besten an einer allgemeinen Aufgabe, die so lautet: *Gegeben sind zwei Scharen von Kurven von gleicher oder ungleicher Art; gesucht sind die Bedingungen, unter denen eine Fläche beide Scharen zu Koordinatenlinien hat.* So sind z. B. die Bedingungen aufzustellen, unter denen eine Fläche zwei Scharen von Geraden oder eine Schar von Geraden und eine Schar von Kreisen zu Koordinatenlinien hat usw. Eine Kurve der ersten Art werde dargestellt durch:

$x = \lambda(t)$, $y = \mu(t)$, $z = \nu(t)$, wobei λ, μ, ν wohlbestimmte Funktionen sind, die noch eine Reihe von willkürlichen Konstanten enthalten. Gibt man den Konstanten besondere Werte, so wird aus der ganzen Art ein Individuum ausgesondert. Läßt man aber die Konstanten Funktionen einer neuen Veränderlichen w sein, so wird dadurch aus der Art eine einfach unendliche Schar S ausgesondert. S wird dargestellt durch: $x = \lambda(t; w)$, $y = \mu(t; w)$, $z = \nu(t; w)$, wobei, wie noch einmal betont sei, λ, μ, ν wohlbestimmte Funktionen von t sind, deren Koeffizienten von w abhängen.

Es sei jetzt eine Fläche $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ vorgelegt, und es sollen die Kurven $v = \text{const}$ eine Schar S_1 und die Kurven $u = \text{const}$ eine Schar S_2 bilden. Sind die die Kurvenarten erklärenden Gleichungen für S_1: $x = \lambda(\vartheta)$, $y = \mu(\vartheta)$, $z = \nu(\vartheta)$ und für S_2: $x = \pi(\tau)$, $y = \varrho(\tau)$, $z = \sigma(\tau)$, so muß für $v = \text{const}$ der Ausdruck $x = x(u, v)$ auf die Form $\lambda(\vartheta)$ gebracht werden können durch einen Ansatz $u = f(\vartheta)$. Die Koeffizienten von λ und f nehmen aber für die verschiedenen Werte von v verschiedene Werte an; sie sind also allgemein als Funktionen von v zu betrachten. Somit wissen wir, daß es eine Funktion $f(\vartheta; v)$ gibt, die, für u in $x(u, v)$ gesetzt, diesen Ausdruck in $\lambda(\vartheta; v)$ verwandelt. Umgekehrt ist aber ϑ eine Funktion von u und v. Also gilt der Satz: Es gibt eine Funktion ϑ von u und v derart, daß für jedes u und v die Gleichung

$$x = x(u, v) = \lambda(\vartheta(u, v); v)$$

eine Identität ist. Ferner gelten die Identitäten

$$y = y(u, v) = \mu(\vartheta(u, v); v), \quad z = z(u, v) = \nu(\vartheta(u, v); v).$$

Dasselbe läßt sich für die Schar S_2 nachweisen. Es muß also eine Funktion $\tau(u, v)$ existieren, die die Gleichungen

$$x(u, v) = \pi(\tau(u, v); u), \quad y(u, v) = \varrho(\tau(u, v); u), \quad z(u, v) = \sigma(\tau(u, v); u)$$

zu Identitäten macht.

Somit lautet die Lösung der gestellten Aufgabe: *Es müssen sich zwei Funktionen ϑ und τ von u und v angeben lassen, die die Gleichungen*

$$x(u, v) = \lambda(\vartheta; v) = \pi(\tau; u), \ \ldots$$

zu Identitäten machen.

Für den Fall, daß beide Scharen gerade Linien sind, können λ, μ, ν; π, ϱ, σ in der Gestalt

$$\xi + \vartheta\varphi, \ \eta + \vartheta\psi, \ \zeta + \vartheta\chi; \quad \xi' + \tau\varphi', \ \eta' + \tau\psi', \ \zeta' + \tau\chi'$$

gegeben werden, wobei ξ, η, ζ, φ, ψ, χ von v allein und ξ', η', ζ', φ', ψ', χ' von u allein abhängen. Dann lauten die Bedingungen

$$\xi + \vartheta\varphi = \xi' + \tau\varphi', \ \ldots$$

aus denen ϑ und τ bestimmt werden können, sobald

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \xi - \xi', & \varphi, & \varphi' \\ \eta - \eta', & \psi, & \psi' \\ \zeta - \zeta', & \chi, & \chi' \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet.

Als Beispiel diene

1) Das einschalige Hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Seine Gleichungen lauten, wenn die geraden Linien Koordinatenlinien sind:

$$x = \frac{uv+1}{uv-1}, \quad y = \frac{u-v}{uv-1}, \quad z = \frac{u+v}{uv-1}.$$

Sie können in die vorher angegebene Form gebracht werden. Dabei ist dann

$$\xi = 1, \ \eta = \frac{1}{v}, \ \zeta = \frac{1}{v}, \ \varphi = 2, \ \psi = \frac{1-v^2}{v}, \ \chi = \frac{1+v^2}{v}, \ \vartheta = \frac{1}{uv-1},$$

$$\xi' = 1, \ \eta' = -\frac{1}{u}, \ \zeta' = \frac{1}{u}, \ \varphi' = 2, \ \psi' = \frac{u^2-1}{u}, \ \chi' = \frac{u^2+1}{u}, \ \tau = \frac{1}{uv-1},$$

$$\varDelta = 0.$$

2) Das hyperbolische Paraboloid $yz = x$. Seine Darstellung ist

$$x = uv, \quad y = u, \quad z = v.$$

Ferner ist hierfür

$$\xi = 0, \ \eta = 0, \ \zeta = v, \ \varphi = v, \ \psi = 1, \ \chi = 0, \ \vartheta = u,$$

$$\xi' = 0, \ \eta' = u, \ \zeta' = 0, \ \varphi' = u, \ \psi' = 0, \ \chi' = 1, \ \tau = v, \ \varDelta = 0.$$

Dortmund. H. Kühne.

Zu **82.** (Bd. V, S. 314) (E. N. Barisien). Es sei $OA = a$, $OB = b$, $OS = OS' = c$, $OM = r$, $\sphericalangle MOS = \vartheta$. Dann ist nach der Polargleichung der Lemniskate

$$r = c \cos \sqrt{2\vartheta};$$

ferner ergibt sich aus den Dreiecken OMA und OMB nach dem Sinussatz

$$a = \frac{r \sin 45^0}{\sin(45^0 + \vartheta)} = \frac{c\sqrt{2\cos 2\vartheta}}{2\sin(45^0+\vartheta)};$$

$$b = \frac{r \sin 135^0}{\sin(135^0 + \vartheta)} = \frac{c\sqrt{2\cos 2\vartheta}}{2\sin(45^0-\vartheta)}.$$

Mithin:

$$ab = \frac{c^2 \cos 2\vartheta}{2\sin(45^0+\vartheta)\sin(45^0-\vartheta)} = \frac{c^2\cos 2\vartheta}{\cos 2\vartheta - \cos 90^0} = c^2.$$

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **84.** (Bd V, S. 314) (O. Gutsche). Die beiden von A aus auf PP_a und von B aus auf PP_b gefällten Lote seien AQ_a und BQ_b. Dann sind die Vierecke PAQ_aP_b und PBQ_bP_a Sehnenvierecke, und man hat

$$\sphericalangle PQ_aP_b = PAP_b, \quad \sphericalangle PQ_bP_a = PBP_a.$$

Es ist aber nach Voraussetzung $\sphericalangle PAP_b = PBP_a$, folglich auch

$$\sphericalangle PQ_aP_b = PQ_bP_a \quad \text{oder} \quad P_aQ_aP_b = P_bQ_bP_a,$$

woraus sich ergibt, daß die Punkte P_a, P_b, Q_a, Q_b auf einem Kreise liegen. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Durchschnittspunkt der den Sehnen P_aQ_a und P_bQ_b zugehörigen Mittelsenkrechten. Letztere schneiden aber einander in F; denn die beiden Parallelen P_aB und Q_aA sind senkrecht zur Sehne P_aQ_a, ebenso die Parallelen P_bA und Q_bB senkrecht zur Sehne P_bQ_b. Demnach ist F der Mittelpunkt des Kreises $P_aP_bQ_aQ_b$, also $FP_a = FP_b$.

Zusatz: Die Fußpunkte Q_a und Q_b der beiden von A aus auf PP_a und von B aus auf PP_b gefällten Lote haben unter sich und mit den Punkten P_a und P_b gleiche Entfernung von F.

Der Satz und der Zusatz sowie der Beweis gelten auch, wenn die durch die Dreiecksecken A und B gelegten Strahlen nach außen gezogen werden.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **85.** (Bd. V, S. 314) (O. Gutsche). PA_1 treffe A_2B_1 in X und QB_2 in U; QA_2 treffe A_1B_2 in Y und PB_1 in V. Dann erhält man aus den ähnlichen Dreiecken PB_1X und VB_1A_2

$$\frac{PX}{PB_1} = \frac{VA_2}{VB_1}; \text{ also: } PX = PB_1 \cdot \frac{VA_2}{VB_1}; \quad \frac{PX}{PA_1} = \frac{PB_1}{PA_1} \cdot \frac{VA_2}{VB_1};$$

und aus den ähnlichen Dreiecken QB_2Y und UB_2A_1

$$\frac{QY}{QB_2} = \frac{UA_1}{UB_2}; \text{ also: } QY = QB_2 \cdot \frac{UA_1}{UB_2}; \quad \frac{QA_2}{QY} = \frac{QA_2}{QB_2} \cdot \frac{UB_2}{UA_1}.$$

Es ist nun $\triangle PA_1C \sim QB_2C$, $\triangle PB_1C \sim QA_2C$, und daraus folgt noch: Viereck $PA_1CB_1 \sim QB_2CA_2$, Viereck $UA_1CB_2 \sim VB_1CA_2$. Demnach hat man

$$\frac{PB_1}{PA_1} = \frac{QA_2}{QB_2}; \qquad \frac{VA_2}{VB_1} = \frac{UB_2}{UA_1},$$

und es ist also $\frac{PX}{PA_1} = \frac{QA_2}{QY}$. Die Geraden PXA_1 und QA_2Y sind parallel; folglich gehen die drei Geraden PQ, XA_2, A_1Y durch einen Punkt, wofür man auch sagen kann: der Schnittpunkt von A_1B_2 und A_2B_1 liegt auf PQ.

Prenzlau. W. Stegemann.

---

2. Kleinere Notizen.

Réponse à la question 3 (1894) de l'Intermédiaire des Mathématiciens.

Découper un triangle en quatre parties équivalentes par deux droites rectangulaires. — Ces quatre parties comprennent toujours trois quadrilatères et un triangle rectangle; soit $BC = a$ le côté sur lequel s'appuie l'hypoténuse de ce triangle rectangle et achevons de définir le triangle donné par la hauteur $AH = H$ et la distance $\mu H = \alpha$ du milieu μ de BC au pied H de la hauteur.

Soient FD et GE les droites qui répondent à la question et qui se coupent en O, posons $\mu G = \varrho$, $\mu F = \varrho'$; l'application du théorème

fondamental de la théorie des transversales conduit de suite à la relation:

$$(1) \qquad (\varrho + \varrho')^2 - a(\varrho + \varrho') + 2\varrho\varrho' = 0$$

qui a lieu pourvu que FD et GE découpent le triangle en quatre parties équivalentes sans être rectangulaires; introduisant la condition d'orthogonalité des deux droites, il vient:

$$(2) \qquad \left(\varrho(a + \varrho) - \frac{a\alpha}{2}\right)\left(\varrho'(a + \varrho') + \frac{a\alpha}{2}\right) = \frac{a^2H^2}{4}.$$

De (1) et de (2) en posant:

$$FG = U = \varrho + \varrho'$$

on tire l'équation du huitième degré en U:

$$(3) \qquad 16a^2\alpha^2U^4 - (aU - U^2)^2(2a^2 + 3aU - U^2)^2$$
$$+ 2a^2(H^2 - \alpha^2)(aU - U^2)(2a^2 + 3aU - U^2) - a^4(H^2 + \alpha^2)^2 = 0.$$

Ces relations qui ne diffèrent que par les notations des résultats de Puissant rappelés par M. Lemoine, I. M. 1894, 39, conduisent à la discussion suivante que Puissant n'a pas donnée:

On obtient d'abord la condition:

$$\tfrac{2}{3}a < \varrho + \varrho' < \frac{a}{\sqrt{2}},$$

puis la condition pour $BC = a$ d'être le côté moyen du triangle donné, c'est-à-dire que si de B et C comme centres, avec a pour rayon, on décrit du côté de A deux demi-circonférences, le sommet A doit tomber dans l'une ou l'autre des deux demi-lunules non communes aux demi-cercles; enfin, il est facile de voir que si de μ comme centre, avec la longueur $\frac{8}{9}a$ pour rayon, on décrit une demi-circonférence du côté de A par rapport à BC, chaque point de cette demi-circonférence est le sommet d'un triangle de base BC que l'on peut découper en quatre parties équivalentes par deux droites rectangulaires à l'aide de la règle et du compas; les points de cette dernière demi-circonférence extérieurs aux deux demi-lunules précitées sont les seuls points du plan, extérieurs à ces deux surfaces, qui puissent être les sommets de triangles de base BC pouvant être découpés en quatre parties équivalentes par deux droites rectangulaires, l'hypoténuse du triangle rectangle partiel reposant sur BC.

Puissant conseille de résoudre l'équation du huitième degré (3) par des méthodes d'approximation et l'Amiral de Jonquières I. M. 1894, 55, fait de même pour l'équation du seizième degré à laquelle il aboutit. Puissant parle bien d'une construction graphique qui consiste à tracer les deux courbes (1) et (2), ϱ et ϱ' étant des coordonnées; (1) construite une fois pour toutes peut bien servir pour tout triangle donné, mais la quartique (2) doit être retracée pour chaque nouveau triangle.

Quelques considérations géométriques permettent de ne pas se contenter de ces résultats de calcul un peu obscurs.

Le problème serait résolu si l'on connaissait les directions de FD et de GE; menons par B et C des parallèles à FD et à GE qui se cou-

pent en P, soit η la hauteur PK du triangle BPC; abaissons de A les perpendiculaires AL et AQ sur CP et BP et appelons h et h' les distances LM et QN de L et Q à BC; si FG et DE répondent à la question on démontre la relation:

$$\sqrt{ah} + \sqrt{ah'} = \sqrt{\frac{aH}{2}} + \sqrt{2a\eta}. \tag{4}$$

Nous avons la relation évidente:

$$h + h' = H + \eta, \tag{5}$$

puis:

$$h - h' = 2\frac{H}{a}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \eta^2} - 2\frac{\alpha}{a}\eta. \tag{6}$$

Considérons h et h' comme des coordonnées rectangulaires et faisons de suite le changement d'axes:

$$x = \frac{h - h'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{h + h' - H}{\sqrt{2}}.$$

Les relations (4) et (5) introduisent la quartique trinodale, tangente à la droite de l'infini:

$$4x^4 - 2H^2x^2 + Hx^2(4\sqrt{2}\,y - H) - H\sqrt{2}\left(y - \frac{9H}{16\sqrt{2}}\right)(4\sqrt{2}\,y - H^2) = 0, \tag{7}$$

où:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{H}{2\sqrt{2}}(2\lambda - 1)\sqrt{4\lambda + 3}, \\ y &= \frac{H}{2\sqrt{2}}\lambda^2, \end{aligned}\right. \qquad \lambda \text{ étant un paramètre variable.} \tag{7'}$$

Les relations (5) et (6) donnent l'ellipse:

$$x^2 + 4\frac{\alpha}{a}xy + \frac{H^2 + \alpha^2}{a^2}y^2 - \frac{H^2}{2} = 0 \tag{8}$$

qui admet pour diamètres conjugués

$$y = 0, \quad x + \frac{2\alpha}{a}y = 0.$$

L'équation de la quartique (7) ne dépend que de H, il suffira donc de la construire une fois pour toutes; supposons que cette construction ait été effectuée avec la valeur $\mathfrak{H}$ pour H; pour tout triangle donné (a, α, H) il suffira de construire l'ellipse

$$x^2 + 4\frac{\alpha}{a}xy + 4\frac{H^2 + \alpha^2}{a^2}y^2 - \frac{\mathfrak{H}^2}{2} = 0 \tag{8'}$$

dont on connaît deux diamètres conjugués en grandeur et en position, ellipse qui correspond au triangle semblable $\left(a\frac{\mathfrak{H}}{H}, \alpha\frac{\mathfrak{H}}{H}, \mathfrak{H}\right)$; ses intersections avec la quartique feront connaître les valeurs de h et h' ou plutôt de $h\frac{\mathfrak{H}}{H}$ et de $h'\frac{\mathfrak{H}}{H}$ et par suite les directions CL et BQ.

Si le côté a est le côté moyen, le problème comporte une solution propre et le point d'intersection de l'ellipse avec la quartique, qui correspond à cette solution, se trouve sur le petit arc de la quartique qui relie les deux points doubles:

$$(9)\qquad x = \frac{\mathfrak{H}}{2\sqrt{2}},\quad y = \frac{\mathfrak{H}}{2\sqrt{2}};\quad x = -\frac{\mathfrak{H}}{2\sqrt{2}},\quad y = \frac{\mathfrak{H}}{2\sqrt{2}},$$

lesquels correspondent au cas où le triangle donné est isoscèle, a étant l'un des côtés égaux.

Si le triangle donné est tel que $\sqrt{H^2 + a^2} = \frac{9}{8}a$, l'ellipse passe toujours par le point milieu de l'arc de quartique précité

$$(10)\qquad x = 0,\quad y = \frac{2\mathfrak{H}}{16\sqrt{2}};$$

et l'on voit ainsi pourquoi dans ce cas le problème peut être résolu à l'aide de la règle et du compas.

Il suffira donc de construire soit géométriquement soit au moyen de $(7')$ le petit arc en question ou même la moitié seulement de cet arc, c'est-à-dire qu'il suffira de faire varier λ de

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = -0{,}707\cdots \text{à} -\tfrac{3}{4} = -0{,}75,$$

si en regard de chaque point construit on a inscrit le λ correspondant, une simple proportion donnera le λ correspondant au point d'intersection de l'ellipse avec une approximation suffisante, car la courbure de l'arc est faible; on aura alors

$$\varrho + \varrho' = U = \frac{a}{2\lambda}$$

où λ a sa valeur absolue. (1) donnera $\varrho\varrho'$ et l'on poura calculer ϱ et ϱ' et les autres éléments du problème si l'on ne veut pas se contenter de la construction géométrique au moyen de h et de h'.

Il peut être intéressant de signaler la correspondance qui existe entre la quartique et la figure qui représenterait les résultats de la discussion du problème; les points doubles (9) correspondent aux deux demi-circonférences de rayon a, le point (10) correspond à la demi-circonférence de rayon $\frac{8}{9}a$ et l'arc limité par les points (9) correspond aux surfaces des deux demi-lunules; il faudrait étudier les solutions impropres pour pousser plus loin cette correspondance qui se continue sans doute entre les points et arcs de la quartique et les demi-circonférences et surfaces de l'autre figure.

Paris. G. Espanet.

Réponse à la question nº 2315 (G. Espanet) de l'Intermédiaire des Mathématiciens.

Soit (E) une ellipse dont les demi-axes ont pour longueurs a et b, soit également (E') une ellipse concentrique et homothétique ayant pour demi-longueurs d'axes $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$: une infinité de triangles sont à la fois inscrits à

(E) et circonscrits à (E'). Dans un cercle (O) du même plan on inscrit des triangles semblables aux précédents et semblablement placés: quelle est l'enveloppe de leurs côtés? — Les triangles dont il est question dans l'énoncé peuvent être caractérisés dans la seule ellipse (E) comme étant ceux qui jouissent de la propriété de présenter l'aire maximum, et qui, par suite, admettent comme barycentre le centre de cette ellipse, chaque médiane étant le diamètre conjugué à la direction du côté correspondant.

Soit donc ABC un des triangles considérés et FGH un triangle de côtés parallèles inscrit dans le cercle de rayon R, pris concentrique à l'ellipse donnée. L'équation de $\overline{GH}$, rapportée aux axes de l'ellipse et mise sous la forme normale de Hesse, sera

$$x \cos \omega + y \sin \omega - \varrho = 0,$$

et en transportant l'origine au point F, de coordonnées $R \cos \theta$, $R \sin \theta$, sans changer la direction des axes, cette équation deviendra

$$x \cos \omega + y \sin \omega + R(\cos \omega \cos \theta + \sin \omega \sin \theta) - \varrho = 0,$$

tandis que l'équation du cercle se transformera dans la suivante

$$x^2 + y^2 + 2R(x \cos \theta + y \sin \theta) = 0.$$

Changeant dans cette équation ainsi que dans la précédente x et y en $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et éliminant la variable d'homogénéité z que l'on vient d'introduire, on obtiendra la relation homogène en x et y,

$$(R \cos \overline{\omega + \theta} + \varrho)x^2 + 2Rxy \sin \overline{\omega + \theta} + (-R \cos \overline{\omega + \theta} + \varrho)y^2 = 0,$$

qui, dans le nouveau système d'axes, représente les droites $\overline{FG}$, $\overline{FH}$, et, dans un système quelconque, des parallèles à ces droites.

De même l'équation de parallèles aux droites $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, joignant le point $(a \cos \varphi,\ b \sin \varphi)$ aux extrémités de la corde $\overline{BC}$ [ayant pour équation, d'après nos considérations initiales,

$$bx \cos \varphi + ay \sin \varphi + \tfrac{1}{2}ab = 0],$$

sera trouvée par un calcul calqué sur le précédent:

$$(\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi)b^2x^2 + 8abxy \sin \varphi \cos \varphi + (\sin^2 \varphi - 3 \cos^2 \varphi)a^2y^2 = 0;$$

mais on y remplacera immédiatement les lignes trigonométriques de φ par celles de ω en utilisant la proportion évidente

$$\frac{\cos \varphi}{a \cos \omega} = \frac{\sin \varphi}{b \sin \omega}:$$

elle prendra ainsi la forme

$$(a^2 \cos^2 \omega - 3b^2 \sin^2 \omega)b^2x^2 + 8a^2b^2xy \sin \omega \cos \omega$$
$$+ (b^2 \sin^2 \omega - 3a^2 \cos^2 \omega)a^2y^2 = 0,$$

et l'on obtiendra, en identifiant cette forme à celle trouvée un peu plus haut, la double condition

$$\frac{\varrho + R\cos(\omega+\theta)}{b^2(a^2\cos^2\omega - 3b^2\sin^2\omega)} = \frac{R\sin(\omega+\theta)}{4a^2b^2\sin\omega\cos\omega} = \frac{\varrho - R\cos(\omega+\theta)}{a^2(b^2\sin^2\omega - 3a^2\cos^2\omega)},$$

d'où par élimination de $(\omega+\theta)$,

$$R^2[(3a^2-b^2)a^2\cos^2\omega + (3b^2-a^2)b^2\sin^2\omega]^2$$
$$= \varrho^2\{[(3a^2+b^2)a^2\cos^2\omega - (3b^2+a^2)b^2\sin^2\omega]^2 + 64a^4b^4\sin^2\omega\cos^2\omega\}.$$

Cette équation représente, en coordonnées polaires, la podaire de la courbe cherchée, relativement au centre de l'ellipse et cette podaire est une sextique circulaire, offrant, lorsque l'on a $a > b\sqrt{3}$, l'aspect d'un quadrifolium.

Mais, d'une façon générale, pour avoir l'équation en coordonnées tangentielles homogènes (λ, μ, ν) d'une courbe, connaissant celle de la podaire en coordonnées polaires rapportées au pole fixe comme origine de vecteurs

$$f(\cos\omega, \sin\omega, \varrho) = 0,$$

il suffit, supposant la forme $f(\ )$ homogène en $\cos\omega$, $\sin\omega$, de remplacer $\cos\omega$, $\sin\omega$ et ϱ respectivement par λ, μ et $-\frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$, le résultat étant ainsi tout simplement $f\left(\lambda, \mu, -\frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right) = 0$. Ici l'on trouvera

$$R^2(\lambda^2+\mu^2)F^2(\lambda,\mu) - \nu^2 G(\lambda,\mu) = 0,$$

en posant pour abréger

$$F(\lambda,\mu) = (3a^2-b^2)a^2\lambda^2 + (3b^2-a^2)b^2\mu^2,$$
$$G(\lambda,\mu) = [(3a^2+b^2)a^2\lambda^2 - (3b^2+a^2)b^2\mu^2]^2 + 64a^4b^4\lambda^2\mu^2:$$

l'enveloppe considérée est donc de la *sixième* classe.

Pour en déterminer l'ordre sans réaliser l'élimination du paramètre ω entre les équations générales des antipodaires

$$x\cos\omega + y\sin\omega = \varrho, \quad -x\sin\omega + y\cos\omega = \frac{d\varrho}{d\omega},$$

il faut considérer un point variable sur la droite à l'infini, c'est-à-dire faire dans l'équation écrite un peu plus haut $\mu = k\lambda$, k étant un paramètre à calculer. Or en opérant ainsi, un facteur λ^4 se trouve mis en évidence, et l'on voit que la droite à l'infini $(\lambda = 0, \mu = 0)$ est une tangente quadruple à l'enveloppe. Il ne reste donc que deux tangentes variables avec le point (k) et il s'agit d'examiner les valeurs de k pour lesquelles ces tangentes deviennent coïncidentes. Ce sont celles qui annulent soit le coëfficient de R^2 (ν alors s'annule simultanément), soit le coëfficient de ν^2 (qui alors forcément acquiert une valeur infiniment grande). Pour chacune des valeurs de k qui annulent le coëfficient de ν^2 les tangentes variables coïncident à la fois entre elles et avec la droite à l'infini: ces circonstances sont caractéristiques d'un point de rebroussement et en ce point on compte *trois* intersections de la courbe avec la tangente de rebroussement. Quant

aux valeurs de k qui annulent le coëfficient de R^2, il est nécessaire de distinguer; car la coïncidence des tangentes n'indique un point de la courbe qu'autant que le point d'où l'on mène les tangentes n'est pas sur une tangente multiple de celle-ci. Or en formant les dérivées partielles de l'équation trouvée précédemment par rapport à λ, μ et ν, on voit que l'hypothèse $\nu = 0$, $F(\lambda, \mu) = 0$, les annule toutes à la fois: ainsi les valeurs $F(i, k) = 0$ appartiennent à deux tangentes doubles issues de l'origine et n'indiquent pas de point de la courbe à l'infini; au contraire les valeurs $k = \pm i$ sont admissibles. En définitive on voit que l'ordre de la courbe est le *quatorzième*.

Le genre d'ailleurs est 2; les singularités ponctuelles sont équivalentes à 52 points doubles et 24 rebroussements; il n'y a point d'autres tangentes multiples que la droite à l'infini (tangente quadruple de rebroussement) et les deux tangentes doubles déjà reconnues: enfin on ne compte aucune tangente stationnaire.

Caen. E. Malo.

Réponse à la question n° 2454 (G. Espanet) de l'Intermédiaire des Mathématiciens.

Lieu du point de Lemoine d'un triangle assujetti à certaines conditions.

Bien que le desideratum expressément formulé par l'auteur de la question 2454 soit d'obtenir une solution *géométrique* de cette question autre que celle signalée par lui-même, je me persuade que l'indication de la solution *analytique* suivante ne sera pas absolument dénuée d'intérêt, à cause d'une certaine difficulté qu'elle comporte, et qui, pouvant se représenter dans beaucoup de circonstances analogues, est plus facilement levée par le raisonnement direct (ce qui est le propre de la méthode géométrique) que par la réduction algébrique des formules obtenues de prime abord.

Je me propose donc de déterminer le point de Lemoine K d'un triangle défini par son cercle circonscrit, ayant son centre à l'origine, par les coordonnées $(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$, d'un de ses sommets A, et par l'équation

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0,$$

du côté opposé $\overline{BC}$: l'équation de l'ensemble des côtés $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ est alors (en écrivant pour simplifier σR au lieu de ν):

$$(\lambda\cos\theta + \mu\sin\theta + \sigma)(x^2 + y^2 - R^2) - 2(\lambda x + \mu y + \sigma R)(x\cos\theta + y\sin\theta - R) = 0.$$

Considérant le point de Lemoine du triangle ABC comme le point dont la somme des carrés des distances aux côtés est un minimum, je remarquerai que d'une façon générale la somme des carrés des distances du point (x, y) aux droites que représente l'équation du second degré à deux variables

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

lorsqu'on y suppose

$$\Delta \equiv abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0,$$

est

$$v^2 + w^2 = \frac{2(a+b)S - 4(ab - h^2)t^2}{(a+b)^2 - 4(ab - h^2)},$$

en désignant par t la distance du point (x, y) à l'intersection des droites $S = 0$. Dans le cas présent on trouvera

$$a + b = 2\sigma, \quad ab - h^2 = \sigma^2 - \lambda^2 - \mu^2, \quad (a+b)^2 - 4(ab - h^2) = 4(\lambda^2 + \mu^2);$$

par suite, ajoutant

$$u^2 = \frac{(\lambda x + \mu y + \sigma R)^2}{\lambda^2 + \mu^2}$$

et posant $z = u^2 + v^2 + w^2$, il viendra

$$(\lambda^2 + \mu^2)z = \sigma S + (\lambda^2 + \mu^2 - \sigma^2)\left[(x - R\cos\theta)^2 + (y - R\sin\theta)^2\right] + (\lambda x + \mu y + \sigma R)^2,$$

et il ne s'agit que d'égaler à zéro les dérivées partielles de z par rapport à x et à y: de là deux conditions qui résolues par rapport à x et à y donnent

$$-\frac{x}{R} = \frac{\lambda\mu\sin\theta - (\lambda^2 + 2\mu^2)\cos\theta + \lambda\sigma + 2\sigma^2\cos\theta}{2(\lambda^2 + \mu^2) + \sigma(\lambda\cos\theta + \mu\sin\theta) - \sigma^2},$$

$$-\frac{y}{R} = \frac{\lambda\mu\cos\theta - (2\lambda^2 + \mu^2)\sin\theta + \mu\sigma + 2\sigma^2\sin\theta}{2(\lambda^2 + \mu^2) + \sigma(\lambda\cos\theta + \mu\sin\theta) - \sigma^2}.$$

Si donc l'on imagine que la position de la droite $\overline{BC}$ est réglée par celle du point θ, c'est-à-dire par le choix de l'angle θ — en d'autres termes que les quantités λ, μ, σ, soient des fonctions déterminées de θ — on aura l'expression des coordonnées du point de Lemoine au moyen du paramètre variable θ et l'on connaîtra la courbe décrite par le point.

Dans le cas particulier de la question 2454 le centre de gravité du triangle ABC doit être un point fixe, ayant par exemple pour coordonnées $\frac{1}{3}mR$, $\frac{1}{3}nR$ — ce qui entraîne que l'orthocentre du triangle ABC soit le point fixe (mR, nR) — les relations entre les quantités λ, μ, σ et l'angle θ seront par suite les suivantes

$$\frac{2\lambda\sigma}{\lambda^2 + \mu^2} = \cos\theta - m, \quad \frac{2\mu\sigma}{\lambda^2 + \mu^2} = \sin\theta - n,$$

et l'on trouvera pour x et y:

$$-\frac{x}{2R} = \frac{-m(3 + m^2 + n^2) + (3m^2 - n^2)\cos\theta + 4mn\sin\theta + (m^2 + n^2 - 2m\cos\theta - 2n\sin\theta)^2}{(9 - m^2 - n^2)(1 + m^2 + n^2 - 2m\cos\theta - 2n\sin\theta)}$$

$$-\frac{y}{2R} = \frac{-n(3 + m^2 + n^2) + (3n^2 - m^2)\sin\theta + 4mn\cos\theta + (m^2 + n^2 - 2m\cos\theta - 2n\sin\theta)^2}{(9 - m^2 - n^2)(1 + m^2 + n^2 - 2m\cos\theta - 2n\sin\theta)}$$

Si l'on pose $z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ et que l'on remplace $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par leurs valeurs en z, $\cos\theta = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$, $\sin\theta = \frac{2z}{1 + z^2}$, on aura des fonctions rationnelles de z où le degré de cette variable, soit dans le numérateur soit dans le dénominateur, sera le *sixième*.

On aurait tort cependant de conclure de ce résultat que la courbe décrite par le point K soit du sixième ordre. En effet, en prenant arbitrairement le point A sur le cercle donné, c'est-à-dire en fixant θ, on a bien un point K unique et déterminé, mais ce même point résulterait également du choix du point B ou du point C au lieu et place de A, c'est-à-dire de la substitution à θ des valeurs $\theta + 2\widehat{C}$, $\theta + 2\pi - 2\widehat{B}$: autrement dit, on obtiendrait toute la courbe en faisant simplement décrire au sommet A l'arc de cercle compris entre sa position initiale A_0 et le point B_0 qui est le sommet consécutif du triangle $A_0B_0C_0$; puis, le sommet A continuant de décrire le cercle $\widehat{A_0B_0C_0}$, de B_0 en C_0, le point K parcourra une deuxième fois la même courbe, et celle-ci tout entière correspondrait encore une fois à l'arc $\widehat{C_0A_0}$. Pour la variation du paramètre θ de θ_0 à $\theta + 2\pi$, ou pour celle de z de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient donc trois fois la courbe cherchée, et, puisque l'ordre apparent de celle-ci par le procédé d'investigation suivi est le sixième, l'ordre réel, qui doit être trois fois moindre, se trouvera être le second seulement: en faisant l'élimination de θ ou de z on parviendrait à une forme non homogène à deux variables du sixième degré qui serait un cube parfait.

Sans passer par ces calculs dont l'aridité serait extrême, on peut voir aisément qu'il s'agit d'un cercle en cherchant les points à l'infini de la courbe lieu du point K. En effet ces points correspondent aux valeurs de θ qui vérifient la condition

$$1 + m^2 + n^2 - 2m\cos\theta - 2n\sin\theta = 0,$$

et l'on a immédiatement pour ces valeurs

$$k = \lim\frac{y}{x} = \frac{-n(3 + m^2 + n^2) + (1 - m^2 + 3n^2)\sin\theta + 4mn\cos\theta}{-m(3 + m^2 + n^2) + (1 + 3m^2 - n^2)\cos\theta + 4mn\sin\theta}.$$

Cette égalité combinée avec la précédente donne linéairement les valeurs de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$ en fonction de k et en les portant dans l'identité $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on parvient, toutes réductions faites, à l'équation $k^2 + 1 = 0$, qui montre que les points cherchés sont les points cycliques et que le lieu de K est bien un cercle.

On peut également raisonner comme il suit.

Les coordonnées des projections du point $M(x, y, z)$ sur les côtés du triangle de référence ABC sont

$$\begin{array}{ccc} 0 & y + x\cos C, & z + x\cos B, \\ x + y\cos C, & 0 & z + y\cos A, \\ x + z\cos B, & y + z\cos A, & 0 \quad , \end{array}$$

et par suite celles du barycentre podaire M' du point M sont

$$x' = 2x + y\cos C + z\cos B, \quad y' = x\cos C + 2y + z\cos A,$$
$$z' = x\cos B + y\cos A + 2z.$$

La condition pour que la droite de jonction des points M et M' passe par le point de Lemoine [c'est-à-dire pour que la droite $\overline{MM'}$ se corresponde

à elle-même, le point de Lemoine ($\sin A$, $\sin B$, $\sin C$) étant à lui-même son propre correspondant dans la transformation envisagée] est alors

$$\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ x & y & z \\ 2x + y\cos C + z\cos B & x\cos C + 2y + z\cos A & x\cos B + y\cos A + 2z \end{vmatrix} = 0,$$

et on la réduit aisément à la forme

$$0 = \sum (x^2 \cos A + yz) \sin (B - C),$$

qui indique un couple rectangulaire de droites.

Pour déterminer les points P, Q, où la droite d'Euler (joignant l'orthocentre H au centre O du cercle circonscrit) est rencontrée par ce couple de droites, on fera, suivant la méthode de Joachimsthal,

$$x = k\cos A + 2\cos B\cos C, \quad y = k\cos B + 2\cos C\cos A,$$
$$z = k\cos C + 2\cos A\cos B,$$

k étant le rapport $\dfrac{\overline{HP}}{\overline{PO}}$ des segments déterminés sur la droite $\overline{HO}$, et l'on portera ces valeurs dans l'équation que l'on vient d'écrire. On obtiendra de la sorte une équation quadratique en k se présentant immédiatement sous la forme

$$0 = k^2 \sum (\cos^3 A + \cos B\cos C)\sin(B - C) + 2k \sum \sin^2 A \cos A \sin(B - C)$$
$$+ 4\cos A\cos B\cos C \sum \sin B \sin C \sin (B - C).$$

Mais on aperçoit aisément les identités

$$\sum \sin^2 A \cos A \sin (B - C) \equiv - \sum \sin B \sin C \sin (B - C),$$
$$\sum (\cos^3 A + \cos B \cos C) \equiv 2 \sum \sin B \sin C \sin (B - C),$$

moyennant lesquelles l'équation considérée se réduit simplement à

$$k^2 - k + 2\cos A\cos B\cos C = 0;$$

les racines sont donc

$$2k = 1 \pm \sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}.$$

Or on a

$$\overline{HO} = R\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C},$$

et par suite

$$k = \frac{R \pm \overline{HO}}{2R},$$

c'est-à-dire que lorsque le triangle ABC se déforme en restant inscrit dans le cercle (O) de telle sorte que l'orthocentre soit un point fixe H, le point de Lemoine K se déplace sur un cercle ayant son centre sur $\overline{OH}$.

En appelant D, E les extrémités du diamètre HO, on aura

$DH = R - \overline{HO}$, $\overline{HE} = R + \overline{HO}$ et par suite les proportions déterminatives des points P et Q seront les suivantes

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DE}}, \quad \frac{\overline{HQ}}{\overline{QO}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{DE}},$$

desquelles résultent des constructions faciles.

J'ajoute que le cercle lieu du point K passe par les points communs au cercle circonscrit et au cercle de Feuerbach (ou des neuf points). Le moyen le plus simple pour le vérifier consiste à écrire l'équation du cercle passant par les points en question et par le point de Lemoine, équation qui est

$$0 = 2(yz\sin A + zx\sin B + xy\sin C)(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$
$$- 3(x\cos A + y\cos B + z\cos C)(x\sin A + y\sin B + z\sin C),$$

et à y faire, comme ci-dessus, $x = k\cos A + 2\cos B\cos C$, etc.: on retombe alors sur l'équation

$$k^2 - k + 2\cos A\cos B\cos C = 0.$$

Caen. E. Malo.

---

3. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zu I, S. 993, Note 272.

Zu dem Meinungsaustausch zwischen Herrn Koppe und der Redaktion bz. Mehmke über die Neper-Logarithmen mögen auch mir einige Worte gestattet sein und zwar deshalb, weil gerade die Lehrerwelt im Unterricht auf diese Frage immer zurückkommen muß und daher ein Interesse daran hat, daß sie zu einem allseits befriedigenden Austrag gebracht wird.

1. Bürgi und Neper haben beide ihre Logarithmen gewonnen aus der Überführung einer geometrischen Progression in eine arithmetische. Dies war damals der einzig gangbare Weg, um überhaupt die Logarithmen zu erfinden. Ebenso war die Basis der Potenz $(1 + 1/n)^n$ für die geometrische Progression allein verwendbar. (Koppe[1]) S. 7). Nun erklärt sich auch, warum die natürlichen Logarithmen vor den 10-Logarithmen entstanden.

2. Bei Bürgi steigen beide Progressionen, bei Neper entspricht der steigenden arithmetischen eine fallende geometrische Progression. Das erstere ist das natürliche. Neper wich davon absichtlich ab, nicht bloß von ungefähr. Wenn er wenigstens wie Koppe S. 15 die bildliche Veranschaulichung mit 'Wachstum in gleicher Richtung' gebracht hätte! Der Grund für Nepers Vorgehen lag darin, daß er sein Augenmerk hauptsächlich auf die Sinuszahlen richtete. Dies bestimmte seinen Gedankengang von Anfang an

1) Koppe Max, Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht. Programm des Andreas-Realgymnasiums in Berlin. 1893. Nr. 93.

(positio 1 der constructio) und bewirkte, daß seine Tafel sogleich mit Sinus und seinem Logarithmus beginnt. Die Folge war die Unnatur, daß den Sinuszahlen als Bruchteilen des Radius positive, den größeren Zahlen negative Logarithmen zufielen. In diesem einen Punkte fehlte es Neper an Weitblick, hierin übertraf ihn Bürgi.

3. Cantor nennt Bürgis Tafel eine Antilogarithmentafel, offenbar aus dem äußerlichen Grunde, weil der Logarithmus links, der Numerus rechts steht. Das ist eine völlige Verkennung der Erfindung. Auch für Bürgi waren die schwarzen Zahlen (der Numerus) das Gegebene, die roten Zahlen (der Logarithmus) das Gesuchte, das Mittel zum Zweck; von ihnen kehrt er bei der Nutzanwendung zu den schwarzen Zahlen zurück.

4. Von Neper wissen wir, wie er sich das Rechengeschäft erleichterte; und wenn Koppe erweist, daß die Abweichung der Neper-Zahlen von den e-Zahlen nur auf dem (S. 18) durch Macdonald entdeckten Rechenfehler beruht, z. B. $Nl\,{}^1/_2 = 0{,}693\,146\,922$ und ${}^e\underline{/2} = 0{,}693\,147\,18(0)$, was ich stehenden Fußes nicht beurteilen kann, so will ich ihm gern Recht geben, daß Neper die moderne Formel $dy = dx/x$ und $y = \int \frac{dx}{x}$ voraus ahnte und nach ihr verfuhr. Von Bürgis Rechenverfahren haben wir keine Nachricht; indes es wird bezeugt, daß Bürgi im Interpolieren außerordentlich gewandt war. Ohne Rechenerleichterung hätte er das gewaltige Zahlenmaterial nicht bewältigt. Auf die Verschiedenheit der Rechenart beider Erfinder habe ich sowohl in meinem Aufsatz (Zeitschrift für math. u. nat. U. 1896 B. 27) als im Anhang meiner 4-stelligen Logarithmentafel hingewiesen. Das eigentlich Geniale liegt aber doch wohl in der Erfindung der Logarithmen selbst; die Erleichterung des Rechengeschäfts mag immerhin auch genial sein, sie steht aber gegenüber der Erfindung an zweiter Stelle.

5. Die *Natürlichkeit* der Logarithmen besteht darin, daß von $1 + {}^1/_n$, also von der Einheit vermehrt (weniger natürlich: vermindert) um einen kleinen Zuwachs ausgegangen wird. Nach diesem erweiterten Begriff gibt es unendlich viele natürliche Logarithmen. Auch Koppes Tafel mit der Beschränkung 1,01 ist eine natürliche. Der Grenzfall $n = \infty$ liefert die e-Logarithmen als die vollkommenste aller natürlichen Arten. Man sollte diese daher auch e-Logarithmen, nicht log. nat. nennen; mit der genauen e-Benennung hört der Streit von selbst auf. Die Bürgi-Zahlen stimmen mit den e-Zahlen in den ersten 4, die Neper-Zahlen in den ersten 6 Stellen überein.

6. Bei der Zurichtung der Erfinderlogarithmen zur Erlangung einer Basis haben *beide* die Einsetzung des Dezimalkommas an geeigneter Stelle nötig; dies ist ein *allgemeines* Zugeständnis an die Auffassung der Erfinderzeit. Dagegen die Außerachtlassung des Minuszeichens der Neper-Logarithmen ist nur ein *besonderes* Zugeständnis an Neper; er selbst wollte es gar nicht. Daher muß den Neper-Logarithmen die Basis ${}^1/_e$ zugewiesen werden, wie es auch Koppe tut S. 18.

7. Die Priorität der Logarithmenerfindung gebührt ohne Zweifel Neper; aber Bürgi verdient neben ihm in ehrenvoller Anerkennung genannt zu werden. Es liegt kein Grund vor, warum wir die lateinische Namenform Neper gegen die englische Napier vertauschen sollen, ich erinnere an die Namen Comenius (Komenski), Reuchlin, Melanchthon u. a. Auch Neuton statt Njutn dürfen wir sagen.

Schlußbemerkung. Koppes Vermutung, daß ich mich mit Nepers *Descriptio* begnügt hätte, beruht wohl auf einem Versehen, das aber verständlich ist, weil viele Exemplare ohne die *Constructio* verbreitet wurden; das der Freiburger Universitätsbücherei ist vom Jahre 1620 und ist in Lyon (Lugdunum) gedruckt; Descriptio, Logarithmentafel, Constructio haben ihre eigenen Seitenzahlen. Gerade aus der Gegenüberstellung der Bürgi- und Neperschen Aufbauzahlen habe ich meine Schlüsse gezogen; diese Zahlen stehen in der Constructio.

Freiburg (Baden). KEWITSCH.

---

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

BERGER, H., Über Rotationsflächen zweiten Grades, die einem gegebenen Tetraeder eingeschrieben sind. Inaug.-Diss. Straßburg 1903. 43 S.

BLOCHMANN, R., Die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke. Nach einem auf der 34. Jahresversammlung des Deutschen Nautischen Vereins in Berlin gehaltenen Vortrage dargestellt. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 24 S. M. —.60.

BOUSSINESQ, J., Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. Tome II: Refroidissement et échauffement par rayonnement, conductibilité des tiges, lames et masses cristallines courants de corrections, théorie mécanique de la lumière. Paris 1903, Gauthier-Villars. 625 S.

BRAUNMÜHL, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II. Hälfte: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 39 Figuren im Text. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 264 S. geh. M. 10, geb. 11.

CHRISTIANSEN-J. C. MÜLLER, Elemente der theoretischen Physik. 2. Aufl. Leipzig 1903. A. Barth. 532 S.

CURTZE, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In 2 Teilen. Mit zahlreichen Textfiguren.
I. Teil. 336 S. M. 16.
II. Teil. 291 S. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 14.

CZUBER, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 594 S. M. 24.

DICKSON, L. E., Ternary orthogonal group in a general field. Groups defined for a general field by the rotation groups. The University of Chicago Press 1902. 17 S.

DONLE, W., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Aufl. Stuttgart 1903, F. Grub. 380 S.

ENCYKLOPÄDIE DER MATH. WISS.
Band III_3. Heft 2/3: Besondere transzendente Kurven. Von G. Scheffers. — Besondere Flächen. Von R. v. Lilienthal. — Abbildung und Abwickelung zweier Flächen auf einander. Von A. Voss.
Band IV_1. Heft 3: Geometrie der Massen. Von G. Jung. — Die graphische Statik der starren Körper. Von M. L. Henneberg.

ENRIQUES, F., Vorlesungen über projektive Geometrie. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 374 S. M. 9.

FENKNER, H., Lehrbuch der Geometrie. Erster Teil: Ebene Geometrie. 4. Auflage. Berlin 1903, O. Salle. 224 S. M. 2.20.

FÖPPL, A., Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. Zweiter Band: Graphische Statik. Zweite Auflage. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 471 S. M. 10.

FUHRMANN, A., Bauwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung. Lehrbuch, Aufgabensammlung und Literaturnachweis. Teil IV der „Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik". Berlin 1903, W. Ernst u. Sohn. 292 S.

Ganter, H., und Rudio, F., Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und Figuren. In 2 Teilen.
  I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. 5. Aufl. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 187 S. M. 3.
  II. Teil: Die analytische Geometrie des Raumes. 3. Aufl. Leipzig 1901, B. G. Teubner. 186 S. M. 3.

Geissler, K., Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 417 S. M. 14.

Haentzschel, E., Das Erdsphäroid und seine Abbildung. Mit 16 Textabbildungen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. VIII u. 140 S.

Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. Zweite durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Aus der Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 175 S.

Kerntler, F., Das Ampèresche elektrodynamische Elementarpotential. Budapest 1903. 17 S.

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Leipzig 1902, B. G. Teubner. 468 S. M. 10.

Klein, F, und Sommerfeld, A., Über die Theorie des Kreisels. III. Heft: Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 247 S. M. 9.

Koch, K. R., Relative Schweremessungen. III. Messungen auf der Linie: Ulm-Freudenstadt. Mit einem Anhang, dem Magazinthermometer und dem Pendel gegen Temperaturänderungen die gleiche Trägheit zu geben. (S.-A. aus den Jahresheften des Vereins f. vaterländ. Naturk. in Württemberg). Stuttgart 1903.

Kommerell, V., und Kommerell, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen.
  I. Band. Sammlung Schubert XXIX, 144 S. M. 4.80.
  II. Band, Sammlung Schubert XLIV, 212 S. Leipzig 1903, Göschen. M. 5.80.

Krazer, A., Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 509 S. M. 24.

Kronecker, L., Vorlesungen über Mathematik. In zwei Teilen. II. Teil. Vorlesungen über Arithmetik. 2. Abschnitt: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. 1. Band: Erste bis einundzwanzigste Vorlesung. Mit 11 Fig. im Text. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 390 S. M. 20.

Kübler, J., Die Proportion des goldenen Schnitts als das geometrische Ziel der stetigen Entwicklung und die daraus hervorgehende Fünfgestalt mit ihrer durchgreifenden Fünfgliederung. Mit 15 Figuren auf 4 Tafeln. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 36 S. M. 1.60.

Maschke, H., Invariants of differential quantics. The University of Chicago Press 1903. 14 S.

Matthiessen, L., Die astigmatische Brechung der Sonnenstrahlen im Regenbogen. Mit Anwendung von Kettenbruch-Determinanten. (Publik. des astron.-meteorol. Observat. zu Rostock) 1903.

Pagel, F. und Wende, F., Rechenbuch für Handwerker- und gewerbliche Fortbildungs-Schulen. Nach den ministeriellen Vorschriften vom 5. Juli 1897 bearbeitet. Ausgabe A in 4 Heften. II. Heft. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Pfeiffer, E., Physikalisches Praktikum für Anfänger. Dargestellt in 25 Arbeiten. Mit 47 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Robin, G., Oeuvres scientifiques. Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Paris 1903, Gauthier-Villars. 211 S.

Schubert, H., Niedere Analysis. Zweiter Teil: Funktionen, Potenzreihengleichungen. Sammlung Schubert XLV. Leipzig 1903, Göschen. M. 3.80.

Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. I: Elementar-Algebra und Analysis. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 446 S. M. 8.

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT.

ZWEITER JAHRGANG.

BEILAGE ZUM
ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK
(3) IV, V, VI.



LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Inhaltsverzeichnis.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

18. Sitzung am 24. Juni 1903.

Vorsitz: Herr Kneser.

Anwesend: 36 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Kneser und Herr Lampe widmen dem jüngst verstorbenen Mitglied der Gesellschaft Hamburger Worte des Nachrufs.

Herr Knoblauch: Die geodätische Krümmung der Krümmungslinien (s. u.).

Herr F. Kötter: Über die Linksabweichung des Geschosses bei aufgepflanztem Seitengewehr (s. u.).

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Jolles, Kötter, Lampe, Rotth, Reißner, Zühlke.

Eine einfache Anwendung der Vektorrechnung auf die Optik.

Von E. Jahnke in Berlin.

1. *Voraussetzungen.* — Bei der Suche nach einfachen Anwendungen der Vektorrechnung auf die mathematische Physik bin ich auf eine elementare Herleitung derjenigen Formeln gestoßen, welche Fresnel für die Intensitäten des partiell reflektierten und gebrochenen Lichtes aufgestellt hat, *in dem Fall, daß die Schwingungsebene senkrecht zur Einfallsebene verläuft.*

Ich mache bei der Herleitung von dem Begriff des Vektors der Ebene Gebrauch als einer Strecke von bestimmter Länge, bestimmter Richtung und bestimmtem Richtungssinn, sowie von dem äußeren und dem inneren Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ der Ebene, die ich nach Graßmann, wie folgt, definiere:

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}] = ab\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\quad [\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{b}] = ab\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Dabei bedeuten a, b die numerischen Längen der beiden Vektoren. Diese Definitionen liefern ohne weiteres die charakteristischen Eigenschaften des äußeren und inneren Produktes, nämlich:

$$[\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}] = -[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}],\quad [\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}] = 0;$$

$$[\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{b}],\quad [\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}] = a^2.$$

Außer diesen Begriffen und Definitionen benutze ich noch den einfachen Satz, daß zwischen drei Vektoren der Ebene $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ stets eine lineare Identität der Form

$$(1) \qquad \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = 0$$

besteht, wo α, β, γ beliebige Zahlen bedeuten, d. h. daß es stets möglich ist, von drei beliebigen Vektoren der Ebene solche Vielfache zu nehmen, daß dieselben sich zu einem Dreieck zusammenschließen.

Ich komme nun zu den physikalischen Voraussetzungen. Der Physik entnehme ich erstens, daß eine elektromagnetische Welle, welche auf die Grenzebene zweier Medien auftrifft, sich im allgemeinen in eine reflektierte und eine gebrochene Welle zerlegt; zweitens, daß die Fortpflanzungsrichtungen der drei Wellen, der einfallenden, der reflektierten und der gebrochenen, in einer Ebene liegen; und drittens, daß der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel ist. Nun gibt es an einer Welle zu unterscheiden: Amplitude, Schwingungsrichtung, Fortpflanzungsrichtung und Phase. Indem ich dieselben Bedingungen zu Grunde lege, unter welchen allein die Fresnelschen Formeln physikalische Gültigkeit beanspruchen, will ich von der Phase absehen und voraussetzen, daß die Wellen gegen einander keinen Phasenunterschied zeigen. Aber auch von der Schwingungsrichtung will ich absehen. Das ist gestattet, wenn alle Wellen, welche in die Rechnung eintreten, die gleiche Schwingungsrichtung haben. Wie die Physik lehrt, ist dies nur dann der Fall, wenn die Schwingungsebene senkrecht zur Einfallsebene verläuft. Diese Voraussetzung soll gemacht werden; die folgenden Betrachtungen beziehen sich demnach nur auf den Fall *einer linear polarisierten Welle, welche senkrecht zur Einfallsebene schwingt.*

Hiernach kann ich eine elektromagnetische Welle als einen Vektor auffassen, dessen Länge durch die Schwingungsamplitude gemessen und dessen Richtung und Richtungssinn durch die Fortschreitungsrichtung der Welle bestimmt wird.

2. *Herleitung der Fresnelschen Formeln.* — Nenne ich die Vektoren, welche die einfallende, die reflektierte und die gebrochene Welle darstellen, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{d}$, die zugehörigen Amplituden E, R, D, dann kann ich sofort gemäß (1) die folgende Beziehung ansetzen:

$$(2) \qquad \boldsymbol{e} = x\boldsymbol{r} + y\boldsymbol{d}.$$

Um x und y zu bestimmen, multipliziere ich diese Gleichung äußerlich mit $\boldsymbol{d}$ und erhalte

$$[\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{d}] = x[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{d}],$$

da $[\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}]$ gemäß der Definition verschwindet; hieraus

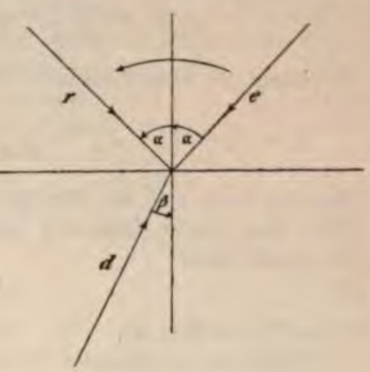
$$x = \frac{[\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{d}]}{[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{d}]}.$$

Wird die Identität andrerseits mit $\boldsymbol{r}$ äußerlich multipliziert, so ergibt sich

$$y = \frac{[\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{r}]}{[\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{r}]}.$$

Nun ist, wie unmittelbar aus der Figur ersichtlich, der Winkel, den der einfallende mit dem gebrochenen Vektor bildet, $180 + \alpha - \beta$ und der Winkel zwischen dem reflektierten und dem gebrochenen Vektor gleich $180 - (\alpha + \beta)$; daher

$$[\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{d}] = -ED \sin(\alpha - \beta),$$
$$[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{d}] = +RD \sin(\alpha + \beta);$$



und entsprechend

$$[\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{r}] = +ER \sin 2\alpha,$$
$$[\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{r}] = -DR \sin(\alpha + \beta).$$

Demnach

$$x = -\frac{E \sin(\alpha - \beta)}{R \sin(\alpha + \beta)},$$
$$y = -\frac{E \sin 2\alpha}{R \sin(\alpha + \beta)}.$$

Folglich nimmt die obige Identität die Form an:

$$\boldsymbol{e} + \frac{E \sin(\alpha - \beta)}{R \sin(\alpha + \beta)} \boldsymbol{r} + \frac{E \sin 2\alpha}{D \sin(\alpha + \beta)} \boldsymbol{d} = 0. \tag{3}$$

Andrerseits führt die physikalische Tatsache, daß der einfallende Lichtvektor sich in einen reflektierten und einen gebrochenen Lichtvektor zerlegt, zu der Vektorbeziehung

$$\boldsymbol{e} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{d} = 0, \tag{4}$$

welche nichts anderes besagt, als daß zwischen den drei elektromagnetischen Kräften Gleichgewicht bestehen muß.

Durch Vergleich der Formeln (3) und (4) ergibt sich hiernach

$$\frac{E \sin(\alpha - \beta)}{R \sin(\alpha + \beta)} = 1, \quad \frac{E \sin 2\alpha}{D \sin(\alpha + \beta)} = 1,$$

woraus

$$R = \frac{E \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad D = \frac{E \cdot \sin 2\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \tag{5}$$

und das sind die bekannten, zuerst von Fresnel aufgestellten Ausdrücke für die Verhältnisse der Amplituden des reflektierten und des gebrochenen Lichtes zu derjenigen des einfallenden Lichtes.

3. *Folgerungen.* — Die vektorielle Beziehung (4) ist nichts anderes als der Ausdruck dafür, daß die einfallende, die reflektierte und die gebrochene Welle dem Parallelogramm der Kräfte gehorchen. Aus den beiden letztgenannten läßt sich daher die erste in einfacher Weise graphisch finden.

Schreibt man ferner Gleichung (4) in der Form

$$-\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{d}$$

und multipliziert sie innerlich mit sich selber, so folgt

$$E^2 = R^2 + D^2 - 2RD \cos(\alpha + \beta). \tag{6}$$

Diese Relation führt unmittelbar zu dem Gesetz von der Erhaltung der Energie, wenn an Stelle der Amplituden die Intensitäten eingeführt werden durch die bekannten Definitionen:

$$J_e = E^2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad J_r = R^2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad J_d = D^2 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Gleichung (6) nimmt alsdann die Form an:

$$J_e = J_r + J_d + J_d \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\beta} - 2\sqrt{\frac{J_r J_d \sin\alpha \cos\alpha}{\sin\beta \cos\beta}} \cos(\alpha + \beta).$$

Man überzeugt sich im Hinblick auf die Ausdrücke (5) unschwer, daß der dritte und vierte Summand rechter Hand einander aufheben, sodaß die Energiegleichung

$$J_e = J_r + J_d \tag{7}$$

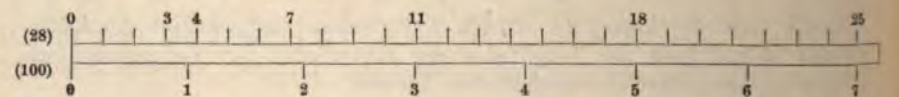
in der Tat erfüllt ist.

Was der vorstehenden Herleitung — deren elementarer Charakter mich beinahe vermuten läßt, daß sie sich bereits in der Literatur vorfindet — ein gewisses Interesse verleiht, ist das Fehlen jeglichen Differentialzeichens; die Fresnelschen Formeln ergeben sich unabhängig von der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Die Bestimmung sämtlicher Näherungsbrüche einer Zahlengröße bei John Wallis (1672).

Von M. Koppe.

Die Aufgabe, zu zwei Zahlen, etwa 28 und 100, das kleinste Vielfache zu finden, führt man gewöhnlich auf die Bestimmung des größten Teilers zurück. Man kann sie aber auch direkt lösen. Trägt man nach Poinsot auf einer Geraden von 0 aus die Vielfachen von 28 ab und bezeichnet zugleich auch die von 100, so geben die ersten zusammenfallenden Punkte beider Teilungen $q \cdot 28 = p \cdot 100 = m$.



Es ist aber nicht nötig, sämtliche Werte von $q \cdot 28$ (mod. 100) in dieser Art aufzustellen. Denken wir uns, die Aufgabe sei dadurch veranlaßt, daß die beiden Brüche $1/_{28}$ und $1/_{100}$ addiert werden sollen. Man erweitere den Bruch $1/_{28}$ der Reihe nach mit 2, 3, 4, ..., bis man zu zwei Brüchen gelangt, deren Nenner den des anderen Bruches einschließen. Sind überhaupt, jetzt oder in der Folge, $\frac{n_1}{28 n_1}$ und $\frac{n_2}{28 n_2}$ zwei Brüche, deren Nenner sich von denen der Brüche $\frac{m_1}{100 m_1}$ und $\frac{m_2}{100 m_2}$ nur wenig in entgegengesetztem Sinne unterscheiden, so erhält man durch Zusammenschieben ihrer Zähler

und ihrer Nenner in den Brüchen $\frac{n_1 + n_2}{28 n_1 + 28 n_2}$ und $\frac{m_1 + m_2}{100 m_1 + 100 m_2}$ eine neue Staffel, wo der Unterschied der Nenner nur die Differenz der bisherigen kleinsten Unterschiede ist. Man benutzt dieses Paar und dasjenige, welches bis dahin den kleinsten Unterschied im entgegengesetzten Sinne zeigte, um weiter zu bauen, wie folgendes Schema erläutert:

			12		8	4	0
$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{56}$	$\frac{3}{84}$	$\frac{4}{112}$	$\frac{7}{196}$	$\frac{11}{308}$	$\frac{18}{504}$	$\frac{25}{700}$
		$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{200}$	$\frac{3}{300}$	$\frac{5}{500}$	$\frac{7}{700}$
		16		4			

			$\frac{4}{1}$		$\frac{11}{3}$	$\frac{18}{5}$	
							$\frac{25}{7}$
		$\frac{3}{1}$		$\frac{7}{2}$			

Die Brüche der ersten Reihe sind gleich $^1/_{28}$, die der zweiten gleich $^1/_{100}$, bei jedem Paar ist oben oder unten angegeben, wieviel der Nenner des einen Bruches den des anderen übertrifft. Die Reihe wird fortgesetzt, indem man immer das letzte Paar von Brüchen, wenn seine Nennerdifferenz oben steht, mit dem letzten Paar kombiniert, wo diese Differenz unten stand, und umgekehrt vernachlässigt man im drittletzten Bruch die Differenz der Nenner (= 8) als unerheblich, so erhält man angenähert $\frac{1}{28} = \frac{11}{n}$, $\frac{1}{100} = \frac{3}{n}$, also $28 : 100$ fast wie $3 : 11$. So erhält man die oben schon angeführten beiden Reihen von Näherungsbrüchen, die oberen größer, die unteren kleiner als der genaue Wert des Bruches.

Will man schneller vorgehen, um bald zu den genaueren Brüchen in größeren Zahlen zu gelangen, so kann man anfangs springen; z. B. sieht man hier, wenn man die Differenzen (+ 12) und (— 4) erhalten hat, daß es nötig sein wird, von 12 so oft 4 zu subtrahieren, als angeht, daß man daher zu dem Paare bei (12) dreimal das bei (— 4) hinzuschieben muß. So kann man statt jeder Teilreihe von Brüchen, deren Zeichen (8, 4, 0) fortlaufend auf einer Seite (oben) stehen, sofort das letzte Paar (bei 0) bestimmen. Man sieht, daß man dann tatsächlich die folgende Rechnung erledigt:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 3 & & 1 & & 1 & & 3 & \\ 100 & : & 28 & : & 16 & : & 12 & : & 4 \\ 84 & & 16 & & 12 & & 12 & & \\ \hline 16 & & 12 & & 4 & & 0 & & \end{array},$$

und daß man die Hauptnäherungswerte ebenso bildet, wie es bei dem Kettenbruch $3 + 1/1 + 1/1 + 1/3 + 1/4$ üblich ist. Die ursprüngliche Reihe aller Näherungsbrüche umfaßt zugleich die intermediären Näherungswerte des Kettenbruches.

John Wallis veröffentlichte eine derartige Bestimmung von Näherungsbrüchen 1672 als Anhang der opera postuma des Astronomen Horrock,

ferner in der Algebra 1685, 1693. Die Aufgabe war von Edward Davenant 1664 gestellt. In der Arithmetica infinitorum (1655), deren Studium 1665 Newton zur Erweiterung des Binomialsatzes veranlaßte, findet sie sich nicht. Wallis sucht zunächst nur diejenigen Näherungsbrüche, welche den wahren Wert des gegebenen Bruches übertreffen, also die der oberen Reihe, und bestimmt daher von denjenigen Näherungsbrüchen, welche kleiner als der genaue Wert sind, nur immer sprungweise die Endwerte der gleichartigen Teilreihen. Er betrachtet auch nicht 28 und 100, sondern dafür 0,28 und 1,00, indem er im voraus das gegebene Verhältnis auf viele Stellen in einen Dezimalbruch verwandelt. Erst später bestimmt er auch die anderen Näherungsbrüche, welche zu klein sind, indem er sein Verfahren von neuem auf den reziproken Wert des gegebenen Bruches, $\frac{100}{28} = 3{,}571428 \ldots$ anwendet. Durch diese Zerlegung der Aufgabe in zwei aufeinander reduzierbare Teile verliert sein Verfahren an Symmetrie. Lagrange nennt es indirekt und sehr mühsam und analysiert es nicht; er entnimmt jedoch (Add. aux élém. d'algèbre d'Euler) von Wallis eine lange Reihe der Näherungswerte von π, die dieser bis zu Brüchen mit 18-stelligem Zähler und Nenner berechnet hatte. Das von Lagrange gerühmte Kettenbruchverfahren von Huygens ist in der Ausübung von dem des Wallis nicht verschieden; doch treten dort die intermediären Näherungswerte erst als Anhang hinzu, während sie hier in der Entwickelung an ihrem richtigen Platz erscheinen. Lagrange stellt die unrichtige Behauptung auf, daß *nur* die Hauptnäherungswerte Brüche liefern, welche dem wahren Wert des Bruches — ohne Rücksicht auf die Richtung der Annäherung — näher kommen als alle Brüche mit kleineren Nennern. Etwa die Hälfte der intermediären Näherungswerte hat dieselbe Eigenschaft.

Wallis deutet den Beweis nur in den ersten Stadien des Verfahrens an. Ich knüpfe an das Beispiel $\alpha = 0{,}3010300$ an. Zwischen den ganzen Zahlen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ liegt, außer α, auch noch der Bruch $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Um α mit $\frac{1}{2}$ zu vergleichen, bildet man $2\alpha = 0{,}60106 < 1$, folglich liegt α zwischen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{2}$. In diesem Intervall liegt auch $\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}$. Da $3\alpha = 1\cdot\alpha + 2\cdot\alpha = 0{,}90309 < 1$, so liegt α zwischen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{3}$. Weiter kommt man auf

$$\frac{0+1}{1+3} = \frac{1}{4}, \quad 4\alpha = 1\cdot\alpha + 3\cdot\alpha = 1{,}20412 > 1, \quad \alpha = \tfrac{1}{4} \cdots \tfrac{1}{3},$$
$$\frac{1+1}{4+3} = \frac{2}{7}, \quad 7\alpha = 3\alpha + 4\alpha = 2{,}10721 > 2, \quad \alpha = \tfrac{2}{7} \cdots \tfrac{1}{3}.$$

Die wesentlichen Rechnungen sind aus folgendem Schema ersichtlich:

$0{,}30103 = \alpha$	$23\alpha = 6{,}92369$	$83\alpha = 24{,}98549$
$3\alpha = 0{,}90309$	$33\alpha = 9{,}93399$	$93\alpha = 27{,}99579$
$1{,}20412 = 4\alpha$	$43\alpha = 12{,}94429$	$31{,}00609 = 103\alpha$
$2{,}10721 = 7\alpha$	$53\alpha = 15{,}95459$	$59{,}00188 = 196\alpha$
$3{,}01030 = 10\alpha$	$63\alpha = 18{,}96849$	$289\alpha = 86{,}99767$
$13\alpha = 3{,}91339$	$73\alpha = 21{,}97519$	$485\alpha = 145{,}99955.$

Diejenigen Vielfachen von α, welche kleiner sind als die benachbarte ganze Zahl, sind links angegeben, die übrigen rechts. Man addiert immer

das letzte links und das letzte rechts bezeichnete Vielfache und entscheidet so, ob es kleiner oder größer ist als die ihm benachbarte ganze Zahl.

Wallis nennt in $3{,}01030 = 10\alpha$ den positiven Dezimalbruch 0,01030 appendage oder mantissa, in $13\alpha = 3{,}91339$ betrachtet er das „complementum mantissae" = 0,08661. Paul Tannery hat zuerst auf diese älteste mathematische Benutzung des Wortes mantissa hingewiesen.

Die Genealogie der Näherungsbrüche geht aus untenstehender Figur hervor, in der sämtliche Punkte auf die Strecke 0 ... 1 zu projizieren sind.

Haben zwei Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, von denen der zweite der größere sei, die Eigenschaft $cb - ad = 1$, so bleibt diese auch für benachbarte Brüche der folgenden Reihe

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a+c}{b+d}, \quad \frac{c}{d}$$

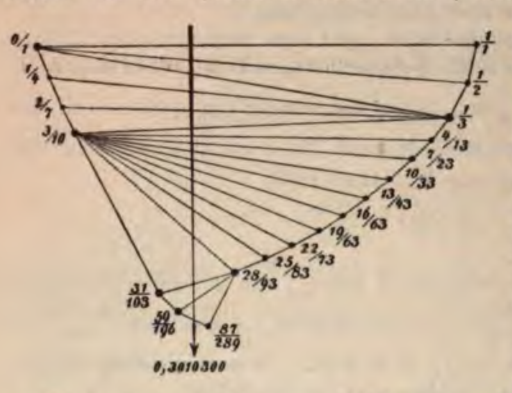
bestehen. Wir haben nun aber zwischen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$, für welche jene Eigenschaft bestand, eingeschaltet $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$, also besteht sie auch für $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$. Ebenso für $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, dann für $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w. Je drei Brüche, die an den Ecken eines Dreieckes stehen, bilden eine solche Reihe.

Haben aber zwei Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ diese Eigenschaft, so liegen zwischen ihnen nur Brüche, deren Nenner größer als b und d sind. Ist etwa $b < d$, ferner $\frac{\alpha}{\beta}$ ein Bruch, dessen Wert einem Punkte der Strecke $\frac{a}{b} \cdots \frac{c}{d}$ entspricht, und wäre $\beta < d$, so wäre $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{a}{b} \geqq \frac{1}{b\beta}$, also $> \frac{1}{bd}$, während doch diese Differenz $< \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \left[= \frac{1}{bd}\right]$ sein muß. Ist $d > b$, so vergleicht man $\frac{\alpha}{\beta}$ mit $\frac{c}{d}$ und erhält dasselbe Resultat. Schaltet man zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ den Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ ein, so zerfällt die Strecke $\left(\frac{a}{b} \cdots \frac{c}{d}\right)$ in zwei Teilstrecken, auf jeder liegen nur Brüche mit Nennern größer als $(b + d)$; folglich hat von allen Brüchen der Strecke $\left(\frac{a}{b} \cdots \frac{c}{d}\right)$ der Bruch $\frac{a+b}{c+d}$ den kleinsten Nenner.

Betrachten wir z. B. den Bruch $^{10}/_{33}$, der größer als α ist. Der wahre Wert liegt zwischen $^{10}/_{33}$ und $^{3}/_{10}$, auf dieser Strecke liegt kein Bruch, dessen Nenner kleiner als 33 wäre; folglich wird unser Bruch $^{10}/_{33}$ von keinem Bruch mit kleinerem Nenner in der Genauigkeit einer von oben her erfolgenden Annäherung übertroffen.

Außer den aufgestellten Brüchen gibt es keine anderen, die denselben Vorzug haben. Denn wäre auch $\frac{\alpha}{\beta}$ ein solcher, in unserer Reihe der oberen Näherungswerte *nicht* enthaltener, Bruch, so läge sein Wert zwischen zwei Brüchen unserer Reihe, etwa zwischen $^{10}/_{33}$ und $^{13}/_{43}$. Dann ergibt sich aus der Betrachtung der Dreieckspunkte $^{3}/_{10}$, $^{13}/_{43}$, $^{10}/_{33}$, daß sein Nenner größer als 43 sein müßte; er würde daher von dem Bruche $^{13}/_{43}$, der bei kleinerem Nenner eine stärkere Annäherung von oben her zeigt, aus der beanspruchten Stellung verdrängt.

Ein zweiter, geometrisch anschaulicher und weiter reichender Beweis für Wallis' Verfahren ist folgender. In einem Kreise vom Umfange 1 rolle man wiederholt einen kleineren vom Umfang α vom Nullpunkt her ab; die Punkte des großen Kreises, die durch ein-, zwei-, dreimaliges Abrollen von dem kleinen erreicht werden, bezeichne man mit (1), (2), (3) ... und verbinde sie durch Sehnen zu einem regulären Linienzug. Die Minima von $|q\alpha - p|$ bei positiven und die bei negativen Werten von $(q\alpha - p)$ oder die Mantissen und Komantissen werden durch solche Eckpunkte bezeichnet, welche sich zwischen den Nullpunkt und die ihm bisher nächstliegenden Eckpunkte eindrängen.



Ist nun der kleine Kreis n-mal, z. B. 200-mal, abgerollt, so gibt es unter den Eckpunkten einen, welcher vom Nullpunkt nach der positiven Bahnrichtung den kleinsten Abstand ε hat. Dies sei die Ecke (q), und es sei $q\alpha = p + \varepsilon$. Dann ist $(n_1) = (n - q)$ der letzte Punkt vor (n), den man antrifft, wenn man die Peripherie des großen Kreises vom Nullpunkt an positiv durchläuft.

Wiederholt man dasselbe Verfahren mit dem Sehnenzug $(1)\,(2)\ldots(n_1)$, so sei (q') der nunmehrige auf den Nullpunkt zunächst folgende Eckpunkt, $q_1\alpha = p_1 + \varepsilon_1$. So kann man n durch eine Reihe $q + q_1 + \cdots + q_\lambda$ erschöpfen, deren Glieder aus der Reihe der Nenner der *unteren* Näherungswerte, 1, 4, 7, 10, 103, 196 ..., mit dem *größten* anfangend, zu entnehmen sind, z. B. $200 = 196 + 4$. Dann ist $n\alpha = (p + p_1 + \cdots p_\lambda) + (\varepsilon + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\lambda)$ oder $\alpha = \frac{p + p_1 + \cdots + p_\lambda}{q + q_1 + \cdots + q_\lambda} + \frac{\varepsilon + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\lambda}{q + q_1 + \cdots + q_\lambda}$. Hier ist $\varepsilon + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\lambda$ ein Bogen, der sich von (q_λ) im positiven Sinne bis (n) erstreckt, also < 1. Folglich ist der erste Teil der, zunächst unter α liegende, Bruch vom Nenner n; der zweite zeigt, daß seine Genauigkeit zwischen $\frac{\varepsilon}{q}$ und $\frac{\varepsilon_\lambda}{q_\lambda}$ liegt. Nur wenn sich die Reihe der q auf die ϱ-malige Wiederholung desselben Anfangswertes q beschränkt, wird die Genauigkeit von $\frac{\varrho p}{\varrho q}$ gleich $\frac{\varrho \varepsilon}{\varrho q}$ oder $\frac{\varepsilon}{q}$; aber der Bruch kann dann in einfacher Form $\frac{p}{q}$ dargestellt werden. Hiermit übersieht man, wie aus der ganzen Schar aller Näherungswerte sich die guten, die in kleinen Zahlen *nicht* ihres Gleichen haben, herausheben. Rein arithmetisch kann ich diesen Zusatz nicht beweisen. Die obige schon von Poinsot benutzte geometrische Deutung ist von mir, Math. Annalen XXIX, weiter als hier ausgeführt. Für das obige Beispiel wird aus $\frac{59}{196}$ und $\frac{1}{4}$ gebildet $\frac{60}{200}$, also liegt α zwischen $\frac{60}{200}$ und $\frac{61}{200}$.

Die geodätische Krümmung der Krümmungslinien.

Von J. Knoblauch.

Man pflegt die Lehre von der Krümmung der Flächen im Anschluß an die Theorie der Raumkurven zu begründen, indem man sich auf einer Fläche durch einen beliebigen Punkt eine beliebige Kurve gezogen denkt und deren Krümmung ins Auge faßt. Um eine solche Linie als der Fläche angehörig zu kennzeichnen, muß man sie vor allem zur Flächennormale in Beziehung setzen; und sobald man dies tut, erkennt man, daß das Quadrat ihrer ersten Krümmung sich als Quadratsumme zweier Größen darstellen läßt, deren eine, die Normalkrümmung, außer von den auf den Flächenpunkt bezüglichen sechs Fundamentalgrößen nur von den ersten Differentialen der krummlinigen Koordinaten abhängt, während die andere, die Tangential- oder geodätische Krümmung, zwar außerdem die zweiten Differentiale, von den Fundamentalgrößen aber nur die der ersten Ordnung enthält. Bei ihrer Wichtigkeit für die Theorie der Abwickelung hat die letztere Tatsache die Aufmerksamkeit der Mathematiker derart in Anspruch genommen, daß die Tangentialkrümmung solcher Kurven, die, wie die Krümmungslinien, bei der Biegung der Fläche im allgemeinen nicht in Kurven derselben Art übergehen, verhältnismäßig wenig beachtet worden ist. Trotzdem die Frage nach den geodätischen Krümmungen g_1, g_2 der beiden Krümmungslinien sich sofort darbietet, nachdem die Theorie der Normalkrümmung einmal auf diese Kurven geführt hat, und obgleich g_1 und g_2 in einer großen Anzahl flächentheoretischer Formeln explicite oder implicite enthalten sind, ist doch schon die einfache und wichtige Aufgabe der Bestimmung dieser Größen mittels einer quadratischen Gleichung, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereich der Fundamentalgrößen und ihrer Ableitungen angehören, bisher, wie es scheint, nicht gelöst worden.

Um sie in Angriff zu nehmen, kann man verschiedene Wege einschlagen. Einmal liegt es nahe, für g_1 und g_2 ihre einfachsten Ausdrücke

$$(1)\qquad g_1 = -\frac{1}{\sqrt{E^*G^*}}\frac{\partial\sqrt{E^*}}{\partial q}, \quad g_2 = -\frac{1}{\sqrt{E^*G^*}}\frac{\partial\sqrt{G^*}}{\partial p},$$

die für die Krümmungslinien als Koordinatenlinien gelten, anzunehmen und vermittelst der Transformationsgleichungen für die Fundamentalgrößen den Übergang von den Parametern der Krümmungskurven zu einem beliebigen System krummliniger Koordinaten zu versuchen. Allein schon nach den ersten Schritten sieht man sich bei dieser Methode in unübersehbare Rechnungen verwickelt. Ebenso aussichtslos erscheint es, durch Zusammenstellung der für beliebige Parameter geltenden Formeln

$$(2)\qquad g_1 = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p_{12}}{\partial u} - \frac{\partial p_{11}}{\partial v}\right), \quad g_2 = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p_{21}}{\partial v} - \frac{\partial p_{22}}{\partial u}\right)$$

die in $p_{11}, \dots p_{22}$ steckenden Irrationalitäten (vgl. Journal f. Math. Bd. 115 (1895), S. 195—196) mit Hilfe der zwischen diesen vier Größen und den Fundamentalgrößen stattfindenden Relationen zu entfernen.

Mehr Erfolg verspricht von vornherein eine andere Methode, bei der die gestellte Aufgabe auf ein einfach zu charakterisierendes Eliminations-

problem zurückgeführt wird. Das Quadrat der geodätischen Krümmung g einer beliebigen Kurve kann durch die Gleichung

$$(3)\quad (Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)^3 g^2$$
$$= T^2\Big[\Big(\Big\{{11 \atop 1}\Big\}du^2 + 2\Big\{{12 \atop 1}\Big\}dudv + \Big\{{22 \atop 1}\Big\}dv^2 + d^2u\Big)dv$$
$$- \Big(\Big\{{11 \atop 2}\Big\}du^2 + 2\Big\{{12 \atop 2}\Big\}dudv + \Big\{{22 \atop 2}\Big\}dv^2 + d^2v\Big)du\Big]^2$$

definiert werden. Ist die Kurve eine Krümmungslinie, also durch die Differentialgleichung

$$(4)\qquad \Gamma \equiv \frac{1}{T}\begin{vmatrix} Edu + Fdv, & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt, so handelt es sich um die Elimination der Differentiale du, dv, d^2u, d^2v oder genauer der Größen $dud^2v - dvd^2u$ und $\frac{dv}{du}$ aus (3), (4) und dem Differential der letzteren Gleichung. Es darf wohl heutzutage als selbstverständlich betrachtet werden, daß man nicht mit den Ableitungen der Koeffizienten der quadratischen Differentialform Γ weiter zu rechnen, sondern an ihrer Stelle Größen einzuführen hat, die vermittelst der Christoffelschen Operationen mit ihnen zusammenhängen. Dann läßt sich die Elimination auf die von $\frac{dv}{du}$ aus der quadratischen Gleichung (4) und einer Gleichung 6. Grades von übersichtlichem Bildungsgesetz reduzieren. Dieses Verfahren hängt seiner Natur nach von der geometrischen Bedeutung der Gleichung (4) nicht ab, liefert also allgemein die geodätische Krümmung der beiden Kurvenscharen eines Netzes, das durch Nullsetzung einer beliebigen quadratischen Differentialform definiert wird. Für die Krümmungslinien lassen sich durch Einführung der kubischen Differentialform

$$\mathsf{H} = Pdu^3 + 3Qdu^2dv + 3Rdudv^2 + Sdv^3$$

Vereinfachungen erzielen. Aber in allen Fällen erlangt man, obwohl das Ergebnis nach bekannter Methode in Determinantenform sofort niedergeschrieben werden kann, eine Einsicht in das Bildungsgesetz der entstehenden Gleichung nicht sowohl mittels der Determinante als vielmehr dadurch, daß man die Resultante der beiden ganzen Funktionen 2. und 6. Grades zu anderen simultanen algebraischen Invarianten dieser Funktionen oder ihrer Bestandteile in Beziehung setzt. Was für Invarianten dabei ins Spiel kommen, läßt eine andere Methode besser hervortreten, die zugleich lehrt, in welcher Weise sich die beiden Größen g_1 und g_2 in das allgemeine System der flächentheoretischen Invarianten einordnen.

Nach der zweiten und dritten Fundamentalgleichung ist

$$(5)\qquad g_1 = \frac{1}{n_1 - n_2}\theta_2 n_1, \quad g_2 = \frac{1}{n_2 - n_1}\theta_1 n_2.$$

Die gestellte Aufgabe kommt also hinaus auf die Bildung einer quadratischen Gleichung für zwei bestimmte Größen aus der Reihe der Invarianten dritter Ordnung

$$\theta_1 n_1, \quad \theta_2 n_1, \quad \theta_1 n_2, \quad \theta_2 n_2.$$

Hinsichtlich des Vorzeichens der geodätischen Krümmung ist zu bemerken, daß es zweckmäßig erscheint, diese Größe, ebenso wie es mit der Normalkrümmung schon immer geschieht, durch einen bestimmten analytischen Ausdruck zu definieren, also etwa, wenn es sich um eine Kurve $\varphi(u, v) = c$ handelt,

$$g_\varphi = -\frac{H_a(\Phi, d\varphi^2)}{(\Delta_a^1 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{6}$$

zu setzen (a. a. O. S. 199). Die Ausdrücke (1), (2) und (5) beruhen auf dieser Definitionsweise. Während aber in der Theorie der Normalkrümmung die Einführung eines Vorzeichens in dem Auftreten eines in $\frac{dv}{du}$ und den Fundamentalgrößen rationalen Ausdruckes ihren Grund hat, so kommt in der Formel für die geodätische Krümmung eine Quadratwurzel vor. Demgemäß wird man nicht auf eine quadratische Gleichung für g_1 und g_2 selbst, sondern für g_1^2 und g_2^2 auszugehen haben, wie es auch die vorher erwähnte Methode schon hervortreten läßt.

Nun ist

$$\theta_1 \varphi = \frac{1}{T}\left(p_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - p_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right), \quad \theta_2 \varphi = \frac{1}{T}\left(-p_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + p_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right). \tag{7}$$

In der ersten dieser Gleichungen hat man φ gleich n_2, in der zweiten gleich n_1 zu setzen, sodann Summe und Produkt von $\theta_1^2 n_2$ und $\theta_2^2 n_1$ zu bilden und statt der Ableitungen von n_1 und n_2 die von H und K durch die Relationen

$$(n_1 - n_2)\frac{\partial n_1}{\partial u} = n_1 \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial K}{\partial u}, \ldots,$$

$$(n_1 - n_2)\frac{\partial n_2}{\partial u} = \frac{\partial K}{\partial u} - n_2 \frac{\partial H}{\partial u}, \ldots$$

einzuführen. Ordnet man hierauf nach den letzteren Ableitungen, so sind zur Reduktion der Koeffizienten von $\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2$, $\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2, \ldots$ die aus den Definitionsgleichungen für $p_{11}, \ldots p_{22}$, nämlich

$$\begin{cases} (p_{11}\xi + p_{12}\eta)^2 + (p_{21}\xi + p_{22}\eta)^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2, \\ n_1(p_{11}\xi + p_{12}\eta)^2 + n_2(p_{21}\xi + p_{22}\eta)^2 = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 \end{cases} \tag{8}$$

folgenden Beziehungen zwischen $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ einerseits und den Fundamentalgrößen andererseits zu benutzen. Es ist zweckmäßig, zu den Gleichungen (8) noch

$$n_1^2(p_{11}\xi + p_{12}\eta)^2 + n_2^2(p_{21}\xi + p_{22}\eta)^2 = \mathfrak{E}\xi^2 + 2\mathfrak{F}\xi\eta + \mathfrak{G}\eta^2 \tag{9}$$

hinzuzunehmen. Die gesuchten Ausdrücke erscheinen dann als zusammengesetzt aus verschiedenen Differentialparametern von H und K, deren Koeffizienten den Formen A, B und E entnommen sind.

Allein es empfiehlt sich nicht, es bei dieser Darstellung bewenden zu lassen. Man erhält nämlich sehr viel übersichtlichere Formeln, wenn man

an Stelle der Ableitungen von H und K die Koeffizienten der kubischen Differentialform H vermöge der Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} T^2\dfrac{\partial H}{\partial u} = GP - 2FQ + ER, & T^2\dfrac{\partial H}{\partial v} = GQ - 2FR + ES, \\ T^2\dfrac{\partial K}{\partial u} = NP - 2MQ + LR, & T^2\dfrac{\partial K}{\partial v} = NQ - 2MR + LS \end{cases}$$

(Journal f. Math. 103 (1888), S. 36) einführt. Die Benutzung dieser Differentialform ist bei Untersuchungen, die über die zweite Ordnung der Differentialquotienten hinausgehen, immer dann am Platze, wenn in der flächentheoretischen Aufgabe die beiden Scharen von Krümmungslinien oder, in einem verwandten Gebiete, die beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche, nicht gesondert zu betrachten sind. Ist dagegen die Sonderung notwendig oder zweckmäßig, so wird man bei den Operationen θ_1 und θ_2 stehen bleiben.

Es sei für irgend zwei binäre Formen Λ und M der $l$ten und $m$ten Dimension

$$(11)\quad \frac{1}{l(l-1)\,m(m-1)a}\left(\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2\mathsf{M}}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial^2\mathsf{M}}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\mathsf{M}}{\partial\eta^2}\right) = H_a(\Lambda, \mathsf{M}),$$

wo $a = T^2$ die Determinante der quadratischen Differentialform A bezeichnet; im besonderen also für Λ und M als quadratische Formen

$$(12)\quad H_a(\Lambda, \mathsf{M}) = \frac{1}{a}(l_{22}m_{11} - 2l_{12}m_{12} + l_{11}m_{22}).$$

Mit der durch das Zeichen H angedeuteten, Kovarianten und Invarianten bildenden Operation kommt man in einer großen Anzahl von Fällen aus. Sie ist in der Formel (6) bereits angewendet. Ferner läßt sich z. B. der Inhalt der Formeln (10) durch die beiden Gleichungen

$$(13)\quad dH = H_a(\mathsf{A}, \mathsf{H}), \quad dK = H_a(\mathsf{B}, \mathsf{H})$$

wiedergeben. Außer diesen beiden Kovarianten zieht von vornherein die aus Γ und H in gleicher Weise gebildete lineare Differentialform die Aufmerksamkeit auf sich. Es werde

$$(14)\quad H_a(\Gamma, \mathsf{H}) = \mathfrak{M}$$

gesetzt. Bildet man nun in der oben angedeuteten Weise $\theta_2^2 n_1 + \theta_1^2 n_2$, so erkennt man schon aus der Form eines Leitgliedes, daß

$$(15)\quad \theta_2^2 n_1 + \theta_1^2 n_2 = \frac{H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}^2)}{(n_1 - n_2)^2}$$

wird. Ferner ergibt sich

$$(16)\quad \theta_2 n_1 \cdot \theta_1 n_2 = \frac{H_a(\Gamma, \mathfrak{M}^2)}{(n_1 - n_2)^3}.$$

Führt man jetzt g_1 und g_2 statt $\theta_2 n_1$ und $\theta_1 n_2$ wieder ein, so erhält man aus (15) und (16) als quadratische Gleichung für g_1^2 und g_2^2 die folgende:

$$g^4 - \frac{H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}^2)}{(H^2 - 4K)^2} g^2 + \frac{H_a^2(\Gamma, \mathfrak{M}^2)}{(H^2 - 4K)^5} = 0, \tag{17}$$

die mannigfache Umformungen und Folgerungen zuläßt.

Nach derselben Methode läßt sich eine, wenn auch nicht so einfache, quadratische Gleichung für die Quadrate der beiden anderen Invarianten dritter Ordnung $\theta_1 n_1$ und $\theta_2 n_2$ bilden. Doch sollen diese, und um so mehr die Invarianten höherer Ordnung, heute außer Betracht bleiben.

Über die Linksabweichung des Geschosses bei aufgepflanztem Seitengewehr.

Von F. Kötter.

Im XXXI. Bande des „Civilingenieur" beschäftigt sich Herr C. Cranz mit der Erklärung der interessanten Tatsache, daß das Geschoß einer Handfeuerwaffe infolge des rechts aufgepflanzten Bajonetts eine Linksabweichung erfährt. Unter den verschiedenen Erklärungsversuchen erscheint dem Verfasser schließlich der folgende als zutreffend. Durch das aufgepflanzte Seitengewehr erfährt der Schwerpunkt des Gewehres eine Verlegung nach der rechten Seite der Laufachse, so daß der Rückstoß, welcher in Richtung der Laufachse wirkt, nicht mehr durch den Schwerpunkt des Gewehrs hindurch geht, sondern in Bezug auf letzteren ein Drehungsmoment besitzt, welches eine Linksdrehung des vorderen Laufendes hervorruft und so die beobachtete Tatsache bewirkt.

Herr C. Cranz hat auch versucht, diese Erklärung durch eine quantitative Rechnung zu stützen, bei welcher von dem allerdings schwer zu schätzenden Einfluß des Schützen auf sein Gewehr abgesehen wird. Dabei sind Herrn Cranz nun zwei nicht ganz unerhebliche Irrtümer untergelaufen. Bei der Bildung des Ansatzes wird die Beschleunigung des Geschosses in Richtung der bewegten Laufachse gerade so bestimmt, als ob der Lauf in Ruhe wäre. Und zweitens wird als Richtung der Geschoßgeschwindigkeit die Richtung des Laufes genommen, ohne Rücksicht darauf, daß das Geschoß an der seitlichen Bewegung in Folge der Drehung des Laufes teilnimmt.

In einem Vortrage vor der Berliner physikalischen Gesellschaft habe ich 1888 gezeigt, daß sich die durch Vernachlässigung des persönlichen Einflusses des Schützen wesentlich vereinfachte Aufgabe besonders elegant durch Heranziehung allgemeiner Prinzipien der Mechanik behandeln ließe. Da nämlich auf das durch Gewehr und Geschoß gebildete System nur innere Kräfte wirken, so gilt sowohl der Schwerpunkts- als der Flächensatz, mit der Maßgabe, daß sowohl die Schwerpunktsgeschwindigkeit als auch die Flächengeschwindigkeit des ganzen Systems gleich Null sein müsse.

Da sich der Geschoßschwerpunkt auf der Achse des Laufes bewegt und der Schwerpunkt des Gewehres, wenn er auch durch das aufgesetzte Seiten-

gewehr verlegt ist, einen unveränderlichen Abstand von der Achse hat, so muß der Schwerpunkt des ganzen Systems ebenfalls in einer unveränderlichen Entfernung von der Laufachse bleiben. Da nun aber der letzterwähnte Punkt nach dem an die Spitze gestellten Prinzip in Ruhe bleibt, so muß die bewegte Laufachse einen Kreis umhüllen, dessen Mittelpunkt eben jener Schwerpunkt des ganzen Systems ist, und dessen Radius sich zum Abstand des Gewehrschwerpunktes von der Achse verhält wie die Masse des Gewehres zur Gesamtmasse des ganzen Systems. Und nach demselben Verhältnis teilt offenbar der Berührungspunkt der Laufachse die Entfernung des Geschoßschwerpunktes von der Projektion des Gewehrschwerpunktes auf die Laufachse.

Die Drehungsgeschwindigkeit des Gewehres um jenen Gesamtschwerpunkt des Systems ergibt sich nun mit Leichtigkeit aus dem Flächensatz. Sie ist proportional der Geschwindigkeit, mit welcher das Geschoß im Lauf fortschreitet, und eine einfache Funktion der Strecke, welche das Geschoß im Lauf zurückgelegt hat. Durch eine einfache Quadratur bestimmt man hieraus den Winkel, um welchen sich das Gewehr bis zu dem Moment gedreht hat, in welchem das Geschoß den Lauf verläßt. Vereinigt man nun die Relativgeschwindigkeit des Geschosses gegen das Gewehr, mit derjenigen Geschwindigkeit, welche der Laufmündung der Waffe zukommt, so erhält man ohne große Rechnung die gesuchte Winkelabweichung der Geschoßgeschwindigkeit von der ursprünglichen Richtung des Laufes.

Daß dieser quantitativen Auswertung, bei welcher ein so wichtiger Faktor wie der Einfluß des Schützen völlig bei Seite geschoben ist, nur geringe praktische Bedeutung zukommt, ist mir nicht zweifelhaft. Für den Vortragenden liegt der Wert der angestellten Rechnung auch auf ganz anderer Seite; daß die beiden allgemeinen Sätze über die Bewegung von Massensystemen in so eleganter Weise zum Ziele führen, macht die angestellte Rechnung zu einer instruktiven, an praktische Vorgänge anknüpfenden Übungsaufgabe zur Erläuterung von Sätzen der Mechanik, welche sonst fast nur durch astronomische Beispiele sich illustrieren lassen.

Wie wenig Wert ich auch auf die ballistische Verwertung meiner Rechnung lege, die unanfechtbare Richtigkeit dessen, was ich als akademischer Lehrer vortrage, ist für mich von ganz besonderer Bedeutung. Es kann mir deshalb nicht angenehm sein, Lehren, welche ich jahraus jahrein in meinen Vorlesungen vorzubringen pflege, von einem Herrn, der sich vor kurzem auch für das von mir offiziell vertretene Fach an unserer Berliner Technischen Hochschule habilitierte, kurzer Hand als notorische Irrlehren hingestellt zu sehen.

Herr C. Cranz sagt in seinem Bericht über Ballistik (Mathematische Encyklopädie Band IV, Teil II, Heft 2, pag. 222, erster Absatz) folgendes:

„Auch beim Aufstecken des Bajonetts erfolgt eine Änderung des Abgangswinkels, der Erfolg ist meist Linksabweichung und Senkung des Treffpunktes. Die Erscheinung wurde früher der Rückwirkung der an der Bajonettklinge reflektierten Pulvergase auf das Geschoß, später einer Drehung des Gewehrs um den seitlich der Seitenachse liegenden Gesamtschwerpunkt zugeschrieben. Die Tatsache jedoch, daß bei rechtsaufgestecktem Bajonett Rechtsabweichung erfolgen und daß die Erscheinung selbst bei fest eingeklemmtem Gewehr sich einstellen kann, veranlaßte die Versuche von

C. Cranz und K. R. Koch, durch die jetzt festgestellt ist, daß diese Abweichung durch die Änderung der Laufvibration infolge der angehängten Bajonettmasse verursacht wird."

An dieser Auseinandersetzung fällt nun zunächst folgendes als merkwürdig in die Augen. Trotz der überaus zahlreichen Citate — es sind 161 auf 89 Seiten — tut der Verfasser in diesem Satze mit keiner Silbe seiner Arbeit im Civilingenieur Erwähnung. Und doch hätte es für die armen Sünder, welche an die Drehung des Laufes infolge der Schwerpunktsverlegung glauben, ein so menschlich schönes Plaidoyer auf mildernde Umstände abgegeben, wenn der Ankläger unumwunden eingestanden hätte, einst selbst in der jetzt als Irrtum bekämpften Meinung befangen gewesen zu sein.

Allerdings herrscht zwischen beiden Darstellungen schon bezüglich des rein Tatsächlichen ein weitgehender Unterschied. Im Civilingenieur vertritt Herr C. Cranz mit Nachdruck den Standpunkt, daß es sich um eine Linksabweichung handele, während nach der neueren Darstellung zwar eine Abweichung vorhanden sei, daß dagegen der Sinn dieser Abweichung unbestimmt sei; sie erfolge zwar meist nach links, könne aber auch nach rechts erfolgen. Und in dem Bericht über die oben erwähnten Versuche (Münch. Abh. 1901 p. 572) wird zwar noch von einer Abweichung des Treffpunktes infolge des aufgepflanzten Seitengewehres, aber von dem Sinn dieser Abweichung überhaupt nicht mehr gesprochen.

Daß dieser Umstand wesentlich ist, liegt auf der Hand. Denn sobald der Sinn der Abweichung ein unbestimmter wird, sobald eine Rechtsabweichung annähernd so oft vorkommt, wie eine Abweichung nach links, verliert natürlich jeder Erklärungsversuch seine Berechtigung, welcher einen feststehenden Sinn der Abweichung ergibt. Bei dieser Lage der Dinge erscheint der Wunsch fast selbstverständlich, das Tatsachenmaterial kennen zu lernen, durch welches Herr Cranz zu der Meinung geführt wurde, daß auch eine Rechtsabweichung des Geschosses möglich sei, nachdem er früher die Eindeutigkeit des Abweichungssinnes mit solchem Nachdruck vertreten hat.

Ich habe mich in den von Herrn C. Cranz citierten Quellen vergeblich nach einer Angabe umgesehen, durch die eine Rechtsabweichung des Geschosses bei rechts aufgepflanztem Seitengewehr glaubhaft gemacht würde, und bin durch die durchaus sachgemäßen Auseinandersetzungen von Hentsch und Weygand nur in der Meinung bestärkt worden, daß die Linksabweichung bei rechts aufgepflanztem Seitengewehr die Regel und eine unter denselben Umständen beobachtete Rechtsabweichung eine durch besondere störende Verhältnisse zu erklärende Ausnahme sei.

Soviel über das Tatsächliche; wir kommen nun zur Erklärung. Die Bemerkung, daß die Erscheinung auch bei einem festeingeklemmten Gewehr eintrete, bildet natürlich an sich keinen begründeten Einwand gegen eine Auseinandersetzung, welche die Erklärung für ganz andere Voraussetzungen zu geben sucht. Aber noch mehr; man könnte mit Leichtigkeit zeigen, daß wenn überhaupt ein Rückstoß stattfindet — und ein solcher läßt sich, wie die Versuche von C. Cranz und K. R. Koch deutlich beweisen, nicht verhindern — bei aufgepflanztem Seitengewehr eine Verbiegung des Laufes eintritt, bei welcher das vordere Ende im Anfang der Bewegung wenigstens nach links abgelenkt wird.

…un aber die Behauptung betrifft, daß die Abweichung eine …lge der Vibrationsänderung sei, welche der Lauf durch die angehängte Bajonettmasse erfährt, so habe ich in den Untersuchungen von Cranz und Koch keine Begründung für dieselbe entdecken können. Die Herren stellen … fest, daß die Horizontalschwingungen des Laufes durch das Seitengewehr Abänderungen erfahren. Aber da das Gewehr nur mit normal eingespanntem Seitengewehr untersucht wird, so kann natürlich nicht einmal behauptet werden, daß die Schwingungsänderungen nur durch die Größe und nicht durch die Lagerung der angehängten Masse beeinflußt werden. Aber selbst wenn es bezüglich der Schwingungen nur auf die Größe der Masse des Bajonetts ankäme und nicht auf ihre Lage, so ist damit doch nicht ausgemacht, daß dasselbe von der Geschoßabweichung gilt. In der Abhandlung der Herren Cranz und Koch habe ich nichts gefunden, was mich überzeugt hätte, daß die Linksabweichung des Geschosses und die Vibrationsänderung mit ihrem, wie es scheint, zufälligen Ausschlagssinn in kausalem Zusammenhang stünden.

Deshalb kann von einer durch die Herren Cranz und Koch erfolgten Feststellung, daß die Abweichung durch die Änderung der Laufvibration infolge der angehängten Bajonettmasse verursacht wird, meines Erachtens nicht die Rede sein. Und es wird bei der früher auch von Herrn Cranz vertretenen Meinung sein Bewenden haben müssen, daß bei Gewehren mit rechts aufgepflanztem Seitengewehr eine Linksabweichung des Geschosses deshalb erfolgt, weil die Bajonettsmasse auf der rechten Seite der Laufachse liegt, und deshalb das vordere Ende des Laufes nach links verdreht resp. verbogen wird.

Die Determinantentheorie hat sich sowohl bei Lebzeiten Kroneckers und unter seiner wirksamen Mitarbeit, als auch in den zwölf Jahren nach seinem Tode so stark und so erfolgreich entwickelt, daß die bisher veröffentlichten Lehrbücher dieser Disziplin nicht mehr eine vollständige Darstellung ihres reichen Inhaltes geben. In dieser Beziehung bildeten die Universitätsvorlesungen Kroneckers (1883—1891) über diese Disziplin bereits einen bedeutsamen Fortschritt. Aber auch er hielt die Zeit noch nicht für gekommen, seine eigenen tiefergehenden Untersuchungen, sowie die erst in den letzten Jahren vollständig abgeschlossenen Theorien anderer Forscher, welche so viel zur Vertiefung und Vereinfachung dieser Disziplin beigetragen haben, in den Kreis seiner Betrachtungen zu ziehen. Nun hat sich aber gezeigt, daß man gerade diese neueren Probleme der Determinantentheorie in besonders einfacher Weise durch Benutzung und konsequente Ausgestaltung der Gedanken behandeln kann, welche Kronecker in seinen letzten Vorlesungen und Arbeiten über diesen Gegenstand dargelegt hat. Aus diesem Grunde entschloß ich mich, die Vorlesungen Kroneckers unter sorgfältiger Erhaltung seiner Grundprinzipien und unter Benutzung seiner einfachen und wirksamen Methoden so zu bearbeiten und fortzuführen, daß dieses Werk eine systematische Darstellung der modernen Determinantentheorie und ihrer wichtigsten Anwendungen enthält.

Der Darstellung der allgemeinen Theorie geht eine sehr eingehende Untersuchung der Determinanten zweiter, dritter und vierter Ordnung voraus, nebst ihren Anwendungen auf die Geometrie, die Arithmetik und die Formentheorie. So erreicht Kronecker, daß der Leser mit dem Determinantenkalkul wohlvertraut ist, wenn nun alle Grundeigenschaften der Determinanten n^{ter} Ordnung aus der Betrachtung der Lösung eines Systemes von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten mit einem Schlage in Evidenz gesetzt werden.

An die Stelle der älteren Determinantentheorie ist heute die Untersuchung der Systeme oder Matrizen getreten, und das Rechnen mit diesen Systemen ist jetzt so ausgebildet und vereinfacht worden, daß die tiefsten Resultate der Determinantenlehre zu ganz einfachen Sätzen einer Arithmetik werden, welche nur wenig schwerer ist, als die elementare Zahlentheorie. Der Darstellung dieser Arithmetik unter Benutzung der Kroneckerschen Methoden, und ihrer Anwendung auf die Theorie der Elementarteiler, und auf die Äquivalenz und die Teilbarkeit der Systeme ist der von mir hinzugefügte letzte Teil des vorliegenden ersten Bandes gewidmet.

Marburg a. L.

K. Hensel.

Inhaltsverzeichnis.



BESTELL-ZETTEL.

Bei .... Buchhandlung

in .... bestellt der Unterzeichnete hiermit aus dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig [zur Ansicht]:

L. Kroneckers Werke. In 4 Bänden. I. Band. (IX u. 484 S.) 1895. geh. n. ℳ 28.—.

___ ___ II. Band. (VIII u. 541 S.) 1897. geh. n. ℳ 36.—.

___ ___ III, 1. Band. (VIII u. 473 S.) 1899. geh. n. ℳ 36.—.

___ ___ III, 2. Band. } Nach Erscheinen.

___ ___ IV. Band. }

L. Kroneckers Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale. (X u. 346 S.) 1894. geh. n. ℳ 12.—.

___ Vorlesungen über Zahlentheorie. In 2 Bänden. I. Band. (XVI u. 509 S.) 1901. geh. n. ℳ 16.—.

___ ___ II. Band. Nach Erscheinen.

___ Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. In 2 Bänden. I. Band. (XII u. 390 S.) 1903. geh. n. ℳ 20.—, in Leinw. geb. n. ℳ 21.—.

___ ___ II. Band. Nach Erscheinen.

___ Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen. In 2 Teilen. Nach Erscheinen.

L. Kroneckers Bildnis in Heliogravüre. 4. n. ℳ 2.—.

Ort, Wohnung: Unterschrift:

....

☞ **Das Nichtgewünschte bitte gefl. durchzustreichen.**

Das Werk, dessen erster Band soeben erschienen ist, richtet sich in erster Linie an die Lehrer, die darin Anregung finden sollen, ihren Unterrichtsstoff auszuwählen und, namentlich in den höheren Klassen zu vertiefen, sodann aber auch an Studierende, die eine Anlehnung an die Elemente und Auffrischung und Ergänzung früher erworbener Kenntnisse suchen.

Durch das Zusammenwirken mehrerer Gelehrter hoffen die Herausgeber, die möglichste Vollständigkeit zu erreichen. Der erste Band umfaßt den algebraisch-analytischen Teil. Der zweite Band, der unter der Presse ist, wird die Geometrie nach ihren verschiedenen Seiten behandeln. Ein dritter Teil, dessen Druck gleichzeitig mit dem zweiten in Angriff genommen werden soll, wird die Anwendungen bringen, deren Stoff aus der darstellenden Geometrie, der Mechanik, Physik und Wahrscheinlichkeitsrechnung entnommen ist. Die Vorarbeiten sind so weit gediehen, daß die Vollendung des ganzen Werkes im nächsten Jahre erwartet werden darf.

H. Weber.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Buch.

Grundlagen der Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Natürliche Zahlen.

Zweiter Abschnitt.

Die Rechenoperationen.

Dritter Abschnitt.

Division und Einführung der Brüche.

Vierter Abschnitt.

Irrationalzahlen.

Fünfter Abschnitt.

Verhältnisse.

Sechster Abschnitt.

Potenzen und Logarithmen.

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen ersten Grades.

Achter Abschnitt.

Quadratische Gleichungen und imaginäre Zahlen.

Neunter Abschnitt.

Permutationen und Kombinationen.

Zehnter Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

Zweites Buch.

Algebra.

Elfter Abschnitt.

Algebraische Gleichungen.

Zwölfter Abschnitt.

Hauptsätze der Algebra.

Dreizehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen ersten Grades.

Vierzehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen zweiten Grades.

Fünfzehnter Abschnitt.

Kettenbrüche.

Sechzehnter Abschnitt.

Algebraische Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen.

Siebzehnter Abschnitt.

Genäherte Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen.

Achtzehnter Abschnitt.

Kreisteilung.

Neunzehnter Abschnitt.

Unmöglichkeitsbeweise.

Drittes Buch.

Analysis.

Zwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Unbegrenzt konvergente Reihen für die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen.

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Die Binomialreihe.

Vierundzwanzigster Abschnitt.

Logarithmische Reihen.

Fünfundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Produkte.

Sechsundzwanzigster Abschnitt.

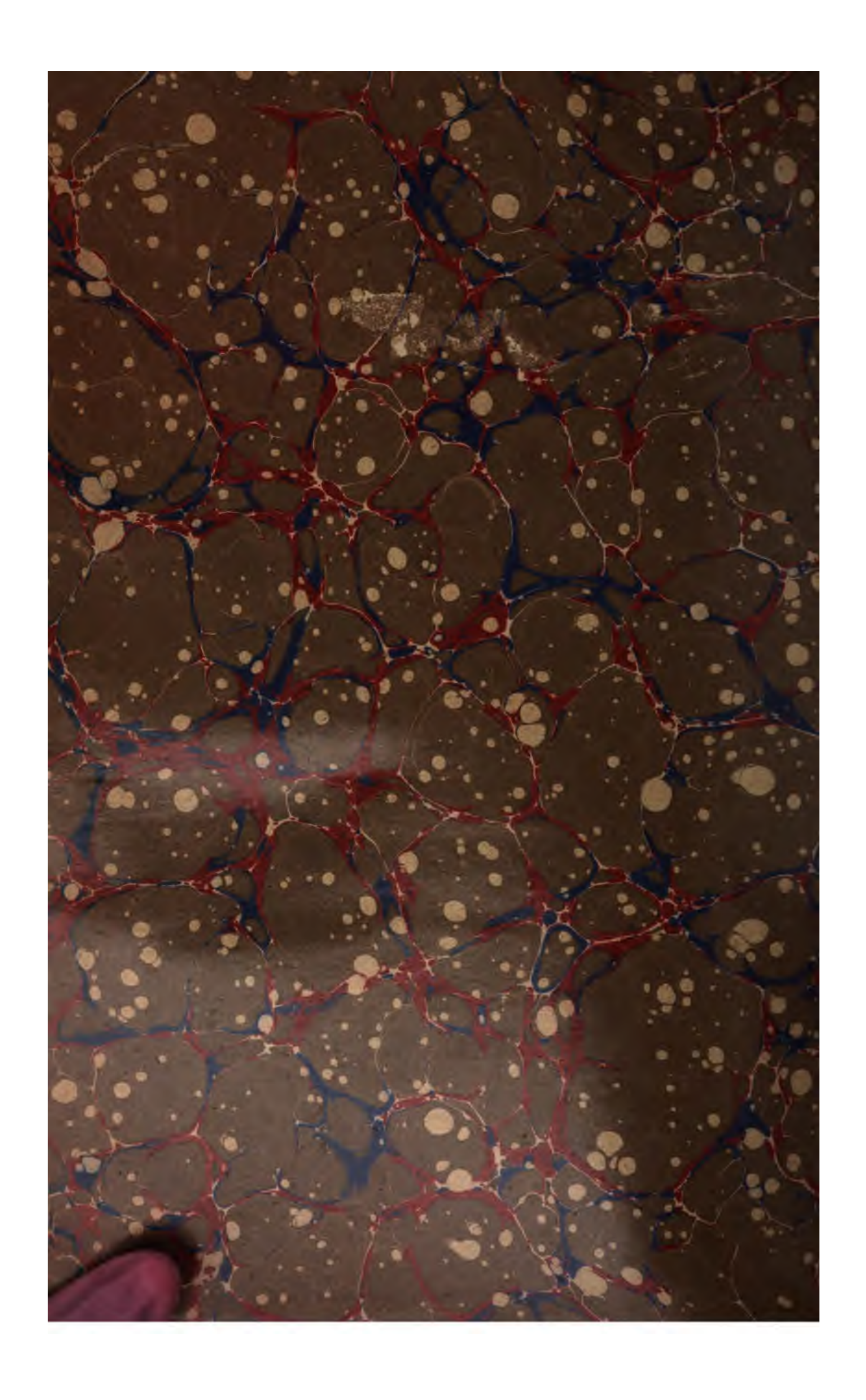
Transcendenz von e und π.

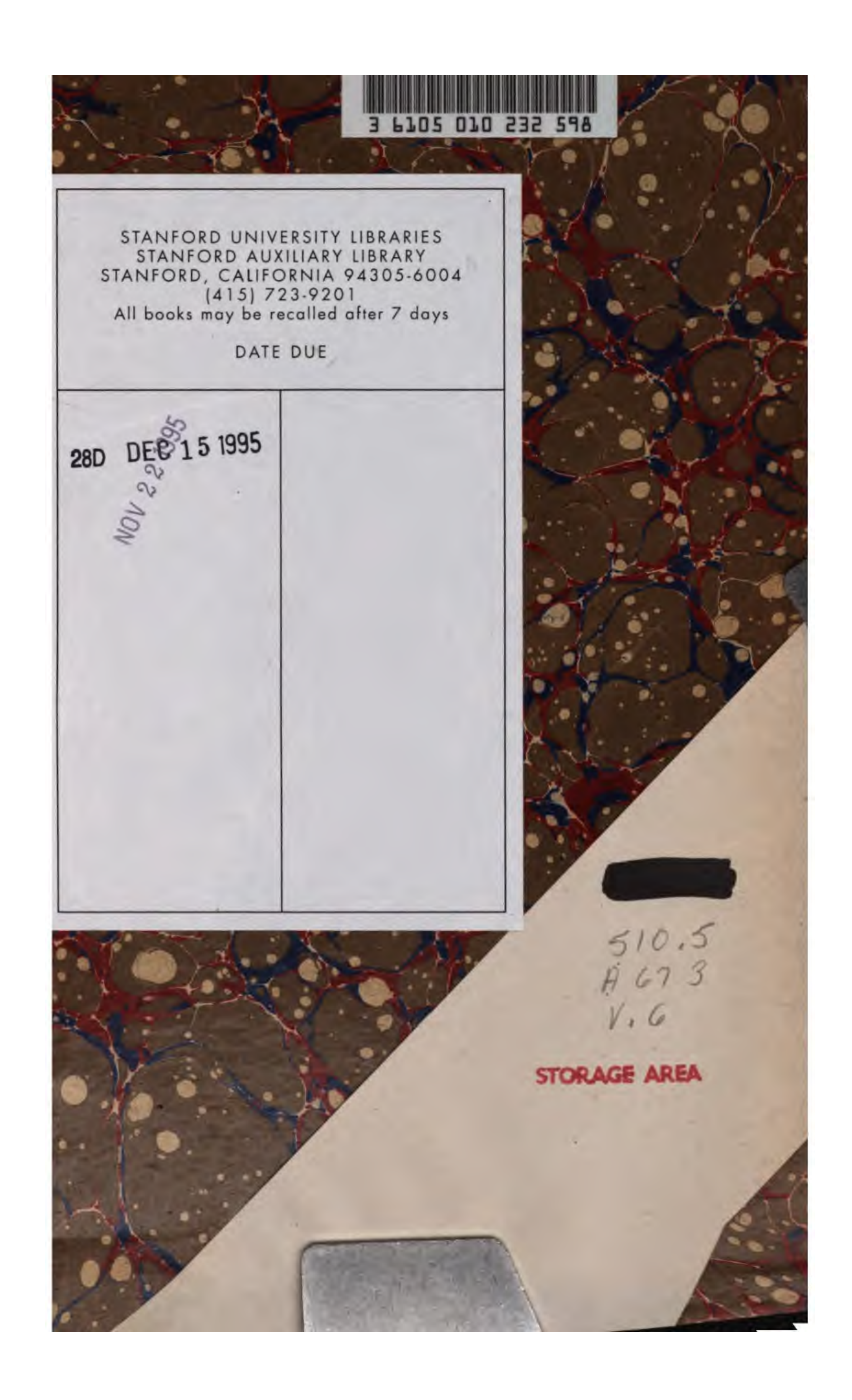
Zusätze.

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

M. Bauer, Capilleri, K. Cwojdzinski, Fr. Daniëls, J. Edalü, M. Großmann, T. Hayashi, G. Holzmüller, E. Jahnke, Ed. Janisch, J. Jonas, L. Klug, A. Kneser, P. Kokott, J. Kraus, H. Kühne, Ph. Maennchen, L. Matthiessen, O. Meissner, E. Meyer, Fr. Meyer, P. Milan, A. Pampuch, M. Pasch, L. Saalschütz, E. Schultz, M. Simon, O. Spieß, H. Stahl, O. Staude, H. Thieme, W. Velten, E. v. Weber, A. Wendler, G. Zemplén.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner in Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.





3 6105 010 232 598
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days
DATE DUE
28D DEC 15 1995
NOV 22 1995
510.5
A673
V.6
STORAGE AREA

